

Multipartite Verschränkungskriterien für Dicke-Zustände

Masterarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science
(M.Sc.)

der Universität Siegen
 Naturwissenschaftlich
Technische Fakultät
Department Physik

vorgelegt von
Marcel Bergmann

Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie multipartiter Verschränkung	3
2.1	Bipartite Verschränkung	3
2.1.1	Motivation und Definition bipartiter Verschränkung	3
2.1.2	Das PPT-Kriterium	5
2.1.3	Detektion bipartiter Verschränkung mithilfe von Verschränkungszeugen	7
2.1.4	Verschränkungsdetektion und Tests der Quantenmechanik mit Bell-Ungleichungen	10
2.1.5	Anwendungen der bipartiten Verschränkung	14
2.2	Tripartite Verschränkung	18
2.2.1	Motivation	18
2.2.2	Charakterisierung reiner und gemischter 3-Qubit-Zustände	18
2.2.3	Detektion tripartiter Verschränkung mit Verschränkungszeugen	22
2.2.4	PPT-Gemische im tripartiten Fall	23
2.3	Verallgemeinerung auf beliebige Qubitsysteme	26
2.3.1	Zustandsklassen für N Qubits	26
2.3.2	Vollständig zerlegbare Verschränkungszeugen im allgemeinen Fall	27
2.3.3	Konvexe Optimierung	29
2.4	Dicke-Zustände	32
2.4.1	Experimentelle Entdeckung und theoretische Beschreibung	32
2.4.2	Experimentelle Erzeugung und Detektion von Dicke-Zuständen	34
3	Detektion multipartiter Verschränkung mit optimierten Verschränkungszeugen	37
3.1	Problemstellung	37
3.2	Quantenrauschen	38
4	Optimierte Verschränkungszeugen für W-Zustände	40
4.1	Rekonstruktion numerischer Lösungen	40
4.2	Analytische Bestimmung von optimierten Verschränkungszeugen	53
4.3	Numerische Bestimmung von optimierten Verschränkungszeugen	62
4.4	Vergleich der Rauschtoleranzen und Interpretation der Ergebnisse	68
4.5	Resümee	69

5	Optimierte Verschränkungszeugen für Dicke-Zustände	70
5.1	Analytische Bestimmung von optimierten Verschränkungszeugen	70
5.2	Resümee	76
6	Zusammenfassung der Resultate und Ausblick	77
	Anhang	79
A:	Partielle Transpositionen von W_4	79
B:	Numerische Lösung für den Verschränkungszeugen \widetilde{W}_5	82
C:	Beweis über die Struktur des Verschränkungszeugen W_{proj}	83
D:	Maximale Raushtoleranz des Verschränkungszeugen W_G	84
	Literatur- und Quellenverzeichnis	86

1 Einleitung

Verschränkte Zustände sind eine bedeutende Ressource in der Quanteninformationsverarbeitung, z.B. für die Quantenkryptographie oder -teleportation, und außerdem relevant für viele Effekte in der Quantenoptik und der Physik kondensierter Materie.

Um die zahlreichen Anwendungen von Verschränkung nutzen zu können, müssen die experimentell erzeugten Zustände möglichst effizient nachgewiesen werden können. Die Aufgabe des Theoretikers besteht darin, möglichst optimal an das Experiment angepasste Kriterien vorzuschlagen.

Die vorliegende Masterarbeit befasst sich mit dem Nachweis von verschränkten Zuständen mit mehr als zwei Teilchen. Im Bereich von zwei Teilchen sind bereits leistungsstarke Kriterien bekannt, um Verschränkung nachzuweisen. Im Falle von mehr als zwei Teilchen ist die Situation deutlich schwieriger.

In dieser Arbeit wird der Nachweis der sogenannten multipartiten Verschränkung mithilfe von Verschränkungszeugen erbracht, wobei Verschränkungszeugen Observablen sind, durch deren Messung der Verschränkungsnachweis für einen experimentell hergestellten Zustand erbracht werden kann. Es zeigt sich also eine direkte Verbindung zum Experiment.

Im Folgenden sollen Verschränkungszeugen für zwei Spezialfälle der symmetrischen Dicke-Zustände bestimmt werden. Diese speziellen hochgradig verschränkten Zustände sind deshalb wichtig, weil man an ihnen sowohl theoretisch als auch experimentell viele Eigenschaften multipartiter verschränkter Quantensysteme untersuchen kann. Außerdem können diese Zustände mittlerweile im Labor routinemäßig hergestellt werden.

Bevor Verschränkungszeugen für Dicke-Zustände bestimmt werden, erfolgt im ersten Teil der Arbeit eine Einführung in die Verschränkungstheorie. Hierbei wird zunächst der mathematische Rahmen für den einfachsten Fall multipartiter Verschränkung, die bipartite Verschränkung, geschaffen. Es erfolgt eine formale Definition bipartiter Verschränkung in deren Anschluss die Möglichkeit zur ihrer Detektion mithilfe des PPT-Kriteriums aufgezeigt wird. Der für diese Arbeit fundamentale Begriff des Verschränkungszeugen wird formal eingeführt und dessen Bezug zu Bell-Ungleichungen, einer weiteren Möglichkeit zur Verschränkungsdetektion, verdeutlicht. Anschließend werden zwei Anwendungen bipartiter Verschränkung diskutiert.

Nach der ausführlichen Diskussion bipartiter Systeme liegt der Fokus auf tripartiten Systemen, den weitaus komplexeren verschränkten Zuständen mit drei Teilchen. Hier wird zunächst die Erweiterung des Verschränkungsbegriffs definiert, was dann in verschiedenen Zustandsklassen für reine und gemischte 3-Qubit-Zustände mündet. Die Detektion tripartiter Verschränkung mithilfe von Verschränkungszeugen, welche ebenfalls auf drei Teilchen verallgemeinert wird, steht dann im Mittelpunkt.

Nach den beiden konkreten Beispielen von bipartiter und tripartiten Systemen wird gezeigt, inwiefern sich die aufgestellten Definitionen und Folgerungen auf Systeme mit beliebiger Qubitanzahl verallgemeinern lassen. Dabei werden vollständig zerlegbare Verschränkungszeugen im allgemeinen Fall definiert und deren Bestimmung mithilfe der sogenannten konvexen Optimierung dargelegt. Den Schluss des Kapitels bildet die formale Beschreibung der oben angesprochenen Dicke-Zustände, wobei abschließend ein Experiment zu deren Erzeugung besprochen wird.

Im weiteren wird auf den theoretischen Grundlagen aufbauend die Problemstellung dieser Masterarbeit nochmals explizit erläutert. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Definition des depolarisierenden Kanals, einer speziellen Form des Quantenrauschens, welche im Hauptteil von enormer Wichtigkeit ist.

Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich mit optimierten Verschränkungszeugen für Dicke-Zustände. Zu Beginn werden die einfachsten Dicke-Zustände, nämlich die W-Zustände mit nur einer Anregung, betrachtet. Hier werden zunächst numerische Lösungen für kleine Qubitanzahlen analytisch rekonstruiert, bevor auf der Basis dieser Resultate eine ganze Klasse von Verschränkungszeugen für beliebig große Systeme hergeleitet wird. Diese Verschränkungszeugen für W-Zustände werden hinsichtlich ihrer Rauschtoleranz bezüglich des depolarisierenden Kanals optimiert. Neben einer analytischen Lösung werden zusätzlich allgemeinere Verschränkungszeugen mithilfe einer numerischen Optimierung bereitgestellt, wobei anschließend ein Experiment diskutiert wird, bei dem ein Spezialfall dieser Verschränkungszeugen zur Verschränkungsdetektion zum Einsatz kam. Den Schlusspunkt des Kapitels bildet der Vergleich zwischen analytischer und numerischer Lösung.

Das weitere Ziel ist dann die analytische Bestimmung von optimierten Verschränkungszeugen für eine allgemeinere Klasse von symmetrischen Dicke-Zuständen. Dazu werden die N-Qubit-Dicke-Zustände mit $\frac{N}{2}$ Anregungen betrachtet. Es wird ein geeigneter Ansatz für Verschränkungszeugen präsentiert und in analytischer Weise hinsichtlich der Toleranz gegenüber weißem Rauschen optimiert. Es folgt ein Vergleich mit bereits bekannten Ergebnissen.

2 Theorie multipartiter Verschränkung

2.1 Bipartite Verschränkung

2.1.1 Motivation und Definition bipartiter Verschränkung

Unter Verschränkung versteht man ein quantenmechanisches Phänomen, bei dem ein aus mindestens zwei Konstituenten aufgebautes System nur noch als Ganzes verstanden werden kann, d.h. die Konstituenten können nicht mehr unabhängig voneinander beschrieben werden [8].

Als Beispiel betrachte man ein Photon, das sich in einem β -Bariumborat-Kristall bewegt [1]. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit können hier aus dem einen Photon mit einer anfänglichen Wellenlänge zwei Photonen mit der jeweils halben Wellenlänge entstehen. Wegen den elementaren Erhaltungssätzen, z.B. Energie- und Impulserhaltung, sind die entstandenen Photonen nicht unabhängig voneinander. Kennt man zum Beispiel die Polarisation eines Photons, welche völlig beliebig sein kann, so kann man direkt auf die Polarisation des anderen Photons schließen. Solche Abhängigkeiten nennt man Korrelationen.

Verschränkung ist also eine quantenmechanische Korrelation. Auszeichnend hierfür ist, dass diese Korrelation erst durch eine Messung festgelegt wird. Im vorstehenden Beispiel bedeutet dies, dass die Polarisation der einzelnen Photonen bei ihrer Erzeugung noch gar nicht feststeht, jedoch steht mit der Erzeugung der Photonen die Korrelationen zwischen den Polarisationen direkt fest. Dies ist ein scheinbarer Widerspruch, der mit der Einführung einer Gesamtwellenfunktion aufgelöst werden kann.

Nun sollen die eingehenden Bemerkungen zur Verschränkung mathematisch strikter gefasst werden. Wir betrachten dazu ein System aus zwei Teilsystemen A und B, welches man sich als gemeinsamen Zustand zweier physikalischer Teilchen vorstellen kann. Die Zustände der Teilchen liegen in den jeweiligen Hilberträumen \mathcal{H}_A und \mathcal{H}_B . Das Gesamtsystem wird dementsprechend durch Zustände beschrieben, die im Produktraum $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ liegen. Daran schließt sich die Definition der Verschränkung für reine Zustände $|\Psi\rangle$ direkt an [2]:

Definition 1. *Der reine Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ heißt verschränkt, wenn*

$$|\Psi\rangle \neq |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$$

für alle Vektoren $|\phi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ und $|\chi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$ gilt. Andernfalls heißt $|\Psi\rangle$ separierbar.

Über diese Definition wird die Gesamtheit der reinen Zustände von bipartiten Systemen zunächst in zwei Klassen aufgeteilt, in separierbare Zustände, die sich als Tensorprodukt

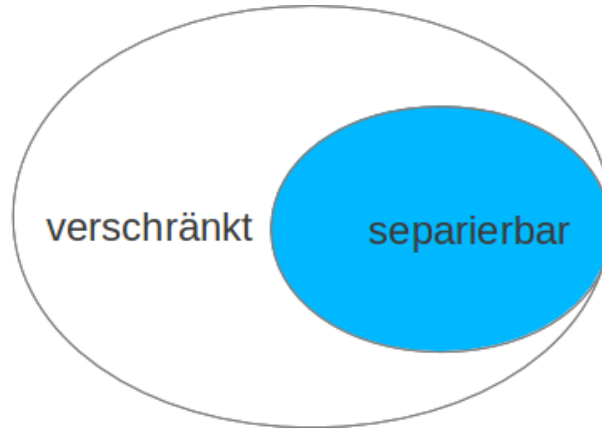


Abbildung 1: Menge der gemischten bipartiten Zustände als disjunkte Vereinigung verschränkter und separierbarer Zustände

von Vektoren aus den Untersystemen schreiben lassen, und in verschränkte Zustände. Die Beschreibung ist aber noch nicht vollständig, da gemischte Zustände bis jetzt unberücksichtigt blieben. Gemischte Zustände werden nach dem Theorem von Gleason in allgemeinsten Form durch Dichtematrizen beschrieben [3]. Eine Dichtematrix ρ ist hierbei definiert als hermitescher, positiver Operator mit Spur 1. Durch die Kenntnis der Dichtematrix ist das System vollständig charakterisiert [4]. Die Definition von Verschränkung für gemischte Zustände des Gesamtsystems schließt sich nun über die Formulierung via Dichtematrizen an [2]:

Definition 2. Ein Zustand, repräsentiert durch die Dichtematrix ρ_{AB} , heißt separierbar, falls

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i$$

mit Dichtematrizen $\rho_A^i \in \mathcal{H}_A$ und $\rho_B^i \in \mathcal{H}_B$ sowie $\sum_i p_i = 1$ möglich ist. Andernfalls heißt ρ_{AB} verschränkt.

Dies bedeutet in Analogie zu den reinen Zuständen, dass ein Zustand genau dann verschränkt ist, wenn es unmöglich ist die zugehörige Dichtematrix als konvexe Summe aus Tensorprodukten von Dichtematrizen aus den Untersystemen zu schreiben. Dementsprechend kann die Menge der bipartiten Zustände in zwei disjunkte Mengen, nämlich in die separierbaren und die verschränkten Zustände, partitioniert werden.

Die physikalische Interpretation von Separabilität kann man aus der mathematischen Interpretation gewinnen. Betrachtet man den reinen separierbaren Zustand

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B,$$

so können die Untersysteme als vollständig unkorreliert aufgefasst werden, was durch

das Tensorprodukt zum Ausdruck gebracht wird. Ferner bedeutet dies, dass der Zustand $|\Psi\rangle$ lokal erzeugt werden kann, nämlich wenn im Teilsystem A der Zustand $|\phi\rangle_A$ und im Teilsystem B der Zustand $|\chi\rangle_B$ präpariert wird. Allgemeiner fasst man als separierbare Zustände diejenigen Zustände auf, welche durch klassische Kommunikation zwischen den beiden Parteien und lokale Operationen auf den Untersystemen hergestellt werden können. Diese Transformationen heißen LOCC-Transformationen, welche auch für Mehrteilchensysteme zur Charakterisierung von Zuständen verwendet werden [2, 8, 5].

In verschränkten Zuständen findet man im Gegensatz zu den separierbaren Zuständen eine Korrelation zwischen den Untersystemen [8]. Dies bedeutet wie eingangs erwähnt, dass sich das Gesamtsystem nur als Ganzes verstehen lässt und nicht als aus seinen Untersystemen aufgebaut. Folglich ist es nicht möglich, solche Zustände lokal zu präparieren.

Direkt an diese Charakterisierung bipartiter Zustände schließt sich die Frage an, ob ein gegebener bipartiter Zustand verschränkt ist oder nicht. Diese Frage wird im nächsten Abschnitt durch das PPT-Kriterium beantwortet.

2.1.2 Das PPT-Kriterium

Durch die mathematische Definition von Separabilität und somit der Verschränkung bipartiter Zustände kann im Prinzip die Frage, ob der Zustand eines beliebigen Zwei-Parteien-Systems separierbar ist oder nicht, entschieden werden.

Dazu kann man nach Zerlegungen des Zustandsvektors bzw. der Dichtematrix des Systems gemäß Definition 1 oder Definition 2 suchen. Im Allgemeinen ist dieses Verfahren jedoch ungeeignet, da im besten Fall höchstens die Separabilität mit einer konkreten Zerlegung bewiesen werden kann. Für Verschränkung ist dieses operative Verfahren niemals hinreichend. Wünschenswert ist dagegen ein notwendiges oder gar hinreichendes Kriterium, welches bestenfalls auch noch effizient berechnet werden kann.

Das PPT-Kriterium, welches im Jahre 1996 von Michal, Pawel und Ryszard Horodecki sowie Asher Peres bewiesen worden ist, bietet für Zwei-Parteien-Systemen ein hinreichendes Kriterium für Separabilität einer Dichtematrix [6, 7]:

Theorem (PPT-Kriterium). *Sei ρ ein separierbarer, bipartiter Zustand. Dann sind alle partiellen Transposition von ρ positiv, d.h. ρ ist PPT.*

Dieses Theorem, welches nach seinen Entdeckern auch Peres-Horodecki-Theorem genannt wird, bedarf einer Erläuterung. Zunächst geben wir die Definition und die Interpretation der partiellen Transposition an. Dazu setzen wir eine bipartite Dichtematrix ρ voraus und entwickeln diese nach der Menge $P^* = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ der um den Einheitsoperator erweiterten Paulimatrizen $\{\sigma_i\}$. Die Operatoren aus P^* bilden eine Orthonormalbasis, so dass die Zerlegung möglich und eindeutig ist. Somit können wir ρ schreiben

als¹:

$$\rho = \sum_{i,j=0}^{3,3} \alpha_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$$

Die partiellen Transpositionen von ρ sind nun definiert als die Transpositionen auf den Subsystemen:

$$\rho^{TA} = \sum_{i,j=0}^{3,3} \alpha_{ij} \sigma_i^T \otimes \sigma_j$$

$$\rho^{TB} = \sum_{i,j=0}^{3,3} \alpha_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j^T$$

Zu erwähnen ist, dass die partielle Transposition von der gewählten Produktbasis abhängt [2]. Jedoch kann man zeigen, dass das Spektrum des jeweiligen Ergebnisses nicht von Basis abhängt [2]. Das PPT-Theorem stellt nun ein notwendiges Kriterium für Separabilität dar, indem es die Positivität aller partiellen Transpositionen einer Dichtematrix verlangt. Der Beweis dieser Aussage erfordert wenig Aufwand [2]. Wir geben nach Definition 2 eine bipartite, separierbare Dichtematrix $\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i$ vor und berechnen die partiellen Transpositionen:

$$\rho^{TA} = \sum_i p_i (\rho_A^i)^T \otimes \rho_B^i = \rho = \sum_i p_i \tilde{\rho}_A^i \otimes \rho_B^i \geq 0$$

Hier wurde im ersten Schritt die Definition der partiellen Transposition benutzt. Im zweiten Schritt wurde berücksichtigt, dass die Transposition auf dem Subsystem A wieder einen Zustand ergibt. Damit ist der gesamte Ausdruck jedoch wieder eine gültige Dichtematrix und somit positiv.

Wie oben erwähnt bietet das PPT-Kriterium ein notwendiges Kriterium für Separabilität. Dies bedeutet, dass alle bipartiten, separierbaren Zustände positive partielle Transpositionen besitzen, jedoch ist die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen falsch. So kann man verschränkte, bipartite Zustände konstruieren, deren partielle Transpositionen positiv sind [6, 7].

Eine erfreulich einfache Version des PPT-Kriteriums erhält man für kleine Dimensionen der jeweiligen Zustandsräume der Untersysteme. So kann man z.B. für 2×2 - oder 2×3 -Systeme zeigen, dass das PPT-Kriterium notwendig und hinreichend ist [7, 8]:

¹Wir definieren hier $\sigma_0 = 1$

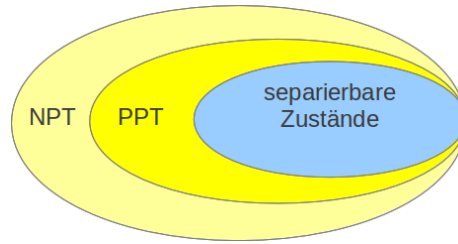


Abbildung 2: Menge der gemischten bipartiten Zustände als disjunkte Vereinigung PPT- und NPT-Zuständen

Theorem (Horodecki). *Sei ρ die Dichtematrix eines 2×3 - oder 2×2 -Systems. Dann gilt:*

$$\rho^{TA} \geq 0 \Leftrightarrow \rho \text{ ist separierbar}$$

Somit ist zu mindestens für diese Systeme das Problem der Separabilität gelöst. Das PPT-Kriterium impliziert aber auch eine neue Klasse innerhalb der bipartiten Zustände. Diese können nun nicht nur in separierbare und verschränkte Zustände untergeteilt werden, sondern auch in Zustände mit positiver oder negativer partieller Transposition.

2.1.3 Detektion bipartiter Verschränkung mithilfe von Verschränkungszeugen

In den letzten Abschnitten wurde klar aufgezeigt, dass die Menge der bipartiten Zustände in zwei Klassen von Zuständen aufgeteilt werden kann, nämlich in separierbare und verschränkte Zustände. Das PPT-Kriterium stellte sich als effektives Separabilitätskriterium heraus, wenn eine auf Verschränktheit zu testende Dichtematrix explizit bekannt ist. Einen alternativen Zugang bietet sich mit dem Konzept eines Verschränkungszeugen an. Dieser ist wie folgt definiert [2, 8]:

Definition 3 (Verschränkungszeuge für bipartite Systeme). *Eine Observable W heißt Verschränkungszeuge, wenn*

$$\text{Tr}(W\rho_s) \geq 0 \text{ für alle separierbaren } \rho_s$$

$$\text{Tr}(W\rho_e) < 0 \text{ für wenigstens ein verschränktes } \rho_e$$

Diese Definition des Verschränkungszeugen kann sowohl als Folgerung aus der oben angegebenen Definition der Separabilität angesehen werden als auch als eine alternative, äquivalente Definition der selbigen. Ersteres sieht man wie folgt ein [8, 7]: Die Menge der separierbaren Zustände ist konvex, denn die konvexe Summe zweier separierbarer

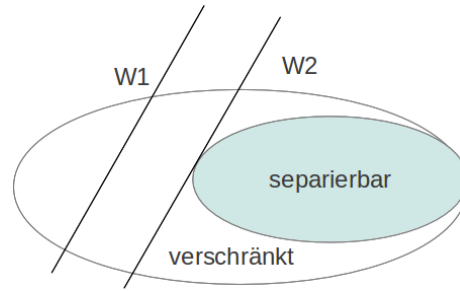


Abbildung 3: Verschränkungszeugen als Hyperebenen im Zustandsraum

Zustände ist per Definition ebenfalls separierbar. Aus dem Hahn-Banach-Theorem aus der Funktionalanalysis [10] folgt dann, dass es ein lineares Funktional auf dem gesamten Raum der bipartiten Zustände geben muss, welches die Menge der separierbaren Zustände von einem beliebigen verschränkten Zustand trennt. Dieses Funktional ist gerade der Verschränkungszeuge in obiger Definition. Ein Verschränkungszeuge kann demnach als Hyperebene im Zustandsraum interpretiert werden. Mit einem Verschränkungszeugen steht uns auch eine experimentelle Möglichkeit zur Verfügung um das Separabilitätsproblem zu lösen. Im Wesentlichen muss man für einen zu untersuchenden Qubit Zustand lediglich den Erwartungswert für einen bekannten Verschränkungszeugen messen. Ist dieser Erwartungswert negativ, so liegt mit Sicherheit ein verschränkter Zustand vor, welchen man allerdings durch diese Messung allein nicht vollständig charakterisieren kann. Man sagt dann, der Zustand wird von dem Verschränkungszeugen detektiert. Liegt aber ein positiver Erwartungswert vor, so kann man nicht ohne weiteres darauf schließen, dass der Zustand separierbar ist denn nicht jeder verschränkte Zustand wird von jedem Verschränkungszeugen detektiert.

In Abbildung 3 sind zwei Verschränkungszeugen W_1 und W_2 als Hyperebenen repräsentiert. Der Verschränkungszeuge W_2 ist in diesem Fall “feiner” als W_1 , da er mehr verschränkte Zustände detektiert [2, 8]. Das sieht man daran, dass in diesem Bild der “Abstand” der Hyperebene W_1 zu den separierbaren Zuständen größer ist. Dieser “Abstand” ist ein Maß dafür, wie viele Zustände der Verschränkungszeuge detektiert. Da W_2 tangential an die separierbaren Zustände anliegt, ist dieser Verschränkungszeuge in diesem Sinne optimal.

Häufig ist man theoretisch wie experimentell an der Detektion eines bestimmten verschränkten Zustandes interessiert, woran sich die Frage nach einem geeigneten, an den Zustand angepassten Verschränkungszeugen direkt anschließt.

Sei also ein reiner, verschränkter Zustand $|\psi\rangle$ gegeben. Dann ist ein Verschränkungszeuge W gegeben durch [7, 8]

$$W = \alpha \mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Hierbei ist α der quadrierte maximale Überlapp zwischen dem Zustand $|\psi\rangle$ und den separierbaren Zuständen:

$$\alpha = \max \text{Tr}(\rho_{sep}|\psi\rangle\langle\psi|) = \max |\langle\psi|\phi_{sep}\rangle|^2$$

Es kann direkt nachgeprüft werden, dass das oben definierte W tatsächlich ein Verschränkungszeug, welchen man als projektiven Verschränkungszeugen bezeichnet, ist. Erstens gilt $\alpha < 1$, da der Zustand $|\psi\rangle$ verschränkt ist. Aus diesem Grund ist $\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) < 0$. Aus demselben Grund ist aber auch der Erwartungswert von W auf allen separierbaren Zuständen positiv.

Der maximale Überlapp $\sqrt{\alpha}$ des Zustandes mit den biseparierbaren Zuständen kann im Falle von bipartiten Systemen mithilfe der sogenannten Schmidt-Zerlegung bestimmt werden [2]:

Theorem (Schmidtzerlegung). *Es seien \mathcal{H}_A und \mathcal{H}_B Hilberträume mit den Dimensionen $d_A = \dim\mathcal{H}_A$ und $d_B = \dim\mathcal{H}_B$ und $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Dann lässt sich jeder Vektor $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ schreiben als*

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^R \lambda_i |\alpha_i\rangle_A |\beta_i\rangle_B$$

mit Orthonormalbasen $\{|\alpha_i\rangle_A, 1 \leq i \leq d_A\}$ von A und $\{|\beta_i\rangle_B, 1 \leq i \leq d_B\}$ von B . Außerdem gilt für die Schmidtkoeffizienten λ_i :

$$\lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^R \lambda_i^2 = 1$$

R heißt der Schmidt-Rang von $|\Psi\rangle$.

Den maximalen Überlapp α des Zustands $|\Psi\rangle$ mit den biseparierbaren Zuständen ist dann gegeben durch

$$\sqrt{\alpha} = \max_k \lambda_k.$$

Als Beispiel betrachte man den Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Offenbar gilt:

$$\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dann ist der projektive Verschränkungszeug für $|\psi\rangle$ gegeben durch

$$W = \frac{1}{2}\mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi|.$$

2.1.4 Verschränkungsdetektion und Tests der Quantenmechanik mit Bell-Ungleichungen

In diesem Abschnitt wird aufgezeigt ², in welcher Weise die bloße Existenz bipartiter verschränkter Zustände zu einem tieferen Verständnis der Struktur der Quantenmechanik beitragen kann.

In der “orthodoxen” Quantenmechanik kommt der Wahrscheinlichkeitsinterpretation von Wellenfunktionen eine entscheidene Bedeutung zu. Damit verbunden ist, dass Messergebnisse von Observablen nicht mehr wie in der klassischen Physik mit Sicherheit vorausgesagt werden können, sondern prinzipiell nur noch Wahrscheinlichkeiten für Messwerte angegeben werden können. Dies kann als eine “Unschärfe” der jeweiligen quantenmechanischen Systeme interpretiert werden.

Es schließt sich direkt die Frage an, ob man vorstehende Interpretation akzeptiert oder die Theorie im Sinne des klassischen Determinismus abändern muss. Es muss somit geklärt werden, ob die Quantenmechanik vollständig oder unvollständig ist. Als vollständig würde man die Quantenmechanik bezeichnen, wenn die grundlegenden mathematischen Formulierungen, insbesondere die Schrödinger-Gleichung, alle Informationen enthält, die es über ein quantenmechanisch zu beschreibendes Objekt überhaupt gibt. Das bedeutet man bekommt die Beschreibung des Objektes so “scharf” wie es möglich ist. Durch diese Annahme nimmt man in Kauf, dass man die physikalische Wirklichkeit, also im Wesentlichen das Universum, selbst als “unscharf” akzeptiert. Entsprechend fasst man die quantenmechanische Theorie als unvollständig auf, wenn man unterstellt, dass es Informationen über quantenmechanische Objekte gibt, welche nicht durch den mathematischen Formalismus erfasst werden und dadurch nicht in der Theorie enthalten sind. Genauere, “schärfere” Beschreibungen der Objekte wären gemäß dieser These dann möglich, wenn man die zusätzlichen Informationen besäße. Folgt man dem Determinismus, so sind exakte Beschreibungen der Objekte in einer möglicherweise vollkommen “klaren” und “scharfen” Welt denkbar. Diese Frage wird nun im Folgenden mithilfe von Bell-Ungleichungen beantwortet und ergibt eine weitere Möglichkeit zur Verschränkungsdetektion.

Um den Sachverhalt zu klären, nehmen wir an, die Quantenmechanik sei unvollständig. Dann muss es sogenannte verborgene Parameter geben, die eben jener Information entsprechen, die uns zur Vervollständigung der Theorie fehlen. Wir betrachten nun zunächst ein Gedankenexperiment, in dem sich Alice und Bob einen bipartiten Zustand teilen, also jeder ein Teilchen des Zustandes besitzt. Alice kann auf ihrem Teilchen die Operatoren A_1 und A_2 messen, wohingegen Bob sein Teilchen einer Messung mit den Operatoren B_1 und B_2 unterwerfen kann. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass jede der vier Obser-

²Die folgenden Ausführungen orientieren sich an [2, 15, 16, 17]

vahlen nur zwei Messresultate +1 und -1 liefern kann. Den Erwartungswert einer M-fach ausgeführten gleichzeitigen Messung können wir direkt angeben:

$$\langle A_i B_j \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M a_i(k) b_j(k)$$

Hierbei sind a_i und b_j die jeweiligen Messergebnisse von A_i und B_j . Ferner kann dieses Ergebnis auch durch die jeweiligen Messwahrscheinlichkeiten p ausgedrückt werden, wenn wir folgende Schreibweise verwenden:

$$p(a_1^+, b_2^-) = p(a_1 = +1, b_2 = -1)$$

Damit folgt sodann:

$$\langle A_i B_j \rangle = p(a_i^+, b_j^-) - p(a_i^-, b_j^+) - p(a_i^+, b_j^-) + p(a_i^-, b_j^-)$$

Nun versuchen wir die Wahrscheinlichkeiten und Messresultate durch lokale verborgene Parameter zu beschreiben, d.h. in einem LHV-Modell³. In dieses Modell gehen zwei wichtige Annahmen ein:

1. Realismus: Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeiten für die Messergebnisse unabhängig davon sind, ob die Messung durchgeführt wird oder nicht.
2. Lokalität: Alices Messergebnis soll unabhängig davon sein, welche Messung Bob durchführt oder ob Bob überhaupt eine Messung durchführt.

Den kontinuierlichen lokalen verborgenen Parameter, von dem Messwahrscheinlichkeiten abhängen, bezeichnen wir mit λ . Für λ gehen wir von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\lambda)$ aus. Damit können wir folgenden Ansatz gewinnen [2, 15]:

$$p(a_i^\alpha, b_j^\beta) = \int d\lambda p(\lambda) f_\lambda(a_i^\alpha, b_j^\beta) = \int d\lambda p(\lambda) \chi_\lambda(a_i^\alpha) \cdot \eta_\lambda(b_j^\beta)$$

Hier wurde die Lokalität dadurch berücksichtigt, dass die Antwortfunktion $f_\lambda(a_i^\alpha, b_j^\beta)$ zu $\chi_\lambda(a_i^\alpha) \cdot \eta_\lambda(b_j^\beta)$ faktorisiert. Aus diesem LHV-Modell konnten Clauser und Horne eine Schranke für die Korrelationen angeben, die als Clauser-Horne-Ungleichung bezeichnet wird [13]:

$$p(a_1^-, b_1^-) + p(a_1^+, b_2^-) + p(a_2^-, b_1^+) - p(a_2^-, b_2^-) \geq 0 \quad (\text{CH-Ungleichung})$$

³LHV=local hidden variable

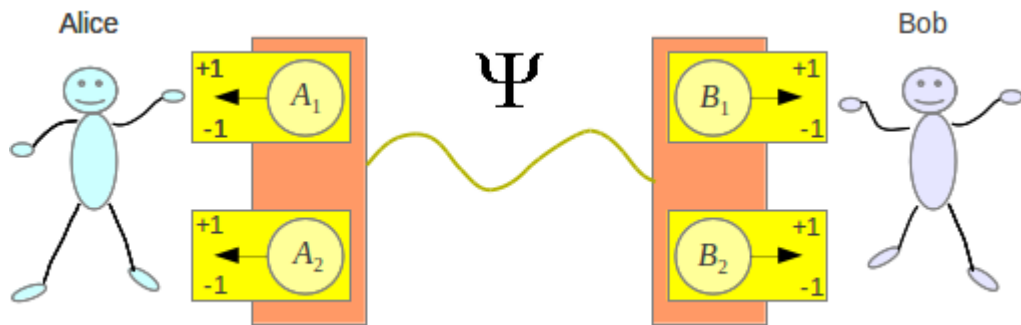


Abbildung 4: Illustration zur CHSH-Ungleichung

Ebenso kann man eine entsprechende Gleichung für die Erwartungswerte herleiten, die Clauser-Horne-Shimony-Holt-Gleichung [7]:

$$\langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle + \langle A_1 B_2 \rangle - \langle A_2 B_2 \rangle \leq 2 \quad (\text{CHSH-Ungleichung})$$

Die beiden vorstehenden Gleichungen sind Beispiele für sogenannte Bell-Ungleichungen. Diese Art von Ungleichungen sind immer dann erfüllt, wenn ein Modell mit lokalen verborgenen Parametern für die Messwahrscheinlichkeiten bzw. die Erwartungswerte existiert. Für die Herleitung dieser Gleichung wurde die Quantenmechanik nicht benutzt, lediglich die klassischen Annahmen von Realismus und Lokalität gehen ein. Das Gedankenexperiment kann auf die Quantenmechanik fortgesetzt werden, indem sich Alice und Bob den Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

teilen und folgende Messoperatoren definiert werden [15, 2]:

$$A_1 = -\sigma_x \quad A_2 = -\sigma_y \\ B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y) \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - \sigma_y)$$

In dieser Konstellation ergibt die CHSH-Ungleichung den Wert $2\sqrt{2}$, d.h. die Gleichung ist verletzt. Die Konsequenz davon ist, dass keine lokale und realistische Theorie mit der Quantenmechanik vereinbar ist.

Nun gibt es mehrere Möglichkeiten, die Modelle zu modifizieren, indem man entweder Realismus oder Lokalität weg lässt. Auf diese Variationen gehen wir hier nicht ein, sondern interpretieren die Verletzung von Bell-Ungleichungen. Gemäß der Annahme von

Realismus und Lokalität bedeutet eine Verletzung einer Bell-Ungleichung Nicht-Lokalität. In der Quantenmechanik bedeutet gerade dies nach den vorstehenden Abschnitten, dass der zugehörige Zustand verschränkt ist. Dies bedeutet aber auch, dass separierbare Zustände keine Bell-Ungleichung verletzen. Somit finden wir ein zusätzliches Kriterium, Verschränkung für einen gegebenen Zustand nachzuweisen: Man muss eine Bell-Ungleichung finden, die durch den Zustand verletzt wird. In dem Sinne kann eine Bell-Ungleichung auch als spezieller Verschränkungszeuge betrachtet werden, wobei es einen wichtigen Unterschied gibt:

Zwar verletzen für bipartite Systeme alle verschränkten reinen Zustände Bell-Ungleichungen, jedoch existieren gemischte Zustände, die keine Bell-Ungleichung verletzen [11, 41, 43]. Daher bieten sich in dieser Hinsicht eher Verschränkungszeugen an, da für jeden verschränkten Zustand ein solcher existiert und diese routinemäßig in photonischen Experimenten [10, 33, 35] oder spezieller als NMR-Verschränkungszeuge [12] implementierbar sind.

2.1.5 Anwendungen der bipartiten Verschränkung

Quantenteleportation

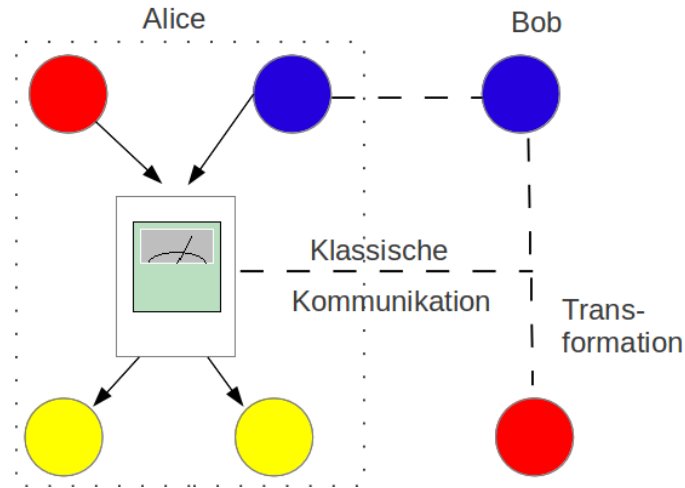


Abbildung 5: Schema der Quantenteleportation

Neben der Möglichkeit, die Quantenmechanik als fundamentale Theorie der Physik zu testen, stellt das Konzept der Verschränkung eine bedeutende Ressource für praktische Anwendungen in der Quanteninformationsübertragung dar.

Eine mögliche Anwendung von verschränkten Zuständen ist die Quantenteleportation [18, 22], deren Protokoll in Abbildung 4 schematisch dargestellt ist. Das Ziel einer solchen Quantenteleportation ist die Übertragung eines unbekanntes Quantenzustands zwischen zwei Parteien, Alice und Bob. Zu Beginn der Übertragung besitzen Alice und Bob jeweils ein Teilchen des verschränkten Zwei-Qubit-Zustandes

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

Zudem besitzt Alice das Qubit, dessen Zustand an Bob übermittelt werden soll. Da der Zustand dieses Teilchens im Allgemeinen unbekannt ist, kann er nur in aller allgemeinsten Form angegeben werden:

$$|\chi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Wichtig in diesem Zusammenhang sind die Bellzustände, welche wie folgt definiert sind [19]:

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$$

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$$

Nun kann der Gesamtzustand $|S\rangle = |\chi\rangle \otimes |\psi^-\rangle$ in der Basis der Bellzustände geschrieben

werden. Man erhält nach kurzer Rechnung [20]:

$$|S\rangle = \frac{1}{2} [|\phi^+\rangle_{TA}(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)_B + |\phi^-\rangle_{TA}(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_B] \\ + \frac{1}{2} [|\psi^+\rangle_{TA}(-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_B + |\psi^-\rangle_{TA}(-\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)_B]$$

Damit kann die Teleportation des Zustandes $|\chi\rangle$ in folgenden Schritten durchgeführt werden [20]:

1. Alice macht auf ihren Qubits T und A eine Bell-Messung, d.h. sie projiziert den Zustand ihrer Qubits auf einen der vier Bellzustände.
2. Das Resultat der Messung teilt sie Bob mithilfe klassischer Kommunikation mit.
3. Bob führt, abhängig von Alices Resultat, eine unitäre Transformation, repräsentiert durch die Paulimatrizen, auf seinen Qubit durch und kann den zu übermittelnden Zustand auf seinem Qubit erhalten.

Dieses Protokoll zeigt, dass es möglich ist, einen unbekanntem Quantenzustand ohne Materietransfer zu übertragen. Bei dieser Prozedur werden aufgrund des zweiten Schrittes 2 klassische Bits benötigt. Die Idee der Quantenteleportation geht auf C.H. Bennett et. al [20] aus dem Jahr 1993 zurück. Experimentell konnte die Quantenteleportation erstmals 1997 von Zeilinger et al. [20] in Form von photonischen Experimenten realisiert werden. Im Jahre 2004 konnte die Quantenteleportation erstmals mit Atomen durchgeführt werden [21].

Quantenkryptographie

Eine weitere Anwendung von bipartiter Verschränkung findet sich in der Quantenkryptographie. Die Quantenkryptographie ist eine Methode, um den sicheren Schlüsselaustausch zwischen zwei Kommunikationspartnern zu ermöglichen [26]. Dabei werden im Gegensatz zur klassischen Kryptographie die Eigenschaften quantenmechanischer Zustände gezielt verwendet.

Konkret ist das Hauptziel der Quantenkryptographie die Erzeugung von Zufallszahlen, mit denen dann eine Nachricht möglichst abhörsicher verschlüsselt werden kann. Als Beispiel für ein mögliches zielführendes Verfahren wird im folgenden das EPR- bzw. Ekert-Protokoll [23] beschrieben, welches 1991 von Artur Ekert vorgestellt worden ist und explizit Gebrauch von bipartit verschränkten Zuständen macht. Die Prozedur beginnt

mit zwei Parteien, Alice und Bob, die einen sicheren n-Bit-Schlüssel erzeugen wollen. Dazu steht ihnen eine EPR-Quelle zur Verfügung, welche den Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

aussendet und jeweils eines der beiden Qubits an Alice und Bob sendet. Alice und Bob wählen nun jeweils eine von drei möglichen komplanaren Achsen, um den Spin ihres Qubits in diese Richtung zu messen. Diese drei Basen werden durch Vektoren \vec{a} für Alice und \vec{b} für Bob beschrieben. O.B.d.A nehmen wir an, dass sich die Teilchen des Zustandes $|\psi\rangle$ in z-Richtung bewegen. Dann kann man die Vektoren \vec{a} und \vec{b} in der x-y-Ebene definieren. Als Referenzachse wählen wir die x-Achse und die Vektorkomponenten von \vec{a} und \vec{b} werden durch die Winkel beschrieben, die durch die Messrichtung jeweils mit der x-Achse eingeschlossen werden. Die Winkel bzw. Komponenten kann man z.B. wie folgt definieren [24]:

$$\begin{aligned} \phi_a^1 &= 0 & \phi_a^2 &= 45 & \phi_a^3 &= 90 \\ \phi_b^1 &= 45 & \phi_b^2 &= 90 & \phi_b^3 &= 135 \end{aligned}$$

Für den Messprozess bedeutet dies, dass sowohl Alice als auch Bob für jedes ankommende Teilchen eine Messrichtung, d.h. einen von drei möglichen Winkeln zufällig wählt, und den Spin in diese Richtung misst.

Gemäß der Definition ist klar, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob die gleiche Basis wählen, gerade gleich $\frac{1}{3}$ ist. In diesem Fall ist ebenfalls klar, dass, wenn Alice “spin-up” an ihrem Teilchen misst, Bob notwendigerweise “spin-down” als Messresultat erhalten muss und umgekehrt. In diesem Fall sind die Messresultate perfekt (anti)korreliert.

Interessanter ist der Fall, wenn die von Alice und Bob gewählten Basen nicht übereinstimmen. Wenn Alice ihr Qubit in einer beliebigen Basis misst und Bob in einer anderen, so ist Bobs Messresultat nicht mit Alices Ergebnis korreliert und daher komplett zufällig.

Die Idee des Protokolls ist nun folgende: Die Quelle sendet hintereinander den Zustand $|\psi\rangle$ aus. Jedes Mal messen Alice und Bob ihr jeweiliges Teilchen in einer der drei Basen. Anschließend geben sie über einen öffentlichen Kanal, z.B. ein Telefon, bekannt in welcher Basis sie jeweils gemessen haben. Mit Hilfe dieses klassischen Informationsaustausches “sieben” sie die Ereignisse, bei denen beide dieselbe Basis genommen haben, aus und verwerfen die anderen Ergebnisse. Innerhalb dieses “gesiebten” Schlüssels korrespondieren dann die “spin-up-” und “spin-down-Zustände” zu den Bitwerten 0 oder 1 und ergeben so einen komplett zufälligen Schlüssel.

Da nun die Erzeugung eines Schlüssels geglückt ist, muss festgestellt werden, inwiefern der erzeugte Schlüssel sicher ist. Dazu wird ein Lauschangriff durch eine ebenfalls fik-

tive Person Eve betrachtet. Im Prinzip kann Eve ein Teilchen, das von der Quelle zu Alice oder Bob gesendet wird, auslesen und ein anderes Teilchen weiter zur jeweiligen Person schicken. Das Auslesen durch Eve ist nichts anderes als eine Messung, der Quantenzustand ist danach also zerstört. Ihre Rekonstruktion des Zustands hängt auch von der von ihr gewählten Basis ab, denn das Ergebnis der Messung kann komplett zufällig sein. Schickt sie also einen rekonstruierten Zustand weiter zu Alice oder Bob und messen diese in derselben Basis, so kann Eve dadurch auffallen, dass die zu erwartende Antikorrelation ausbleibt. Dadurch würde das Zustandspaar verworfen und Eve gewinnt nichts an Information.

Am Elegantesten können Alice und Bob aber ihren Schlüssel mit einer Bell-Ungleichung überprüfen. Dafür können sie einfach den Korrelationskoeffizienten ihrer Messungen berechnen:

$$E(a_i, b_j) = P_{++}(a_i, b_j) + P_{+-}(a_i, b_j) - P_{-+}(a_i, b_j) - P_{--}(a_i, b_j)$$

Hierbei ist zum Beispiel $P_{+-}(a_i, b_j)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Messergebnis in Richtung a_i gleich +1 (“spin-up”) beträgt und in Richtung b_j gleich -1 (“spin-down”). Ferner kann man dann eine Größe S als die Summe aller Korrelationskoeffizienten definieren, bei denen Alice und Bob unterschiedliche Basen gewählt haben:

$$S = E(a_1, b_1) - E(a_1, b_3) + E(a_3, b_1) + E(a_3, b_3)$$

Mithilfe der CHSH-Ungleichung [16] gilt, dass

$$S = 2\sqrt{2}$$

unter der Annahme von Lokalität gelten muss. Haben Alice und Bob in unterschiedlichen Basen gemessen, können sie aus ihren Ergebnissen einen Wert für S berechnen. Durch einen Test der Bellschen Ungleichung kann ein etwaiger Abhörer entlarvt werden. Fällt dieser Test negativ aus, wird also die Bell-Ungleichung nicht verletzt, so liegt keine Verschränkung mehr vor. Dementsprechend muss ein Lauschangriff stattgefunden haben. Haben aber Alice und Bob dieselbe Basis verwendet, so erfolgt die Schlüsselgenerierung. Der entstehende Schlüssel wird als sogenanntes one-time-pad, d.h. als ein symmetrisches Einmal-Verschlüsselungsverfahren, verwendet. Dabei ist die Länge des vollständig zufälligen Codes genauso lang wie die zu übertragende Nachricht. Der große Vorteil dieses Verfahrens liegt in der nachweislichen informationstheoretischen Sicherheit und kann somit nicht von einem Unbefugten entziffert werden [25].

Die bipartite Verschränkung zeigt sich in diesem Beispiel als Schlüsselressource für zu-

künftige Verschlüsselungssysteme. Dass dieses Verfahren auch experimentell funktioniert konnte am 21. Oktober 2007 eindrucksvoll bewiesen werden, als bei den Schweizer Parlamentswahlen Daten aus den Wahllokalen aus dem Kanton Genf über 100 km in den Kanton Bern übertragen worden sind [14].

2.2 Tripartite Verschränkung

2.2.1 Motivation

Die Frage nach der Separabilität eines 2-Qubit-Zustandes kann mit dem PPT-Kriterium einfach entschieden werden, wodurch das Separabilitätsproblem für diese Art von Zuständen als gelöst aufgefasst werden kann. Nächstliegend drängt sich die Verallgemeinerung des Separabilitätsproblems für den Fall, dass ein 3-Qubit-Zustand vorliegt, auf. Zunächst ist jedoch unklar, was unter Separabilität und Verschränkung für diesen Fall überhaupt zu verstehen ist. Daher ist eine Klassifizierung von 3-Qubit-Zuständen wünschenswert, welche verschiedene Zustandsklassen voneinander abgrenzt.

2.2.2 Charakterisierung reiner und gemischter 3-Qubit-Zustände

Um ganz allgemein die Elemente einer Menge zu charakterisieren bzw. zu klassifizieren, definiert man auf dieser Menge eine Äquivalenzrelation. Man fasst also alle Elemente, die sich bezüglich eines Merkmals gleich verhalten, in einer Äquivalenzklasse zusammen. Nun gilt es zunächst eine geeignete Äquivalenzrelation für die reinen 3-Qubit-Zustände zu finden. Dabei kann man zum Beispiel daran denken, alle Zustandsvektoren, welche sich durch eine bestimmte Transformation ineinander überführen lassen, als eine Äquivalenzklasse zu definieren.

Eine naheliegende Möglichkeit für diese Transformationen sind die LOCC-Transformationen, die schon bei der bipartiten Verschränkung angesprochen worden ist. LOCC steht in diesem Zusammenhang für "local operations and classical communication" [8]. Die Definition dieser Transformationen kann sehr anschaulich motiviert werden. Dazu stellt man sich die Präparation ein beliebiges 3-Qubit-System in einem nicht notwendig bekannten Anfangszustand vor. Anschließend wird jedes der drei Qubits, welche man sich als konkrete Teilchen vorstellen kann, an jeweils eine von drei fiktiven Personen, welche in der Quanteninformatiionstheorie für gewöhnlich als Alice, Bob und Charlie bezeichnet werden, übergeben. Alice, Bob und Charlie besitzen nun jeweils ein Qubit und LOCC-Transformationen erlauben es nun jedem von ihnen, auf ihren eigenen Qubits jegliche Form von lokaler Operation auszuführen und untereinander über einen klassischen Kanal, z.B. über ein Telefon, zu kommunizieren [8, 30].

Nachdem nun die Definition der LOCC-Transformationen veranschaulicht worden ist,

muss festgelegt werden, in welcher Weise die Äquivalenzklassen definiert werden können. Ein erster Schritt dahin ist die Forderung, nur eine einzelne Kopie eines Repräsentanten einer Äquivalenzklasse zu betrachten. Die Verwendung von im Prinzip unendlich vielen Kopien führt zum Konzept der asymptotischen Äquivalenz und führt somit zu verschiedenen Äquivalenzklassen von Zuständen, jedoch ist dieses Konzept in Hinsicht auf Experimente, in denen LOCC-Transformationen tatsächlich ausgeführt werden, wegen der hohen Anzahl nötiger Zustandskopien nicht überzeugend [28].

Setzt man also nur eine Kopie eines Zustandes voraus, so ergibt sich durch LOCC-Transformationen jedoch ebenfalls ein nicht wünschenswertes Ergebnis. Selbst wenn man nur bipartite verschränkte Zustände betrachtet, so erhält man die einfache Aussage, dass zwei Zustände genau dann durch LOCC-Transformationen ineinander abgebildet werden können, wenn sie schon äquivalent unter lokalen unitären Abbildungen ist. Im Fall von 2 Qubits führt dies zu dem wichtigen Ergebnis, dass jeder bipartite, reine Zustand asymptotisch äquivalent zum EPR-Zustand ist [28].

Für 3 und mehr Qubits bedingt die Äquivalenz unter lokalen unitären Abbildungen durch die Parametrisierung der Transformationen überabzählbar viele Parameter und führt somit zwangsläufig zu unendlich vielen Äquivalenzklassen [28]. Um diesen unerwünschten Effekt zu umgehen, betrachteten Dür, Vidal und Cirac in [28] sodann nicht mehr LOCC-Transformationen, sondern SLOCC-Transformationen. Dies sind LOCC-Transformationen ohne garantierte Erfolgswahrscheinlichkeit [30, 31]. Damit konnten sie 3-Qubit-Zustände klassifizieren, indem sie alle Zustände, welche durch SLOCC-Transformationen ineinander überführt werden können, in Äquivalenzklassen zusammenfassten. Die Äquivalenz unter SLOCC-Transformationen, die auch stochastische Äquivalenz genannt wird, kann mathematisch wie folgt gefasst werden [28]:

Definition 4 (stochastische Äquivalenz). *Zwei 3-Qubit-Zustände $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ sind genau dann stochastisch äquivalent, wenn es invertierbare Operatoren A , B und C gibt sodass:*

$$|\psi\rangle = A \otimes B \otimes C|\phi\rangle \quad \text{und} \quad |\phi\rangle = A^{-1} \otimes B^{-1} \otimes C^{-1}|\psi\rangle$$

Mithilfe dieses Theorems konnten Cirac, Dür und Vidal in [28] zeigen, dass sich die reinen 3-Qubit-Zustände in genau 6 SLOCC-Äquivalenzklassen partitionieren lassen.

Die einfachste Äquivalenzklasse ist die Klasse der vollseparierbaren Zustände, welche mit S bezeichnet wird. Diese auch als Produktzustände bekannte Zustandsklasse ist dadurch gekennzeichnet, dass sich jeder Repräsentant als Tensorprodukt von reinen Zustandsvektoren aus den jeweiligen Untersystemen schreiben lässt. Benennt man die drei Untersysteme wieder mit A , B und C , so kann folgender Zustand als Prototyp für die

Produktzustände angegeben werden:

$$|\psi\rangle_B = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \quad (\text{Prototyp für Produktzustände})$$

Eine weitere Zustandsklasse erhält man, wenn nur zwei der drei Untersysteme untereinander verschränkt sind und der resultierende 3-Teilchen-Zustand als Tensorprodukt dieses bipartiten verschränkten Zustandes mit dem 1-Teilchen-Zustand des verbleibenden System geschrieben werden kann. Auf diese Weise entstehen drei neue Zustandsklassen, deren Elemente die biseparierbaren Zustände sind. Auch für diese Zustandsklassen können Prototypen angegeben werden:

$$|\psi\rangle_{A|BC} = |0\rangle_A (|0\rangle_B |1\rangle_C + |1\rangle_B |0\rangle_C) \quad (\text{Prototyp für (A)(BC)-biseparierbare Zustände})$$

$$|\psi\rangle_{B|AC} = |0\rangle_B (|0\rangle_A |1\rangle_C + |1\rangle_A |0\rangle_C) \quad (\text{Prototyp für (B)(AC)-biseparierbare Zustände})$$

$$|\psi\rangle_{C|AB} = |0\rangle_C (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B) \quad (\text{Prototyp für (C)(AB)-biseparierbare Zustände})$$

Das interessanteste Resultat dieser Partitionierung aller 3-Qubit-Zustände ist die Existenz zweier verschiedener Äquivalenzklassen für vollständig verschränkte Zustände. Hier gibt es zum einen Zustände, welche über SLOCC in den W-Zustand

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$$

transformiert werden können, zum anderen Zustände, bei denen die Transformation in den GHZ-Zustand

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|111\rangle + |000\rangle)$$

möglich ist. Natürlich sind die Namensgeber dieser beiden Klassen selbst Prototypen der jeweiligen Klassen an denen man die spezifischen Eigenschaften studieren kann. Zum Beispiel kann man sich davon überzeugen, dass es sich bei W- und GHZ-Zustand tatsächlich um unterschiedliche Formen von Verschränkung handelt, wenn man das Transformationsverhalten von Zuständen explizit hinschreibt. Jeder reine 3-Qubit-Zustand kann geschrieben werden als [29]:

$$|\psi_{GHZ}\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1 e^{i\theta}|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle$$

Dabei gilt:

$$\lambda_i \geq 0 \quad \sum_i \lambda_i^2 = 1 \quad \theta \in [0, \pi]$$

Ein Zustand der GHZ-Klasse, welche der Klasse aller physikalischen Zustände entspricht,

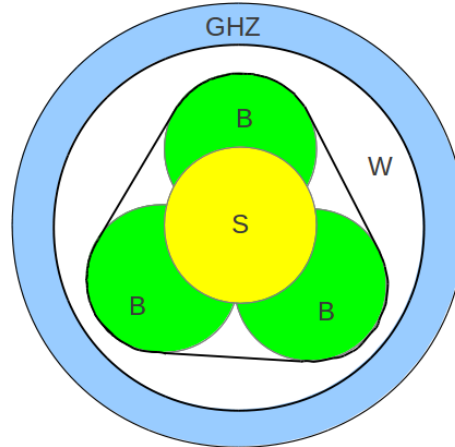


Abbildung 6: Zustandsklassen für gemischte 3-Qubit-Zustände

kann also durch die vorstehenden Gleichungen beschrieben werden. Die W-Klasse ist eine echte Untermenge der GHZ-Klasse. Jeder Zustand der W-Klasse kann als

$$|\psi_W\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle$$

geschrieben werden. Dementsprechend bilden die Menge der Zustände in der W-Klasse eine Menge vom Maß null innerhalb der GHZ-Klasse. Außerdem kann man für einen gegebenen Zustand der W-Klasse immer einen beliebig “nahen” Zustand in der GHZ-Klasse finden, indem man einen infinitesimalen λ_4 -Term zu diesem hinzufügt.

Nachdem nun die reinen 3-Qubit-Zustände klassifiziert worden sind, kann eine Verallgemeinerung auf gemischte Zustände erfolgen [29]. Dazu braucht man keine Äquivalenzklassen bezüglich Transformationen mehr zu betrachten, sondern bezieht sich vollkommen auf die Klassifizierung für den Fall reiner Zustände. Betrachtet wird also ein gemischter Zustand ρ . Die Idee für die Klassifizierung ist, dass sich ρ auf jeden Fall als konvexe Summe von Projektoren auf reine Zustände schreiben lässt [29]. Man ordnet nun ρ der Klasse S der separierbaren gemischten Zustände zu, wenn sich ρ als konvexe Summe von ausschließlich reinen separierbaren Zuständen schreiben lässt. Benötigt man neben den Projektoren auf reine separierbare Zustände auch noch Projektoren auf reine biseparierbare Zustände, so gehört ρ zur Klasse B der biseparierbaren gemischten Zustände. In analoger Weise gehört ρ zur Klasse W, wenn neben den Projektoren auf reine separierbare und biseparierbare Zustände auch noch mindestens ein reiner W-Zustand benötigt wird. Um zur größtmöglichen Klasse, der GHZ-Klasse, zu gehören, muss in der konvexen Zerlegung von ρ mindestens ein reiner GHZ-Zustand vorkommen.

Mit diesen Definitionen erhält man also letztendlich 4 verschiedene Verschränkungsklassen für gemischte 3-Qubit-Zustände. Aufgrund ihrer Definition sind alle Zustandsklassen

konvex und kompakt [29, 30, 42]. Außerdem sind sie ineinander eingebettet, denn es gilt:

$$S \subset B \subset W \subset GHZ$$

Dies folgt aus der Definition der Zustandsklassen für reine Zustände, aus der auch im gemischten Fall resultiert, dass die W-Klasse eine echte Teilmenge der GHZ-Klasse ist. Mit der Definition der Zustandsklassen ergibt sich die Frage, zu welcher Klasse ein gegebener reiner oder gemischter 3-Qubit-Zustand gehört. Im nächsten Abschnitt werden mögliche Entscheidungskriterien für diese Frage aufgezeigt.

2.2.3 Detektion tripartiter Verschränkung mit Verschränkungszeugen

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Detektion von 3-Qubit-Zuständen, die entweder der W- oder der GHZ-Klasse angehören, also vollständig verschränkt sind. Um diese Frage zu entscheiden, kann man sich analog zum bipartiten Fall wieder eines Verschränkungszeugen bedienen. Dieser ist im tripartiten Fall wie folgt definiert [9, 2, 8]:

Definition 5 (Verschränkungszeuge für tripartite Systeme). *Eine Observable W heißt Verschränkungszeuge, wenn*

$$\text{Tr}(W\rho_s) \geq 0 \quad \text{für alle biseparierbaren } \rho_s$$

$$\text{Tr}(W\rho_e) < 0 \quad \text{für wenigstens ein verschränktes } \rho_e$$

Entsprechend dem bipartiten Fall kann ein projektiver Verschränkungszeuge W für einen reinen, tripartiten verschränkten Zustand $|\psi\rangle$ mithilfe des maximalen Überlapps $\sqrt{\alpha}$ dieses Zustandes mit den biseparierbaren Zuständen konstruiert werden:

$$W = \alpha\mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi|$$

Hierbei gilt:

$$\alpha = \max \text{Tr}(\rho_{bs}|\psi\rangle\langle\psi|) = \max |\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

Die Interpretation von Verschränkungszeugen als Hyperebenen im Zustandsraum ist dieselbe wie im bipartiten Fall. Auch kann man sich per analogiam davon überzeugen, dass der oben konstruierte Verschränkungszeuge W tatsächlich die Anforderungen von Definition 5 erfüllt.

Als Beispiel geben wir den projektiven Verschränkungszeugen für den gemäß den Zustandsklassen verschränkten Zustand

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

an. Dieser lautet [2]:

$$W = \frac{1}{2}\mathbb{1} - |GHZ\rangle\langle GHZ|$$

Im Prinzip kann man durch die Charakterisierung der biseparierbaren Zustände somit für jeden verschränkten biseparierbaren Zustand einen Verschränkungszeugen konstruieren. In der Regel interessiert man sich jedoch für die Detektion der vollständig verschränkte Zustände, d.h. nur einer Teilmenge aller verschränkten Zustände. Das obige Kriterium basiert auf der Frage, ob ein gegebener 3-Qubit-Zustand biseparierbar ist oder nicht. Im Folgenden wird ein alternativer Ansatz motiviert.

2.2.4 PPT-Gemische im tripartiten Fall

Die allgemeine Form der biseparierbaren 3-Qubit-Zustände ergibt sich aus der Definition der Zustandsklasse [32, 33, 29]:

$$\rho^{bs} = p_1\rho_{A|BC}^{sep} + p_2\rho_{C|AB}^{sep} + p_3\rho_{B|AC}^{sep}$$

Die Klasse der biseparierbare Zustände ist numerisch und analytisch, vor allem mit Hinblick auf größere Qubitanzahlen, nur sehr schwer zu charakterisieren. Zur Detektion vollständig verschränkter Zustände bedient man sich deswegen nicht mehr der biseparierbaren Zuständen, sondern einer echt größeren Menge, den PPT-Gemischen. Die Zustände der PPT-Gemische sind in folgender Weise definiert [32, 33]:

$$\rho^{pmix} = p_1\rho_{A|BC}^{ppt} + p_2\rho_{C|AB}^{ppt} + p_2\rho_{B|AC}^{ppt}$$

An der Definition der PPT-Gemische erkennt man unmittelbar, dass sie die Menge der biseparierbaren Zustände enthält, denn jeder separierbare Zustand hat eine positive partielle Transposition. Dadurch bekommt man ein neues Kriterium für verschränkte Zustände, indem man die Frage klärt, ob ein gegebener Zustand ein PPT-Gemisch darstellt oder nicht. Offensichtlich kann man mit diesem Kriterium keine verschränkten Zustände detektieren, welche eine positive partielle Transposition besitzen, die sogenannten gebunden-verschränkten Zustände. Für die Detektion der “vollständig verschränkten” Zustände eignet sich das Kriterium jedoch vorzüglich, da diese Zustände negative partielle Transpositionen besitzen und somit klar kein PPT-Gemisch darstellen. Die PPT-Gemische bieten im Gegensatz zu den biseparierbaren Zuständen den Vorteil, dass sie mithilfe der konvexen Programmierung (s.u.) numerisch und analytisch behandelt werden können [32]. Zur Detektion von vollständig verschränkten Zuständen bieten sich im Formalismus der PPT-Gemische wieder Verschränkungszeugen an. Ursprünglich wurde ein Verschränk-

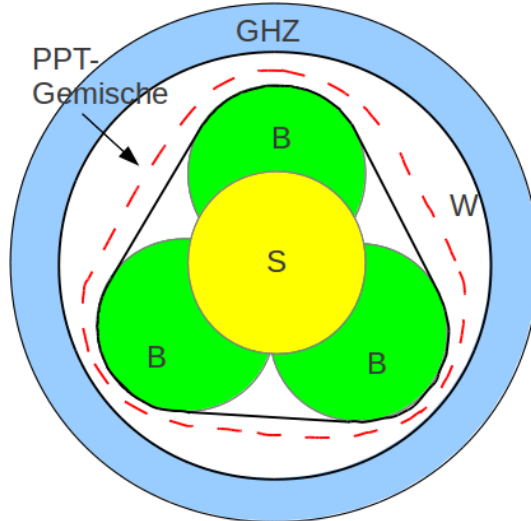


Abbildung 7: Gemischte biseparierbare Zustände als Einbettung in die PPT-Gemische

ungszeuge definiert als Observable, welche positive Erwartungswerte auf allen biseparierbaren Zustände besitzt und einen negativen Erwartungswert für mindestens einen verschränkten Zustand. Das neue Kriterium erweitert nun die Definition, indem gefordert wird, dass der Verschränkungszeuge positive Erwartungswerte auf allen PPT-Gemischen besitzt und mindestens einen negativen Erwartungswert für mindestens einen vollständig verschränkten Zustand.

Im weiteren Verlauf wird nur eine besondere Klasse dieser Verschränkungszeugen betrachtet, nämlich die Menge der vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen. Für einen vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen W existieren für jede Partition M positive Operatoren P_M und Q_M , sodass W die folgende Form besitzt [32, 9]:

$$W = P_M + Q_M^{T_M}$$

Hierbei steht M für die jeweilige Partition und T_M bezeichnet die partielle Transposition bezüglich dieser Partition. Explizit ausgeschrieben sehen die jeweiligen Zerlegungen des Verschränkungszeugen dann so aus:

$$\begin{aligned} W &= P_A + Q_A^{T_A} \\ &= P_B + Q_B^{T_B} \\ &= P_C + Q_C^{T_C} \end{aligned}$$

Der vollständig zerlegbare Verschränkungszeuge besitzt also drei verschiedene Zerlegungen in jeweils positive Operatoren. Ferner folgt daraus auch:

$$\begin{aligned} W &= P_{AB} + Q_{AB}^{TAB} \\ &= P_{AC} + Q_{AC}^{TAC} \\ &= P_{BC} + Q_{BC}^{TBC} \end{aligned}$$

Das folgende Theorem zeigt die Nützlichkeit der obigen Definition [32, 33]:

Theorem (Detektion von PPT-Gemischen). *Zu jedem Zustand ρ , der nicht als PPT-Gemisch dargestellt werden kann, existiert ein vollständig zerlegbarer Verschränkungszeuge, der ρ detektiert.*

Dieses Theorem, welches die Grundlage dieser Arbeit darstellt, ist recht einfach zu beweisen [32]. Die Menge der PPT-Gemische ist per Definition kompakt und konvex. Daher existiert aufgrund einer Folgerung aus dem Hahn-Bahn-Theorem einen Verschränkungszeuge, mit welchem Nicht-PPT-Gemische detektiert werden können. Darüber hinaus garantiert und erzwingt die Positivität des Verschränkungszeugen auf Zuständen mit positiver partieller Transposition die gewünschte Form des Verschränkungszeugen.

Diese speziellen Verschränkungszeugen werden sich als ein sehr effizientes Mittel zur Detektion von vollständig verschränkten Zuständen herausstellen. Im nächsten Abschnitt wird dargestellt, wie man die Definition dieser Verschränkungszeugen auf mehr als drei Teilchen verallgemeinern kann und wie man dann schließlich einen vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen für einen gegebenen Zustand konstruieren bzw. berechnen kann.

2.3 Verallgemeinerung auf beliebige Qubitsysteme

2.3.1 Zustandsklassen für N Qubits

Um Verschränkungsphänomene auch für mehr als drei Qubits betrachten zu können, ist zunächst eine zum tripartiten Fall analoge Partition der N -Qubit-Zustände in Äquivalenzklassen wünschenswert. Dabei beginnt man mit dem einfachsten Fall eines separierbaren Zustandes an. Ein reiner N -Qubit-Zustand $|\phi\rangle$ heißt separierbar, wenn er als

$$|\phi\rangle = \bigotimes_{i=1}^N |\alpha\rangle_i$$

geschrieben werden kann, d.h. als Produktzustand aus reinen Zustandsvektoren aller möglichen Parteien [2]. Entsprechend lassen sich die separierbaren gemischten N -Qubit-Zustände als konvexe Summe der separierbaren reinen Zustände definieren. So fortfahrend, kann man verschiedene Zustandsklassen definieren und wieder Äquivalenzklassen unter SLOCC-Transformationen bilden. Jedoch zeigt sich schon im Falle von 4 Qubits, dass dieses Verfahren zu unendlich vielen verschiedenen Zustandsklassen führt [28].

Um trotzdem eine Analogie zum tripartiten Fall herzustellen, kann man die gemischten biseparierbaren Zustände im allgemeinen Fall definieren als konvexe Summe über Dichtematrizen, die biseparierbar bezüglich beliebigen Partitionen sind [25]. Im Falle von 4 Qubits sieht diese Definition folgendermaßen aus:

$$\rho_4^{bs} = p_1 \rho_{AB|CD}^{sep} + p_2 \rho_{AC|BD}^{sep} + p_3 \rho_{BC|AD}^{sep} + p_4 \rho_{A|BCD}^{sep} + p_5 \rho_{B|ACD}^{sep} + p_6 \rho_{C|ABD}^{sep}$$

Die Verallgemeinerung auf höhere Qubitzahlen erfolgt analog.

Nun bleibt noch zu klären, was man im Falle einer beliebigen Qubitzahl N unter vollständig verschränkten Zuständen versteht. Auch hier bedient man sich wieder der Analogie zum tripartiten Fall, indem man die reinen vollständig verschränkten Zustände dadurch definiert, dass sie keinerlei separierbare Struktur besitzen, d.h. der Zustandsvektor faktorisiert bezüglich keiner vorhandenen Partition [25, 26]. Als Beispiel sei der 4-Qubit-Zustand

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}(|1110\rangle + |0111\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle)$$

genannt. Die Definition von vollständig verschränkten gemischten Zuständen geschieht wieder auf der Basis von konvexen Kombinationen von reinen vollständig verschränkten Zuständen. Auch hier tritt wieder die Schwierigkeit auf, dass die biseparierbaren Zustände, mithilfe deren man Verschränkungszeugen konstruieren könnte, analytisch nicht einfach zu fassen sind. Zwar kann man den maximalen Überlapp eines gegebenen ver-

schränkten Zustandes mit den biseparierbaren Zuständen ausrechnen und auf diese Weise einen projektiven Verschränkungszeugen erhalten, jedoch ist das zugehörige Maximierungsproblem meist nur numerisch durchführbar. Mit der Einführung von PPT-Gemischen im N -Qubit-Fall werden wir zeigen, dass wir geeignetere Verschränkungszeugen als die projektiven Verschränkungszeugen bestimmen können.

In Analogie zum tripartiten Fall gilt auch im allgemeinen Fall, dass man die gemischten biseparierbaren Zustände als konvexe Summe von Projektoren auf separierbare reine Zustände ersetzt durch die konvexe Summe von Projektoren auf Zustände mit positiver partieller Transposition. Für den 4-Qubit-Fall ergibt sich:

$$\rho_4^{bs} = p_1 \rho_{AB|CD}^{ppt} + p_2 \rho_{AC|BD}^{ppt} + p_3 \rho_{BC|AD}^{ppt} + p_4 \rho_{A|BCD}^{ppt} + p_5 \rho_{B|ACD}^{ppt} + p_6 \rho_{C|ABD}^{ppt}$$

Da das PPT-Kriterium in diesem Fall immer noch aussagt, dass alle biseparierbaren Zustände eine positive partielle Transposition haben, sieht man ein, dass die PPT-Gemische auch im Falle von beliebiger Qubitanzahl eine echte Obermenge zu den biseparierbaren Zuständen ist. Man kann zeigen [32], dass die PPT-Gemische sogar eine sehr gute Approximation zu den biseparierbaren Zuständen darstellen.

Der nächste Abschnitt soll sich mit der Detektion von vollständig verschränkten N -Qubit-Zuständen mithilfe von vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen befassen. Dazu werden die Definitionen des tripartiten Fall erweitert und eine Möglichkeit der numerischen Bestimmung dargestellt.

2.3.2 Vollständig zerlegbare Verschränkungszeugen im allgemeinen Fall

Die Definition der vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen zur Detektion vollständig verschränkter N -Qubit-Zustände schließt sich der dem 3-Qubit-Fall entsprechenden Idee unmittelbar an [9, 32].

Definition 6 (vollständig zerlegbarer Verschränkungszeuge im allgemeinen Fall). *Ein Verschränkungszeuge W heißt vollständig zerlegbar, wenn für jede beliebige Partition M positive Operatoren P_M und Q_M existieren, sodass*

$$W = P_M + Q_M^{T_M}$$

gilt.

Der Beweis für die Existenz eines solchen vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen kann aus dem tripartiten Fall übernommen werden, da die PPT-Gemische auch für eine beliebige Qubitanzahl kompakt und konvex ist.

Nach der Definition stellt sich die Frage, wie ein solcher spezieller Verschränkungszeuge

für einen gegebenen vollständig verschränkten N -Qubit-Zustand bestimmt werden kann. Die erste Antwort auf diese Frage kann rein numerisch gefunden werden. Dazu kann man ein Optimierungsproblem formulieren, das als Ausgabe den besten Verschränkungszeugen, der die Form aus Definition 6 hat, besitzt. Um dieses zu formulieren, müssen an den Verschränkungszeugen weitere Bedingungen gestellt werden.

Als erste Bedingung, die sowohl theoretisch wie experimentell wünschenswert ist, fordert man, dass der zu ermittelnde Verschränkungszeuge den vorgegebenen vollständig verschränkten Zustand möglichst optimal detektiert. Mit optimal verstehen wir gemäß der Definition eines Verschränkungszeugen, dass sein negativer Erwartungswert für den betrachteten Zustand betragsmäßig maximal ist.

Die zweite Bedingung ist die Forderung nach Eindeutigkeit. Dies ist bei diesem Optimierungsproblem notwendig, da man eine erhaltene Lösung dadurch "besser" machen kann, indem man sie einfach mit einer Zahl größer eins multipliziert. Um dies zu umgehen, kann man die Spur des Verschränkungszeugen gleich eins setzen.

Zusammengefasst suchen wir also für einen gegebenen verschränkten Zustand ρ einen optimalen, vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen mit Spur 1. Mathematisch lässt sich das Problem dann wie folgt fassen [32, 33]:

$$\begin{aligned} & \min \operatorname{Tr}(W\rho) \\ \text{unter den Bedingungen: } & 1. \operatorname{Tr}(W) = 1 \\ & 2. \text{ für alle Partitionen } M \text{ soll gelten:} \\ & W = P_M + Q_M^{T_M} \\ & P_M \geq 0, Q_M \geq 0 \end{aligned}$$

Die freien Parameter dieses Optimierungsproblems stecken sowohl in W als auch in den Operatoren P_M und Q_M . Ist das berechnete Minimum des Erwartungswertes negativ, so ist der getestete Zustand auf jeden Fall vollständig verschränkt. Ist der minimale Erwartungswert positiv, so ist keine Klassifikation möglich, da der Zustand ja trotzdem verschränkt, aber nicht vollständig verschränkt sein kann.

Das obige Verfahren kann man vereinfachen, indem man die Operatoren P_M gleich null setzt. Auf diese Weise erhält man die sogenannten vollständig positive Verschränkungszeugen, einen Spezialfall des vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen, welche von der Form

$$W = Q_M^{T_M} \quad \forall M$$

sind [32]. Vereinfacht man in der Weise, so nimmt man allerdings einen Qualitätsverlust in Form eines betragsmäßig geringeren Erwartungswertes zugunsten sinkender Komplexität bei der Implementierung und Lösung des Optimierungsproblems in Kauf. Dies ist vor-

allem darauf zurückzuführen, dass man im Fall des vollständig positiven Verschränkungszeugen weniger Parameter zur Verfügung hat, was sich zwar positiv auf die Komplexität der Optimierung, jedoch negativ auf die Qualität des Verschränkungszeugen auswirkt.

Das Auffinden eines vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen in Form eines Optimierungsproblems gehört in die Klasse der konvexen Programmierung bzw. Optimierung, welche in der numerischen Mathematik etabliert ist. Daher ist die große Anzahl an vorhandenen Algorithmen und entsprechender Software nicht verwunderlich. Das obige konvexe Problem konnte mit dem in MATLAB implementierten Programm PPT-mixer [32, 33] numerisch gelöst werden.

Im nächsten Abschnitt gehen wir auf die Grundlagen der konvexen Programmierung ein mit denen zum einen die numerische Lösung des Problems möglich sind, zum anderen aber auch eine wichtige Rolle für die analytischen Betrachtungen dieser Arbeit spielen.

2.3.3 Konvexe Optimierung

Das Gebiet der mathematischen Optimierung beschäftigt sich mit der Minimierung oder Maximierung einer skalaren Funktion einer oder mehrerer reeller Variablen, der sogenannten Zielfunktion [34, 36]. Dabei werden an die Variablen Bedingungen in Form von Gleichungen oder Ungleichungen gestellt, welche dann den Raum der möglichen Lösungen, den sogenannten Parameterraum, festlegen. Die zulässigen Lösungen, deren Gesamtheit mit M bezeichnet wird, werden jeweils durch Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ zusammengefasst, wobei N die Zahl der Variablen ist, welche in der zu optimierenden Zielfunktion auftreten. Ein Vektor $\vec{x}^* \in M$ heißt in diesem Zusammenhang optimal, wenn er unter allen Vektoren aus M den kleinsten oder größten Funktionswert der Zielfunktion ergibt, je nachdem ob eine Minimierung oder Maximierung angestrebt wird. Ein Optimierungsproblem wird klassifiziert nach den Eigenschaften der auftretenden Zielfunktion und den Nebenbedingungen [36].

In dieser Arbeit interessieren wir uns für konvexe Optimierungsprobleme, bei denen Zielfunktion und Nebenbedingungen konvexe Funktionen der Parameter sind. Zunächst soll der Begriff einer konvexen Funktion angegeben werden [35]:

Definition 7. *Konvexe Funktionen*

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ mit $\alpha + \beta = 1$ gilt:

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Ein allgemeines konvexes Optimierungsproblem für die Minimierung einer Zielfunktion

$f_0(\vec{x})$ kann dann formal wie folgt niedergeschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \min f_0(\vec{x}) \\ & \text{unter den Bedingungen: } f_i(\vec{x}) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Hierbei soll für die Funktionen f_0, \dots, f_m die Konvexitätsbedingung aus Definition 7 gelten. Ein besonders einfacher Spezialfall des konvexen Programms ergibt sich, wenn man nur lineare Funktionen für die Nebenbedingungen und die Zielfunktion zulässt. Auf diese Weise entsteht ein sogenanntes lineares Programm, das man z.B. mit dem Simplex-Algorithmus lösen kann [36].

Im Lichte der vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen sind semidefinite Programme interessant, welche im wesentlichen Modifikationen des linearen Programms darstellen und somit als spezielle konvexe Optimierungsprobleme erscheinen.

Ein semidefinites Programm hat die Minimierung einer linearen Funktion, welche von m Variablen abhängt, zum Ziel [34, 36]. Die Nebenbedingungen sind insofern von denen eines üblichen linearen Programms verschieden, als es sich im vorliegenden Fall um Matrixungleichungen handelt. Zur Formulierung eines semidefiniten Problems geben wir für die Zielfunktion $f(x)$ einen konstanten Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ vor, so dass

$$f(x) = \vec{c} \cdot \vec{x}$$

mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt von Vektoren geschrieben werden kann [34]. Die Nebenbedingungen sind durch eine Menge von $m+1$ symmetrischen Matrizen F_0, \dots, F_m definiert, welche zur Funktion

$$F(\vec{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i$$

kombiniert werden. Die Funktion $F(\vec{x})$ ist offensichtlich konvex, denn für $F(\vec{x}) \geq 0$ und $F(\vec{y}) \geq 0$ folgt sofort:

$$F(\lambda\vec{x} + (1 - \lambda)\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + (1 - \lambda)F(\vec{y}) \geq 0$$

Ein semidefinites Programm fordert nun die Minimierung der Funktion $f(\vec{x})$ unter der Bedingung, dass $F(\vec{x})$ positiv ist [34, 35, 36]. Unter der Positivität einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verstehen wir wieder die Positivität der Eigenwerte, gleichbedeutend mit

$$\vec{x} \cdot (A\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Schlussendlich hat ein semidefinite Programm folgende Form [34]:

$$\begin{aligned} & \min \vec{c} \cdot \vec{x} \\ & \text{unter der Bedingung: } F(\vec{x}) \geq 0 \end{aligned}$$

Mit dieser Problemdefinition kann die numerische Berechnung eines vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen als semidefinites Programm implementiert werden, denn die Berechnung des Erwartungswertes ist offensichtlich linear. Außerdem erfolgt die Minimierung über Zerlegungen über positive Operatoren, was im Wesentlichen den vorstehenden Matrixungleichungen entspricht. Die Bestimmung dieser Verschränkungszeugen ist somit im Prinzip effizient möglich.

2.4 Dicke-Zustände

2.4.1 Experimentelle Entdeckung und theoretische Beschreibung

Im Jahre 1954 betrachtete Robert H. Dicke ein System, genauer eine Wolke, aus Zwei-Zustands-Atomen, in dem Besetzungszahlinversion vorlag [30]. Da die Besetzungszahlinversion gleichbedeutend mit einer Abweichung vom thermischen Gleichgewicht ist, war die Abregung der angeregten Atome durch Photoemission a priori zu erwarten.

Man beobachtete im Experiment einen spontanen Übergang der invertierten 2-Zustands-Atome in den Grundzustand, wobei sich die Dauer des Überganges als umgekehrt proportional zur Gesamtanzahl der Atome im System herausstellte. Bei dem dokumentierten Übergang handelte es sich um das heute als superradiance bekannte Phänomen, also eine kollektive Abregung der invertierten Atome [40].

Aus theoretischer Sicht lässt sich das Verhalten des Gesamtsystems mithilfe der quantenmechanischen Störungsrechnung verstehen, denn die Dipolmatrixelemente für den kollektiven Übergang sind um den Faktor $\sqrt{n(N-n+1)}$ größer als das Dipolmatrixelement eines einzelnen Atoms [37]. Hierbei bezeichnet N die Gesamtanzahl der Atome im System und n die Anzahl der invertierten Atome. Dementsprechend kann man den Grund für die superradiance in der Korrelation zwischen den Atomen im System sehen.

Die Charakterisierung der atomaren Zustände gelang durch die Messung der Intensität des beim kollektiven Übergang ausgestrahlten Lichts. Dabei ergab sich, dass die Intensität der Strahlung als die unabhängiger Atome ist, wenn sich die Atome in bestimmten verschränkten Zuständen befinden.

Der experimentelle Befund bestätigte, dass sich die Intensität im Falle von unabhängigen Atomen proportional zur Gesamtzahl der Atome im System verhält, während die Intensität in den verschränkten Zuständen, den sogenannten Dicke-Zuständen, quadratisch in der Gesamtanzahl der Atome skaliert. In der Theorie werden die Dicke-Zustände definiert als die gemeinsamen Eigenzustände des Gesamtdrehimpulsquadrats J^2 und der Projektion des Gesamtdrehimpulses in z -Richtung J_z von mehreren gekoppelten Spin-1/2-Teilchen [44]. In der Quanteninformationstheorie sind in der Regel aber nur solche Dicke-Zustände interessant, welche sich unter Teilchenaustausch symmetrisch verhalten. Im folgenden verstehen wir unter den “Dicke-Zuständen” immer die symmetrischen Dicke-Zustände. Die Dicke-Zustände können mathematisch wie folgt formalisiert werden [2]:

Definition 8 (Dicke-Zustände).

$$|D_k^N\rangle = \binom{N}{k}^{-\frac{1}{2}} \sum_j P_j (|1\rangle^{\otimes k} \otimes |0\rangle^{\otimes N-k})$$

Dabei bezeichnet $\sum_j P_j(\dots)$ die Summe über alle möglichen Permutationen der Qubits, N ist die Gesamtzahl der Qubits und k die Anzahl der Anregungen. Neben der Permutationsinvarianz besteht zwischen den Dicke-Zuständen noch eine weitere interessante Symmetrie. Aus der Definition der Dicke-Zustände sieht man ein, dass ein Spin-Flip, repräsentiert durch σ_1 , auf jedem Qubit einen Dicke-Zustand in einen anderen Dicke-Zustand abbildet [39]. Es gilt :

$$|D_k^N\rangle \xrightarrow{\sigma_1^{\otimes N}} |D_{N-k}^N\rangle$$

Dies bedeutet, dass die Zustände $|D_k^N\rangle$ und $|D_{N-k}^N\rangle$ durch eine lokale unitäre Abbildung ineinander überführt werden können und daher bezüglich ihrer Verschränkung dieselben Eigenschaften haben:

$$|D_k^N\rangle \equiv_{LU} |D_{N-k}^N\rangle$$

Ferner interessant sind diejenigen Zustände mit nur einer Anregung. Diese speziellen Zustände heißen W-Zustände. Es gilt somit [2]:

Definition 9 (W-Zustände).

$$|W_N\rangle = |D_1^N\rangle$$

Die W-Zustände haben ihren Ursprung nicht nur in den oben genannten Experimenten, sondern tauchen bereits in der Theorie der kondensierten Materie bei der Untersuchung magnetischer Systeme auf, wo sie die Realisierung des ersten angeregten Zustands des Hamilton-Operators

$$H = - \sum_i J_{i,i+1} c_i^\dagger c_{i+1}$$

darstellen [38]. Dieser Hamiltonoperator entspricht dem Ising-Modell mit ausschließlich Nächster- Nachbar-Wechselwirkung ohne äußere Felder und beschreibt abhängig vom Vorzeichen der Kopplungskonstanten $J_{i,i+1}$ Ferromagnetismus (+) oder Antiferromagnetismus (-). Nach dieser theoretischen Einführung der Dicke-Zustände wird im nächsten Abschnitt kurz auf die experimentelle Herstellung von Dicke-Zuständen eingegangen sowie bisherige theoretische Ergebnisse zu deren Nachweis aufgeführt.

2.4.2 Experimentelle Erzeugung und Detektion von Dicke-Zuständen

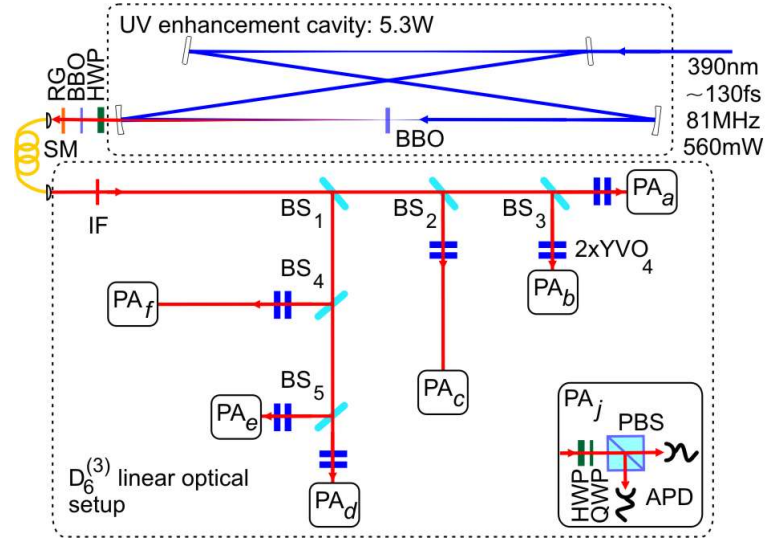


Abbildung 8: Experimenteller Aufbau zur Erzeugung des Zustandes $|D_3^6\rangle$ [41]

Symmetrische Dicke-Zustände sind auch in experimenteller Hinsicht auf mannigfache Weise interessant. Oftmals ist es in Vielteilchensystemen der Fall, dass symmetrische Dicke-Zustände in natürlicher Weise vorkommen, z.B. wenn der Anfangszustand ebenfalls symmetrisch ist und dessen Zeitentwicklung ebenfalls dieser Symmetrie folgt [37, 39]. Außerdem können anhand der Dicke-Zustände praktisch alle Eigenschaften von multipartiter Verschränkung experimentell untersucht werden. Als ein Beispiel für eine mögliche experimentelle Erzeugung des Dicke-Zustandes $|D_3^6\rangle$ betrachten wir den in Abbildung 8 gezeigten Versuchsaufbau [41].

Hier soll der Zustand $|D_3^6\rangle$ als photonischer Zustand mithilfe von vertikal und horizontal polarisierten Photonen erzeugt werden. Formal heißt das:

$$|D_3^6\rangle = \frac{1}{\sqrt{20}} \sum_i P_i |HHHVVV\rangle$$

Hierbei ist $\sum_i P_i$ wieder als Summe über alle Permutationen zu verstehen, die Ein-Photon-Zustände $|V\rangle$ und $|H\rangle$ kennzeichnen vertikal bzw. horizontal polarisierte Photonen.

Zu Beginn des Experiments werden vermitteltst spontaner parametrischer Fluoreszenz verschränkte Photonen erzeugt. Dies geschieht mithilfe eines 1 mm dicken β -Bariumborat-Kristalls (BBO), dessen nichtlineare Eigenschaften die Konversion von Photonen erlauben. In diesem Experiment spielt hierfür der Einsatz eines UV-Verstärkungsresonators mit dem optischen Pumpen des Kristalles mit intensiven Femtosekundenlaserpulsen eine entscheidene Rolle. Um Strahlverluste zu kompensieren, werden die erzeugten Photonen zunächst durch ein $\lambda/2$ -Plättchen und anschließend durch einen zweiten BBO-Kristall

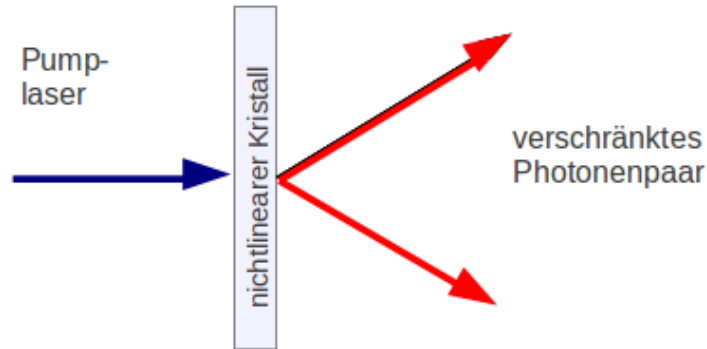


Abbildung 9: Prinzip der spontanen parametrischen Fluoreszenz

der Dicke 0,5 mm geleitet. Die Photonen werden anschließend an eine Monomodenfaser gekoppelt, wodurch die räumliche Mode der Photonen definiert wird. Die spektrale Selektion erfolgt mithilfe eines Bandpass- und einen Interferenzfilters. Es schließen sich polarisationsunabhängige Strahlteiler an mit unterschiedlichen Teilungsverhältnissen ($BS_1 - BS_4 : 0.58 : 0.42$, $BS_5 : 0.52 : 0.48$), deren Doppelbrechung durch einen Yttrium-Vanadium-Kristall (YVO_4) ausgeglichen wird. Die Zählrate für 6-Photon-Zustände ergab sich zu 3.7 Ereignissen pro Minute. Die eingehenden Photonen sind nun aus ihrer gemeinsamen anfänglichen räumlichen Mode auf 6 verschiedene Moden verteilt worden. Der Nachweis der Photonen erfolgt jeweils mithilfe eines $\lambda/2$ - und $\lambda/4$ -Plättchens (QWP), gefolgt von einem polarisationsabhängigen Strahlteilers. Schließlich werden die einzelnen Photonen unter Verwendung einer Lawinenphotodiode nachgewiesen.

Als Hauptfehlerquelle werden in [41] nichtlineare Prozesse höherer Ordnung bei der spontanen parametrischen Fluoreszenz genannt, wobei aufgrund der begrenzten Detektoreffizienz zwei der acht Photonen verloren gehen können und die restlichen sechs trotzdem nachgewiesen werden.

Nach der Messung muss nachgewiesen werden, dass die registrierten Photonzustände in der Tat verschränkt sind. Dies geschieht mit den schon mehrfach angesprochenen Verschränkungszeugen. Zunächst kann man feststellen, wie gut der Zustand $|D_3^6\rangle$ präpariert werden konnte. Ein Maß dafür ist die Güte (*fidelity*) F [49, 50], deren untere Schranke sich experimentell zu

$$F = \text{Tr}(|D_3^6\rangle\langle D_3^6|\rho_{exp}) = 0.654 \pm 0.024$$

ergab. Die Güte ist somit der Überlapp zwischen dem experimentell hergestellten Zustand ρ_{exp} und dem gewünschten Zustand. Ein Verschränkungszeuge kann aufgrund der Tatsache hergeleitet werden, dass die Dicke-Zustände Drehimpulseigenzustände sind. Man

kann den Verschränkungszeugen [43, 44, 55]

$$W_1 = \alpha \mathbb{1} - (J_x^2 + J_y^2)$$

mit den kollektiven Drehimpulsoperatoren J_x und J_y konstruieren mit ihrem maximalen Überlapp mit den biseparierbaren Zuständen $\alpha = 11.0179$. Theoretisch ergibt sich

$$\text{Tr}(W_1 |D_3^6\rangle\langle D_3^6|) = -0.9821$$

Im Experiment gemessen wurde:

$$\text{Tr}(W_1 \rho_{exp}) = -0.422 \pm 0.148$$

Mit dem Verschränkungszeugen W_1 kann somit die Verschränkung der präparierten Zustände eindeutig nachgewiesen werden.

Außerdem wurde auch noch ein anderer Verschränkungszeuge W_2 für dieselben Messdaten verwandt, bei dem höhere Momente der Drehimpulsoperatoren verwendet werden. Analytisch hat W_2 folgende Form:

$$W_2 = \frac{3}{2} \mathbb{1} - \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=1}^3 c_{ij} J_i^{2j}$$

Die Koeffizienten können aus [41] entnommen werden. Experimentell ergibt sich:

$$\text{Tr}(W_2 \rho_{exp}) = -0.105 \pm 0.040$$

Der Vorteil dieses Verschränkungszeugen liegt in dem sehr viel geringeren Messfehler und einer nur unwesentlich kleineren unteren Schranke an die Güte:

$$F = 0.642 \pm 0.016$$

Neben dem Nachweis multipartiter Verschränkung kann der Zustand $|D_3^6\rangle$ auch dazu verwendet werden, symmetrische Dicke-Zustände mit vier und fünf Teilchen durch projektive Messungen zu erzeugen.

Zusammengefasst kann man sagen, dass das beschriebene Experiment ein mächtiges Werkzeug zur Untersuchung multipartiter Verschränkung darstellt, wobei eine Verallgemeinerung des Aufbaus auf mehr als sechs Teilchen direkt möglich ist. Die Möglichkeit mit dem Aufbau auch hochgradig verschränkte Zustände mit weniger Teilchen erhalten zu können, stellt einen zusätzlichen Anreiz für neue und mehr Experimente dieser Form dar.

3 Detektion multipartiter Verschränkung mit optimierten Verschränkungszeugen

3.1 Problemstellung

Diese Masterarbeit hat die analytische Bestimmung von vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen zum Gegenstand. Im Theorieteil wurde ausführlich dargelegt, inwiefern diese Verschränkungszeugen numerisch, d.h. im wesentlichen unter Einsatz von Computern, bestimmt werden können. Dabei konnte mit Verweis auf weit entwickelte Algorithmen im Bereich der konvexen Optimierung begründet werden, warum die Berechnung der Verschränkungszeugen im Prinzip effizient möglich ist. Daher ist die Frage berechtigt, warum rein analytische Lösungen des Problems überhaupt notwendig sind. Eine erste Antwort auf diese Frage kann man finden, indem man die technischen Grenzen des Optimierungsproblems beachtet. Zwar kann man die möglichen Lösungsverfahren rein mathematisch im Sinne der Komplexitätstheorie als “effizient” oder “optimal” bezeichnen, dennoch kann man die jeweiligen Verschränkungszeugen praktisch nur bis zu einer Anzahl von circa 10 Qubits auf einem handelsüblichen PC effizient berechnen. Selbst bei entsprechendem Arbeitsspeicher ist die bei höheren Qubitanzahlen entstehende enorme Rechenzeit unbefriedigend. Dennoch können heute in Ionenfallen 10 und mehr Teilchen verschränkt werden, so dass Verschränkungszeugen für diese Fälle bereitgestellt werden müssen. Neben diesem rein praktischen Grund sprechen auch theoretische Gründe für die analytische Lösung des Problems. Hier ist vor allem anzuführen, dass die allgemeine Theorie für die vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen für Graphenzustände und speziell für Cluster-Zustände bereits weitgehend gelöst ist [33]. Dies zeigt, dass eine analytische Lösung eines solchen Problems möglich ist.

Das Ziel dieser Masterarbeit ist die Bestimmung von vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen, deren Verhalten bezüglich Quantenrauschen “optimiert” wird. Der Begriff des Quantenrauschens wird im nächsten Abschnitt erläutert.

3.2 Quantenrauschen

Der Begriff des Quantenrauschens [47] schließt sich dem des klassischen Rauschens unmittelbar an. Man hat also ein Szenario vorliegen, indem ein Experiment mit quantenmechanischen Teilchen durchgeführt wird.

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf den sogenannten depolarisierenden Kanal, das sogenannte weiße Rauschen [46]. Der Zustand des Qubit-Teilchens ohne Wechselwirkung wird durch eine Dichtematrix ρ beschrieben. Die Wechselwirkung mit der Umgebung wird nun dadurch modelliert, dass man annimmt, dass das Teilchen mit einer Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ von der Wechselwirkung W unberührt bleibt, jedoch mit einer Wahrscheinlichkeit p durch die Wechselwirkung durch den vollständig gemischten Zustand ersetzt wird. Formal bedeutet dies [46, 48]:

$$\rho \xrightarrow{W} \tilde{\rho} = (1 - p)\rho + \frac{p}{2}\mathbb{1} \quad (1)$$

Die Wirkung des depolarisierenden Kanals auf einen 1-Qubit-Zustand, welcher immer als Punkt auf einer Kugel im dreidimensionalen Raum repräsentiert werden kann, ist als Verformung der Blochkugel der ungestörten Zustände zu interpretieren [46].

Die Verallgemeinerung von Gleichung 1 auf N Qubits lautet [48, 46]:

$$\rho \xrightarrow{W} \tilde{\rho} = (1 - p)\rho + \frac{p}{2^N}\mathbb{1} \quad (2)$$

Dieses einfache Rauschmodell approximiert z.B. das tatsächlich vorhandene Rauschen in vielen Experimenten mit Photonen [45]. In diesem Sinne ist die Optimierung der Rauschtoleranz von Verschränkungszeugen in bezug auf weißes Rauschen wünschenswert.

Die Rauschtoleranz gibt in diesem Fall an, wie groß die Beimischung des vollständig gemischten Zustandes höchstens sein darf, damit der experimentell erzeugte Zustand von einem gegebenen Verschränkungszeugen noch detektiert werden kann. Dadurch wird eine Grenzwahrscheinlichkeit p_{max} für die in Gleichung 1 auftretende Wahrscheinlichkeit definiert, oberhalb derer der verrauschte Zustand nicht mehr als verschränkt detektiert werden kann.

Man gibt also einen verschränkten Zustand ρ und einen passenden Verschränkungszeugen W vor, der ρ detektiert. Der Wert für p_{max} , das Maß für die Rauschtoleranz von W , kann einfach ausgerechnet werden, indem man den Erwartungswert von W im verrauschten Zustand $\tilde{\rho}$ aus Gleichung 1 berechnet und dasjenige p bestimmt, bei dem dieser Erwartungswert gerade noch negativ ist.

Also soll

$$0 \geq \text{Tr}(W\tilde{\rho}) = (1-p) \cdot (\text{Tr}(W\rho)) + \frac{p}{2^N} \text{Tr}(W1) = p \left(-\text{Tr}(W\rho) + \frac{1}{2^N} \text{Tr}(W) \right) + \text{Tr}(W\rho)$$

gelten. Daraus folgt direkt:

$$p \leq \frac{-\text{Tr}(W\rho)}{-\text{Tr}(W\rho) + \frac{1}{2^N} \text{Tr}(W)} = \frac{1}{1 - \frac{\text{Tr}(W)}{2^N \text{Tr}(W\rho)}}$$

Damit ergibt sich die Grenzwahrscheinlichkeit p_{max} zu:

$$p_{max} = \frac{1}{1 - \frac{\text{Tr}(W)}{2^N \text{Tr}(W\rho)}} \quad (3)$$

Theoretisch wie experimentell ist natürlich das Ziel, möglichst viele Zustände mit einem einzigen Verschränkungszeugen detektieren zu können. Dazu muss zu einem gegebenen zu detektierenden Zustand ein von der Struktur her möglichst einfacher Verschränkungszeuge gefunden werden, dessen Rauschtoleranz möglichst groß wenn nicht maximal ist. Genau solche Verschränkungszeugen sollen in der vorliegenden Arbeit für W- und Dicke-Zustände bestimmt werden.

4 Optimierte Verschränkungszeugen für W-Zustände

In diesem Kapitel widmet sich der Bestimmung von optimierten Verschränkungszeugen für allgemeine W-Zustände. Hierbei wird das semidefinite Programm zunächst von Hand gelöst, bevor auf der Grundlage der Ergebnisse eine analytische Lösung hergeleitet wird. Im Anschluss daran erfolgt eine numerische Lösung des Problems, bevor schlussendlich beide Resultate bezüglich ihrer Rauschtoleranz verglichen werden.

4.1 Rekonstruktion numerischer Lösungen

Wie schon mehrfach erwähnt ist die Bestimmung eines vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen numerisch für kleine Teilchenzahlen prinzipiell möglich. Im Folgenden betrachten wir diese numerischen Lösungen für W-Zustände mit 3 und 4 Qubits, wobei wir uns auf vollständig positive Verschränkungszeugen der Form

$$W = Q^{T_M} \quad \forall M$$

beschränken. Gemäß Gleichung (3) sind die mit dem semidefiniten Programm berechneten Verschränkungszeugen aufgrund der Optimierung bei festgehaltener Spur auch die Verschränkungszeugen mit der höchsten Rauschtoleranz von der vorgegebenen Struktur. Durch Berechnung dieser Verschränkungszeugen wissen wir also letztendlich, welche Struktur die Verschränkungszeugen mit höchster Rauschtoleranz besitzen. Um analytische Ergebnisse herleiten zu können, besteht der erste Schritt darin, die numerischen Lösungen für 3 und 4 Qubits zunächst zu berechnen und die auftretenden Parameter analytisch zu bestimmen.

Beginnen wir also mit dem 3-Qubit-Fall und betrachten den W-Zustand

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle),$$

für den wir einen vollständig positiven Verschränkungszeugen W_3 suchen. Mithilfe des semidefiniten Programmes erhalten wir:

$$W_3 = \begin{pmatrix} 0.310 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.127 & 0 & -0.127 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.127 & 0 & 0 & -0.127 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.103 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.127 & -0.127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.103 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.103 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Verschränkungszeuge W_3 ist offenbar von folgender Struktur:

$$W_3 = \alpha|000\rangle\langle 000| - \beta|W\rangle\langle W| + \gamma(|001\rangle\langle 001| + Perm) + \delta(|011\rangle\langle 011| + Perm)$$

Hierbei bedeutet “+Perm” die Summe über alle Permutationen des vorstehenden Ausdruckes, z.B.

$$|001\rangle\langle 001| + Perm = |001\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 010|$$

In Matrixform sieht der parametrisierte Verschränkungszeuge wie folgt aus:

$$W_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma - \frac{\beta}{3} & -\frac{\beta}{3} & 0 & -\frac{\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{3} & \gamma - \frac{\beta}{3} & 0 & -\frac{\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{3} & -\frac{\beta}{3} & 0 & \gamma - \frac{\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei dem Verschränkungszeugen handelt es sich um eine Matrix, die formal einer Diagonalmatrix minus dem Projektor auf den W -Zustand gleicht und deren Beschreibung 4 Parameter α, β, γ und δ erfordert. Die Werte dieser Parameter kann man natürlich direkt aus der numerischen Lösungen bestimmen, die analytischen Ausdrücke hierfür folgen

aus der Struktur des Verschränkungszeugen. Der Verschränkungszeuge W_3 hat folgende Form:

$$W_3 = Q^{T_M} \quad \forall M$$

Daher gilt auch:

$$Q = W_3^{T_M} \geq 0 \quad \forall M$$

Die letzte Gleichung gilt, da der Operator Q per Definition positiv ist. Dadurch ist man nun in der Lage, das semidefinite Programm per Hand auszuführen. Wir minimieren also den Erwartungswert des Verschränkungszeugen W_3 unter den Bedingungen, dass alle partiellen Transpositionen positiv und die Spur des Verschränkungszeugen gleich 1 ist. Vor der Optimierung kann man sich allerdings überlegen, ob man wirklich alle partiellen Transpositionen berechnen muss. In der Tat reicht es im 3-Qubit-Fall aus, nur die partielle Transposition bezüglich des ersten Teilchens, welches mit A bezeichnet werde, zu berechnen. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass Q reell und symmetrisch ist. Die partielle Transposition des Verschränkungszeugen sieht in Matrixform so aus:

$$W_3^{T_A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{3} & -\frac{\beta}{3} & 0 \\ 0 & \gamma - \frac{\beta}{3} & -\frac{\beta}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{3} & \gamma - \frac{\beta}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma - \frac{\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q$$

Um die Positivität der vorstehenden Matrix sicher zu stellen braucht man nur deren Eigenwerte, die Parameterabhängigkeiten besitzen, auszurechnen und umzuformen. Man gelangt dann zu folgendem Optimierungsproblem, das es zu lösen gilt:

$$\text{Minimiere: } Tr(W_3|W\rangle\langle W|) = \gamma - \frac{2}{3}\beta$$

unter den Bedingungen:

$$Tr(W_3) = \alpha + 3\gamma - \beta + 3\delta = 1 \quad (\text{Spurbedingung})$$

$$\alpha\delta - \frac{2}{9}\beta^2 \geq 0$$

$$\gamma - \frac{1}{3}\beta \geq 0$$

$$\alpha \geq 0$$

$$\delta \geq 0$$

Die letzten vier Bedingungen stellen Umformungen der Eigenwerte dar und garantieren deren Positivität. Die Minimierung des Erwartungswert erfordert, dass

$$\gamma = \frac{1}{3}\beta$$

gesetzt wird. Das Problem vereinfacht sich dann zu:

$$\text{Minimiere: } -\frac{1}{3}\beta$$

unter den Bedingungen:

$$\alpha + \beta + 3\delta = 1 \quad (\text{Spurbedingung})$$

$$\alpha\delta - \frac{2}{9}\beta^2 \geq 0$$

$$\delta \geq 0$$

$$\alpha \geq 0$$

Aus der neuen Spurbedingung kann man sodann β zugunsten von α und δ eliminieren:

$$\beta = 1 - (3\delta + \alpha)$$

Die Bedingungen schreiben sich dann als:

$$\alpha\delta - \frac{2}{9}(1 - (3\delta + \alpha))^2 \geq 0$$

$$\delta \geq 0$$

$$\alpha \geq 0$$

Die obige Minimierung von $-\beta$ kann aufgefasst werden als Maximierung von β und damit als Minimierung von α und δ . Es verbleibt also eine Optimierungsproblem in zwei Variablen unter Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen sind zwar als Ungleichungen in das Problem eingegangen, dennoch optimieren wir auf einer kompakten Menge, wobei das Extremum am Rand angenommen wird. Daher bietet sich die Umformulierung in Gleichungen an, so dass das Problem mithilfe der üblichen Lagrangemultiplikatoren [60]

gelöst werden kann. Im Wesentlichen haben wir nur noch eine konkrete Nebenbedingung, folglich nur einen Lagrangeparameter λ für die Variablen. Die Positivität der Parameter geht in die Lagrangefunktion nicht ein, wir achten darauf explizit bei deren Bestimmung. Die Lagrangefunktion lautet demnach:

$$L = 1 - (3\delta + \alpha) - \lambda \left(\alpha\delta - \frac{2}{9} ((1 - (3\delta + \alpha))^2) \right)$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums ist das Verschwinden der Ableitung nach den jeweiligen Variablen α und δ :

$$L_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -1 - \lambda \left(\delta + \frac{4}{9} (1 - (3\delta + \alpha)) \right) = 0$$

$$L_\delta = \frac{\partial L}{\partial \delta} = -3 - \lambda \left(\alpha + \frac{4}{3} (1 - (3\delta + \alpha)) \right) = 0$$

Dieses Gleichungssystem gilt es zu lösen. Wir eliminieren den Parameter α durch Äquivalenzumformung folgendermaßen:

$$(-3)L_\alpha + L_\delta = \lambda(3\delta - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 3\delta$$

Dabei wurde im letzten Schritt verwendet, dass $\lambda \neq 0$ gilt. Dies ist berechtigt, da die Ableitungen L_α und L_β im Fall $\lambda = 0$ niemals verschwinden können und das Problem somit keine Lösung hätte. Übrig bleibt das Problem in der Variablen δ :

$$\text{Maximiere: } 1 - 6\delta$$

unter den Bedingungen

$$3\delta^2 - \frac{2}{9}(1 - 6\delta)^2 \geq 0,$$

$$\delta \geq 0.$$

Wir multiplizieren die Nebenbedingung aus und formen um:

$$0 \leq 3\delta^2 - \frac{2}{9}(1 - 6\delta)^2 = -5\delta^2 + \frac{8}{3}\delta - \frac{2}{9}$$

$$\Leftrightarrow \delta^2 + \frac{8}{15}\delta - \frac{2}{45} \leq 0$$

Wir suchen nun aufgrund der Maximierungsvorgabe das kleinstmögliche positive δ , welches die vorstehende Gleichung erfüllt. Diese beschreibt geometrisch eine nach oben geöffnete Parabel, sodass nur die größere der beiden Nullstellen in Frage kommt. Dementsprechend folgt:

$$\delta = \frac{4 - \sqrt{6}}{15} \approx 0,1033$$

Durch Rückeinsetzen in die während des Verfahrens sukzessive erhaltenen Beziehungen folgt für die restlichen Parameter

$$\alpha = \frac{4 - \sqrt{6}}{5} \approx 0,3101,$$

$$\beta = 1 - \frac{6(4 - \sqrt{6})}{15} \approx 0,3798,$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{6(4 - \sqrt{6})}{15} \right) \approx 0,1265.$$

Die analytische Aufklärung des Verschränkungszeugen erweist sich aufgrund seiner recht einfachen Struktur als effizient und übersichtlich durchführbar. Zum Vergleich betrachten wir den vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen \widetilde{W} für den 3-Qubit W-Zustand. Dieser ist durch

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} 0.2848 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1435 & -0.1397 & 0 & -0.1397 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1397 & 0.1435 & 0 & -0.1397 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0949 & 0 & 0.0237 & 0.0237 & 0 \\ 0 & -0.1397 & -0.1397 & 0 & 0.1435 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0237 & 0 & 0.0949 & 0.0237 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0237 & 0 & 0.0237 & 0.0949 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

numerisch gegeben, was man mithilfe von Projektoren als

$$\widetilde{W} = \alpha|000\rangle\langle 000| + \beta|W_3\rangle\langle W_3| + \gamma|D_2^3\rangle\langle D_2^3| + \delta(|100\rangle\langle 100| + Perm) + \epsilon(|110\rangle\langle 110| + Perm)$$

parametrisieren kann. Die Parameter selbst können mithilfe der zugehörigen Zerlegung

$$W = P_A + Q_A^{T_A}$$

bestimmt werden. Die Operatoren der Zerlegung sind durch

$$P_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0727 & -0.0689 & 0 & -0.0164 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0689 & 0.0727 & 0 & -0.0164 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0949 & 0 & 0.0237 & 0.0237 & 0 \\ 0 & -0.0164 & -0.0164 & 0 & 0.1435 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0237 & 0 & 0.0237 & -0.0119 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0237 & 0 & -0.0119 & 0.0237 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$Q_A = \begin{pmatrix} 0.2848 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1233 & -0.1233 & 0 \\ 0 & 0.0708 & -0.0708 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0708 & 0.0708 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0712 & 0.0356 & 0 \\ -0.1233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0356 & 0.0712 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Auch hier reicht die Betrachtung einer Partition wie im Falle der vollständig positiven Verschränkungszeugen aus. Wie man sieht, sind die Parameter des Verschränkungszeugen durch die Parametrisierung der Operatoren P_A und Q_A miteinander verknüpft. Für P_A sind sechs Parameter erforderlich, für Q_A fünf. Man bekommt in diesem Fall ein Optimierungsproblem in elf Unbekannten unter der Nebenbedingung, dass beide Operatoren positiv sein müssen. Das Problem lässt sich nur mit großem Aufwand rein analytisch lösen. Aus diesem Grund betrachten wir in dieser Arbeit, vor allem in Hinblick auf größere Teilchenzahlen, nur vollständig positive Verschränkungszeugen, bei denen man mit einer überschaubaren Anzahl von Parametern auskommt.

Auch im Falle von 4 Qubits kann der vollständig positive Verschränkungszeuge analytisch gefasst werden. Der W-Zustand ist hier durch

$$|W\rangle = \frac{1}{2} (|1000\rangle + |0100\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle),$$

gegeben und der Verschränkungszeuge wird durch eine 16×16 -Matrix repräsentiert. Aus Platzgründen geben wir die numerische Lösung mitsamt der an den 3-Qubit-Fall analogen

Struktur im Dirac-Formalismus an:

$$W_4 = 0,275|0000\rangle\langle 0000| - 0,225|W\rangle\langle W| + 0,169(|0001\rangle\langle 0001| + Perm) \\ + 0,046(|0011\rangle\langle 0011| + Perm)$$

Die Parametrisierung erfolgt entsprechend mit 4 Unbekannten:

$$W_4 = \alpha|0000\rangle\langle 0000| + \beta|W\rangle\langle W| + \gamma(|0001\rangle\langle 0001| + Perm) + \delta(|0011\rangle\langle 0011| + Perm)$$

Wieder muss dafür gesorgt werden, dass alle partiellen Transpositionen positiv sind. Wie im 3-Qubit-Fall müssen hier nicht alle partiellen Transpositionen berechnet werden. Man argumentiert analog, dass die partiellen Transpositionen bezüglich dem 1-Teilchen-System A und dem 2-Teilchen-System AC zum Beispiel ausreichend sind. Es sind nun die Eigenwerte der Matrizen $W_4^{T_A}$ und $W_4^{T_{AC}}$ in Abhängigkeit der Parameter zu berechnen. Für die Matrixformen der partiellen Transpositionen sei auf den Anhang A verwiesen. Aus den Eigenwerten dieser Matrizen gelangt man sodann zu folgenden Optimierungsproblem:

$$\text{Minimiere } Tr(W_4|W\rangle\langle W|) = \gamma + \frac{\beta}{2}$$

unter den Bedingungen

$$Tr(W_4) = \alpha + \beta + 4\gamma + 6\delta = 1 \quad (\text{Spurbedingung}), \\ \gamma + \frac{3}{4}\beta \geq 0, \\ \frac{1}{2}(\delta + \alpha) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\delta - \alpha)^2 + \beta^2} \geq 0, \\ \gamma \geq 0, \\ \delta \geq 0, \\ \alpha \geq 0.$$

Zur Minimierung setzt man $\gamma = -\frac{3}{4}\beta$ und eliminiert β mithilfe der Spurbedingung:

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha + 6\delta - 1)$$

Substitution in das Optimierungsproblem ergibt:

$$\text{Minimiere } Tr(W_4|W\rangle\langle W|) = -\frac{1}{8}(\alpha + 6\delta - 1)$$

unter den Bedingungen

$$\delta \geq 0,$$

$$\alpha \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\delta + \alpha) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\delta - \alpha)^2 + \frac{1}{4}(\alpha + 6\delta - 1)^2} &\geq 0, \\ \Leftrightarrow (\delta + \alpha)^2 - (\delta - \alpha)^2 - \frac{1}{4}(\alpha + 6\delta - 1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Das Problem ist damit auf die zwei Unbekannten α und δ reduziert worden. Somit können Lagrangemultiplikatoren zum Einsatz kommen, indem wir das Extremum wieder auf dem Rand vermuten. Die zugehörige Lagrangefunktion mit dem Multiplikator λ lautet:

$$L = -\frac{1}{8}(\alpha + 6\delta - 1) - \lambda \left((\delta + \alpha)^2 - (\delta - \alpha)^2 - \frac{1}{4}(\alpha + 6\delta - 1)^2 \right)$$

Die Ableitungen nach den beiden Variablen müssen simultan verschwinden:

$$L_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\frac{1}{8} - \lambda(2(\delta + \alpha) + 2(\delta - \alpha) - \frac{1}{2}(\alpha + 6\delta - 1)) = 0$$

$$L_\delta = \frac{\partial L}{\partial \delta} = -\frac{6}{8} - \lambda(2(\delta + \alpha) + 2(\delta - \alpha) - 3(\alpha + 6\delta - 1)) = 0$$

Dann folgt:

$$(-6)L_\alpha + L_\delta = \lambda(24\delta - 4\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 6\delta$$

Hier wurde aus denselben Gründen wie im 3-Qubit-Fall das Nichtverschwinden des Lagrangeparameters λ angenommen. Mit der erhaltenen Beziehung kann man das verbleibende Optimierungsproblem in der Unbekannten δ formulieren:

$$\text{Minimiere } Tr(W_4|W\rangle\langle W|) = -\frac{1}{8}(12\delta - 1)$$

$$\text{so dass: } \delta \geq 0$$

$$96\delta^2 \geq (12\delta - 1)^2$$

Also muss das größtmögliche positive δ gefunden werden, welches die Bedingungen erfüllt. Dieses ist wieder durch die Nullstelle der letzten Bedingung gegeben, also:

$$\delta = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{24}} \approx 0.04588$$

Resubstituiert man diesen Wert, so folgt unmittelbar:

$$\alpha = 6 \left(\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{24}} \right) \approx 0.27526,$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(12 \left(\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{24}} \right) - 1 \right) \approx -0.22474,$$

$$\gamma = -\frac{3}{8} \left(12 \left(\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{24}} \right) - 1 \right) \approx 0.16856$$

Für 3 und 4 Qubits ist die analytische Rekonstruktion der numerischen Lösungen allein mit der Forderung nach positiven partiellen Transpositionen möglich. Im Falle von 5 Qubits ergibt sich für den vollständig positiven Verschränkungszeugen analytisch folgende Struktur⁴:

$$\widetilde{W}_5 = D + \alpha|W_5\rangle\langle W_5| + \beta|D_{3,5}\rangle\langle D_{3,5}| + \gamma|D_{2,5}\rangle\langle D_{2,5}| + \delta|D_{4,5}\rangle\langle D_{4,5}| + \epsilon * g + \chi * h$$

$$h = |11\rangle\langle 11| \otimes |W_5\rangle\langle W_5| + Perm$$

$$g = |00\rangle\langle 00| \otimes |\overline{W}_5\rangle\langle \overline{W}_5| + Perm \text{ mit } |\overline{W}_5\rangle = |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle$$

Der Verschränkungszeuge besitzt eine deutlich kompliziertere Struktur. Zum einen treten, neben dem Projektor auf den W-Zustand und einem diagonalen Anteil D, noch Projektoren auf Dicke-Zustände mit 2 und 3 Anregungen auf. Zum anderen können die Beiträge der Terme g und h analytisch nicht begründet werden. Für eine analytische Rekonstruktion ist in diesem Fall problematisch, dass die auftretenden Parameter nicht alleine durch die Eigenwerte der partiellen Transpositionen festgelegt werden. Um dieses Problem zu umgehen, machen wir analog zum 3- und 4-Qubit-Fall für den W-Zustand

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|10000\rangle + |01000\rangle + |00100\rangle + |00010\rangle + |00001\rangle)$$

folgenden Ansatz für den vollständig positiven Verschränkungszeugen:

$$W_5 = \alpha|00000\rangle\langle 00000| + \beta|W\rangle\langle W| + \gamma(|00001\rangle\langle 00001| + Perm) + \delta(|00011\rangle\langle 00011| + Perm)$$

⁴Die Zahlenwerte der Parameter können dem Anhang B entnommen werden.

Vollkommen analog ergibt sich das zugehörige Optimierungsproblem. Wir fordern die Minimalität des Erwartungswertes

$$\text{Tr}(W_5|W\rangle\langle W|) = \gamma + \beta$$

sowie die Normiertheit des Verschränkungszeugen:

$$\alpha + 5\gamma + 10\delta + \beta = 1 \quad (\text{Spurbedingung})$$

Auch in diesem Fall genügt es, nur zwei partielle Transpositionen auszurechnen, wobei die Systeme A und AB gewählt werden. Aus der geforderten Positivität von W^{T_A} und $W^{T_{AB}}$ resultieren folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} \gamma &> 0 \\ \alpha &> 0 \\ \delta &> 0 \\ \gamma + \frac{4}{5}\beta &> 0 \\ \alpha\delta &> \frac{6}{25}\beta^2 \end{aligned}$$

Zur Minimierung setzen wir $\gamma = -\frac{4}{5}\beta$, substituieren dies in der Spurbedingung und lösen nach β auf:

$$1 = \alpha + 10\delta - 3\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}(-1 + \alpha + 10\delta)$$

Darüber hinaus wählen wir⁵:

$$\alpha\delta = \frac{12}{25}\beta^2$$

Also:

$$\alpha\delta = \frac{4}{75}(-1 + \alpha + 10\delta)^2$$

Die Zielfunktion in den Variablen α und δ erweist sich als:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{5}\beta = \frac{1}{15}(-1 + \alpha + 10\delta) \rightarrow \min$$

⁵Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da das Extremum auf dem Rand liegt.

Nun bilden wir die Lagrangefunktion L und suchen das Extremum auf dem Rand:

$$L = \frac{1}{15}(-1 + \alpha + 10\delta) - \lambda(\alpha\delta - \frac{4}{75}(-1 + \alpha + 10\delta)^2)$$

Die Ableitungen ergeben sich zu:

$$L_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{1}{15} - \lambda(\delta - \frac{8}{75}(1 - \alpha - 10\delta))$$

$$L_\delta = \frac{\partial L}{\partial \delta} = \frac{2}{3} - \lambda(\alpha - \frac{80}{75}(1 - \alpha - 10\delta))$$

Dann folgt:

$$L_\alpha + (-10)L_\delta = \lambda(10\delta - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 10\delta$$

Die verbleibende Bedingung ist dann:

$$0 \leq \delta^2 - \frac{8}{5}\delta + \frac{2}{75}$$

und daraus:

$$\delta_\pm = \frac{4 \pm \sqrt{15}}{5}$$

Beide Lösungen sind positiv, zur Optimierung wählen wir die größere Lösung:

$$\delta = \frac{4 - \sqrt{15}}{5}$$

Somit ergeben sich auch durch Rückeinsetzen die anderen Parameter:

$$\alpha = 10 \left(\frac{4 - \sqrt{15}}{5} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{3} \left(-1 + 20 \left(\frac{4 - \sqrt{15}}{5} \right) \right)$$

$$\gamma = -\frac{4}{15} \left(-1 + 20 \left(\frac{4 - \sqrt{15}}{5} \right) \right)$$

Der Erwartungswert nimmt folgenden Wert an:

$$Tr(W_5|W)\langle W|) = \frac{1}{15} \left(-1 + 20 \left(\frac{4 - \sqrt{15}}{5} \right) \right) \approx -0.0328$$

Aufgrund des negativen Erwartungswertes und der Positivität aller partiellen Transpositionen liegt somit tatsächlich ein Verschränkungszeuge vor. Wegen der festgehaltenen

Spur ist dieser auch der beste Verschränkungszeuge seiner Art in bezug auf die Rauschtoleranz.

Zum Abschluss dieses Kapitel diskutieren wir noch die Form der bestimmten Verschränkungszeugen. Diese Verschränkungszeugen enthalten neben dem Projektor auf den W -Zustand diagonale Elemente, die durch Projektoren auf keine, eine und zwei Anregungen ausgedrückt werden können. Dies kann auch intuitiv motiviert werden, denn bei der partiellen Transposition des Projektors auf den W -Zustand können keine anderen Terme auftreten. Obwohl die für den 5-Qubit-Zustand ermittelte Lösung für den vollständig positiven Verschränkungszeugen nicht die global optimale Lösung ist, verfolgen wir den obigen Ansatz weiter und werden im nächsten Abschnitt auf dieser Basis vollständig positive Verschränkungszeugen für W -Zustände beliebiger Qubitanzahl analytisch herleiten.

4.2 Analytische Bestimmung von optimierten Verschränkungszeugen

Auf den Ergebnissen der numerischen Rekonstruktion aufbauend, soll in diesem Abschnitt ein allgemeiner vollständig positiver Verschränkungszeuge für den W-Zustand mit beliebiger Qubitanzahl analytisch bestimmt werden. Hierfür verwenden wir den Ansatz:

$$W = \omega_0 \Pi_0 + \omega_1 \Pi_1 + \omega_2 \Pi_2 - |W_N\rangle\langle W_N| \quad (4)$$

Dabei bezeichnen Π_0 , Π_1 und Π_2 jeweils die Summe der Projektoren auf keine, eine oder zwei Anregungen. Im Falle von 3 Qubits gilt explizit:

$$\Pi_1 = |001\rangle\langle 001| + \text{Perm}$$

$$\Pi_2 = |011\rangle\langle 011| + \text{Perm}$$

$$\Pi_0 = |000\rangle\langle 000|$$

$|W_N\rangle\langle W_N|$ repräsentiert den Projektor auf den W-Zustand mit beliebiger Qubitanzahl N . Für die folgenden Rechnungen ist es zweckmäßig, die Schreibweise etwas zu vereinfachen. Im Projektor auf den W-Zustand kommt in jedem Vektor nur jeweils eine Anregung vor, sodass wir die Zustandsvektoren danach charakterisieren, an welcher Stelle diese Anregung steht. Ein beliebiger Zustandsvektor mit einer Anregung kann also als

$$|k\rangle, \quad k = 1, \dots, N$$

geschrieben werden. Zum Beispiel gilt $|1\rangle = |\dots 001\rangle$, wobei wir die Position der jeweiligen Anregung von rechts zählen.

Bei der partiellen Transposition werden aus den Termen mit einer Anregung Terme mit keiner oder mit zwei Anregungen. Die Schreibweise lässt sich bequem fortsetzen, indem man die Positionen beider Anregungen notiert, z.B.

$$|1, 3\rangle = |\dots 0101\rangle \quad \text{oder} \quad |0\rangle = |\dots 00\rangle$$

Mit dieser Vereinfachung schreibt sich der Ansatz für den Verschränkungszeugen wie folgt:

$$W = \omega_0 \Pi_0 + \left(\omega_1 - \frac{1}{N}\right) \Pi_1 + \omega_2 \Pi_2 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^N |k\rangle\langle j|$$

Dabei wurden schon die diagonalen Anteile des Projektors auf den W-Zustand von den nicht-diagonalen Teil separiert. Den diagonalen Anteil des Verschränkungszeugen bezeichnen wir im Folgenden mit D, sodass

$$W = D - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{k \neq j=1}^N |k\rangle\langle j|$$

Nun ist man in der Lage, die partiellen Transpositionen des Verschränkungszeugen zu berechnen. Wir beginnen mit der partiellen Transposition bezüglich des ersten Systems. Intuitiv ist klar, dass diese Terme im nicht-diagonalen Anteil nur auf Terme wirkt, bei denen die Belegung auf den ersten System unterschiedlich ist. Dementsprechend gilt:

$$\begin{aligned} W^{T_1} &= \omega_0 \Pi_0 + (\omega_1 - \frac{1}{N}) \Pi_1 + \omega_2 \Pi_2 - \left(\sum_{k=1}^N \sum_{k \neq j=1}^N |k\rangle\langle j| \right)^{T_1} \\ &= D - \frac{1}{N} \left(\sum_{j \neq 1} |1\rangle\langle j| \right)^{T_1} - \frac{1}{N} \left(\sum_{k \neq 1} |k\rangle\langle 1| \right)^{T_1} - \frac{1}{N} \sum_{k \neq 1} \sum_{k \neq j \neq 1} |k\rangle\langle j| \\ &= D - \frac{1}{N} \sum_{j \neq 1} |0\rangle\langle 1, j| - \frac{1}{N} \sum_{k \neq 1} |1, k\rangle\langle 0| - \frac{1}{N} \sum_{k \neq 1} \sum_{k \neq j \neq 1} |k\rangle\langle j| \\ &= \omega_0 \Pi_0 + (\omega_1 - \frac{1}{N}) \Pi_1 + \omega_2 \Pi_2 - \frac{1}{N} \sum_{j \neq 1} |0\rangle\langle 1, j| - \frac{1}{N} \sum_{k \neq 1} |1, k\rangle\langle 0| - \frac{1}{N} \sum_{k \neq 1} \sum_{k \neq j \neq 1} |k\rangle\langle j| \end{aligned}$$

Offenbar entstehen durch die partielle Transposition Mischterme von null und zwei Anregungen, deren Anzahl gleich N ist. Außerdem bleiben diejenigen nicht-diagonalen Terme übrig, auf welche die partielle Transposition nicht wirkt. Deren Anzahl ist nach vorstehender Gleichung N-1. Für den Fall von drei Qubits sieht die Matrix dann so aus:

$$W^{T_3} = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 - \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 - \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \omega_1 - \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix kann durch elementare Zeilenumformungen auf Blockdiagonalform gebracht werden:

$$W^{T_3} = \begin{pmatrix} \omega_0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 - \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 - \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \omega_1 - \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Um die Positivität zu sichern, muss man lediglich für die Positivität der einzelnen Blöcke sorgen, da diese jeweils auf einen echten Unterraum wirken. Nach der obigen Abzählung der Terme ergeben sich für allgemeines N folgende Bedingungen für die Positivität von W^{T_1} :

$$\omega_2 > 0,$$

$$\omega_1 > \frac{N-1}{N},$$

$$\omega_0 \omega_2 > \frac{N-1}{N^2},$$

$$\omega_0 > 0$$

Nun berechnen wir $W^{T_{1,2}} = (W^{T_1})^{T_2}$:

$$\begin{aligned} W^{T_{1,2}} &= D - \left(\frac{1}{N} \sum_{j \neq 1} |0\rangle\langle 1, j| \right)^{T_2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{k \neq 1} |1, k\rangle\langle 0| \right)^{T_2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{k \neq 1} \sum_{k \neq j \neq 1} |k\rangle\langle j| \right)^{T_2} \\ &= D - \frac{1}{N} |2\rangle\langle 1| - \frac{1}{N} \sum_{j \neq 1, 2} |0\rangle\langle 1, j| - \frac{1}{N} |1\rangle\langle 2| - \frac{1}{N} \sum_{k \neq 1, 2} |1, k\rangle\langle 0| \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{k \neq 1, 2} \sum_{k \neq j \neq 1, 2} |k\rangle\langle j| - \left(\frac{1}{N} \sum_{k \neq 1, 2} |k\rangle\langle 2| \right)^{T_2} - \left(\frac{1}{N} \sum_{k \neq j \neq 1, 2} |2\rangle\langle j| \right)^{T_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D - \frac{1}{N} \sum_{j \neq 1,2} |0\rangle\langle 1, j| - \frac{1}{N} \sum_{k \neq 1,2} |1, k\rangle\langle 0| - \frac{1}{N} \sum_k \sum_{k \neq j} |k\rangle\langle j| \\
&\quad - \frac{1}{N} \sum_{k \neq 1,2} |2, k\rangle\langle 0| - \frac{1}{N} \sum_{k \neq j \neq 1,2} |0\rangle\langle 2, j|
\end{aligned}$$

Auch hier tauchen nur Blöcke mit gemischten Anregungen sowie von der partiellen Transposition unberührte Terme auf. Dementsprechend ändert sich nur die Größe der jeweiligen Blöcke in den Blockmatrizen. Die zusätzlich zu erfüllenden Positivitätsbedingungen sind

$$\omega_2 > 0,$$

$$\omega_1 > \frac{2}{N},$$

$$\omega_0 \omega_2 > \frac{1}{N},$$

$$\omega_0 > 0.$$

Als letzten konkreten Fall berechnen wir $W^{T_{1,2,3}} = (W^{T_{1,2}})^{T_3}$

$$\begin{aligned}
W^{T_{N,N-1,N-2}} &= D - \frac{1}{N} \left(|1\rangle\langle 3| + \sum_{k \neq 1,2,3} |1, k\rangle\langle 0| + |3\rangle\langle 1| + \sum_{j \neq 1,2,3} |0\rangle\langle 1, j| \right) \\
&\quad - \frac{1}{N} \left(\sum_{k \neq 1,2,3} |2, k\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 3| + \sum_{j \neq 1,2,3} |0\rangle\langle 2, j| + |3\rangle\langle 2| \right) \\
&\quad - \frac{1}{N} \left(\sum_{j \neq 1,2,3} |0\rangle\langle 3, j| + \sum_{k \neq 1,2,3} |3, k\rangle\langle 0| + \sum_{k \neq j, k, j \neq 1,2,3} |k\rangle\langle j| \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D - \frac{1}{N} \left(\sum_{k \neq 1,2,3} |1, k\rangle \langle 0| + \sum_{j \neq 1,2,3} |0\rangle \langle 1, j| \right) - \frac{1}{N} \left(\sum_{k \neq 1,2,3} |2, k\rangle \langle 0| + \sum_{j \neq 1,2,3} |0\rangle \langle 2, j| \right) \\
&\quad - \frac{1}{N} \left(\sum_{j \neq 1,2,3} |0\rangle \langle 3, j| + \sum_{k \neq 1,2,3} |3, k\rangle \langle 0| + \sum_{k \neq j} |k\rangle \langle j| \right) \\
&= \omega_0 \Pi_0 + \left(\omega_1 - \frac{1}{N} \right) \Pi_1 + \omega_2 \Pi_2 \\
&\quad - \frac{1}{N} \left(\sum_{k \neq 1,2,3} |1, k\rangle \langle 0| + \sum_{j \neq 1,2,3} |0\rangle \langle 1, j| \right) - \frac{1}{N} \left(\sum_{k \neq 1,2,3} |2, k\rangle \langle 0| + \sum_{j \neq 1,2,3} |0\rangle \langle 2, j| \right) \\
&\quad - \frac{1}{N} \left(\sum_{j \neq 1,2,3} |0\rangle \langle 3, j| + \sum_{k \neq 1,2,3} |3, k\rangle \langle 0| + \sum_{k \neq j} |k\rangle \langle j| \right)
\end{aligned}$$

Aus den drei berechneten partiellen Transpositionen kann man auf die Struktur des Verschränkungszeugen im allgemeinen Fall schließen. Im Falle des Parameters ω_1 folgt unmittelbar, dass die in W^{T_1} bestimmte Beziehung

$$\omega_1 > \frac{N-1}{N}$$

gelten muss. $\frac{N-1}{N}$ stellt nämlich den maximalen Überlapp des W-Zustandes mit den bisepariablen Zuständen dar und ist daher die kleinstmögliche Wahl für ω_0 , sodass noch ein Verschränkungszeuge vorliegt. Die Wahl ist in diesem Fall eindeutig, da ω_1 nicht durch Gleichungen bzw. Ungleichungen an die anderen Parameter gekoppelt ist.

Für die beiden anderen Parameter ω_0 und ω_1 beobachtet man auf Basis der erhaltenen Ergebnisse:

$$\omega_0 - \frac{1}{\omega_2 N^2} k(N-k) \geq 0$$

Hierbei ist k die Anzahl der transponierten Systeme. Für $k = 1, 2$ oder 3 werden offenbar obige Bedingungen reproduziert. Die vorstehende Beobachtung folgt einzig und allein durch Abzählen und Bestimmung der Blockgrößen. Die Bedingung kommt dann durch die Anzahl der Einträge $-\frac{1}{N}$ zu stande. Es folgt, dass die Anzahl A dieser Einträge folgendermaßen von der Zahl der transponierten Systeme k abhängt:

$$kN - k^2 = A$$

Hieraus kann man schließen, für welches k die Anzahl maximal wird bzw. welche partielle Transposition die dominante ist. Dazu bringt man die erste Ableitung zum Verschwinden:

$$\frac{\partial A}{\partial k} = N - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{N}{2}$$

Der größte Block entsteht also, wenn $k = \frac{N}{2}$ ist. Dadurch kann man die Beziehung zwischen ω_0 und ω_2 allgemein schreiben:

$$\omega_0 - \frac{1}{\omega_2} \frac{1}{4} \geq 0$$

Wir fassen nun nochmal alle Ergebnisse für den Verschränkungszeugen zusammen:

$$\omega_1 \geq 0$$

$$\omega_0 \geq 0$$

$$\omega_2 \geq 0$$

$$\omega_1 \geq \frac{N-1}{N}$$

$$\omega_0 \omega_2 \geq \frac{1}{4}$$

Nun soll die Rauschtoleranz dieser Klasse von Verschränkungszeugen optimiert werden. Dazu wird zunächst die Grenzwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der drei Parameter berechnet.

Es sei $\rho = |W\rangle\langle W|$ die Dichtematrix des W -Zustandes. Dann ist durch den depolarisierenden Kanal verrauschte Zustand $\tilde{\rho}$ gegeben durch:

$$\tilde{\rho} = (1-p)\rho + \frac{p}{2^N} \mathbb{1}$$

Der Erwartungswert des Verschränkungszeugen im verrauschten Zustand ist dann:

$$\begin{aligned} \text{tr}(W\tilde{\rho}) &= (1-p)\text{tr}(W\rho) + \frac{p}{2^N}\text{tr}(W) \\ &= (1-p)(\omega_1 - 1) + \frac{p}{2^N}(\omega_0 + N\omega_1 + \binom{N}{2}\omega_2 - 1) \\ &= \omega_1 - 1 - p(\omega_1 - 1) + \frac{p}{2^N}(\omega_0 + N\omega_1 + \binom{N}{2}\omega_2 - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Grenzwahrscheinlichkeit p_{max} zu:

$$p_{max} \leq \frac{(1 - \omega_1)}{\frac{1}{2^N} (\omega_0 + N\omega_1 + \binom{N}{2}\omega_2 - 1) + 1 - \omega_1}$$

Diesen Ausdruck gilt es für die Parameter ω_0, ω_1 und ω_2 unter Berücksichtigung der an diese gestellten Bedingungen zu maximieren. Dies kann man erreichen, wenn man den Zähler möglichst groß, den Nenner möglichst klein wählt. Der Zähler wird dann möglichst groß, wenn ω_1 möglichst klein ist. Daher wählt man

$$\omega_1 = \frac{N - 1}{N}$$

Nun hat man nur noch den Nenner K zu minimieren. Setzt man den Ausdruck für ω_1 dort ein, so hat man folgendes Optimierungsproblem zu lösen:

$$\text{Minimiere } K = \omega_0 + \binom{N}{2}\omega_2 + N - 2$$

sodass

$$\omega_0\omega_2 = \frac{1}{4N}$$

Wir lösen die vorstehende Gleichung nach ω_0 auf und setzen dies in die Zielfunktion ein. Damit ist folgender Ausdruck zu minimieren:

$$K = \omega_0 + \binom{N}{2} \frac{1}{4N\omega_0}$$

Die Lösung findet man durch Differenzieren des Ausdruckes nach ω_0 und Aufsuchen der Nullstelle:

$$\frac{\partial K}{\partial \omega_0} = 1 - \binom{N}{2} \frac{1}{4N\omega_0^2} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\binom{N}{2} \frac{1}{4N}} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{N\binom{N}{2}}}$$

Der optimierte Verschränkungszeuge hat demnach die folgende analytische Struktur:

$$W = \sqrt{\binom{N}{2} \frac{1}{4N}} \Pi_0 + \frac{N - 1}{N} \Pi_1 + \frac{1}{\sqrt{N\binom{N}{2}}} \Pi_2 - |W_N\rangle\langle W_N|$$

Die Rauschtoleranz ergibt sich dann zu

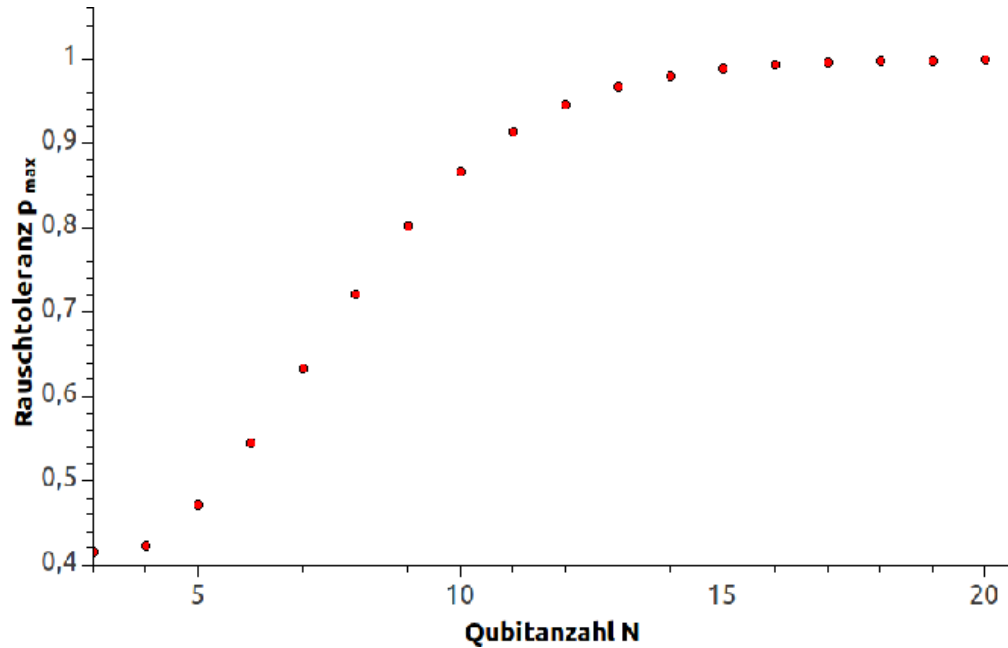


Abbildung 10: Maximale Rauschtoleranz p_{max} des optimierten Verschränkungszeugen in Abhängigkeit von der Qubitanzahl N im Bereich von 3 bis 20 Qubits

$$p \leq \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{2^N} \left(2\sqrt{\binom{N}{2} \frac{1}{N}} + N - 1 \right) + \frac{1}{N}} = \frac{1}{\frac{N}{2^N} \left(2\sqrt{\binom{N}{2} \frac{1}{N}} + N - 1 \right) + 1}$$

und ist in Abbildung 10 für kleine Qubitanzahlen gezeigt.

Für praktische Zwecke ist aber nicht die Rauschtoleranz allein ausschlaggebend. Daneben ist noch die Anzahl der nötigen lokalen Messungen für die Durchführung des Experiments von Interesse. Dementsprechend wird eine Entwicklung des Verschränkungszeugen W in eine geeignete Messbasis im N -Qubit-Operatorraum benötigt, deren Entwicklungsterme als lokale Messungen interpretiert werden können. Im engeren Sinne versteht man unter einer lokalen Messung eine Observable M der Form [50]

$$M = \sigma_k \otimes \sigma_k \otimes \cdots \otimes \sigma_k.$$

Zu erwähnen ist, dass aus der Messung von M auch die Messwerte von Observablen der Form

$$\widetilde{M} = \sigma_k \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \sigma_k$$

bestimmt werden können. Für einen experimentell geeigneten Verschränkungszeugen ist daher eine möglichst geringe Zahl von lokalen Messungen wünschenswert.

Wie oben bereits erwähnt besteht der Verschränkungszeugen formal aus einer Diagonalmatrix, nämlich der Summe von Projektoren auf keine, eine und zwei Anregungen, und

dem Projektor auf den W-Zustand. Der diagonale Anteil des gesamten Verschränkungszeugen, also die Diagonalmatrix und die Diagonale des Projektors auf den W-Zustand, können mithilfe einer einzigen lokalen Messung gemessen werden. Misst man

$$M_1 = \sigma_z^{\otimes N},$$

so können direkt alle diagonalen Elemente bestimmt werden. Der nicht-diagonale Anteil von W kann geschrieben als [49]

$$K = \frac{2^{1-N}}{N} \left(\sum_{\pi} \bigotimes_{i=1}^2 \sigma_x \bigotimes_{i=3}^N (\mathbb{1} + \sigma_z) + \sum_{\pi} \bigotimes_{i=1}^2 \sigma_y \bigotimes_{i=3}^N (\mathbb{1} + \sigma_z) \right)$$

werden. Hierbei bezeichnet \sum_{π} die Summe über alle möglichen Permutationen des nachfolgenden Ausdrucks. In [49] vorgeschlagen werden die Messungen der Form

$$M_k^{\pm} = \left[\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \sigma_{x/y} \pm \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) (\mathbb{1} + \sigma_z) \right]^{\otimes N},$$

wobei für jeden der beiden Terme in K genau N dieser Messungen benötigt werden. Die Operatoren stellen Messungen in der x-z bzw. y-z-Ebene der Blochkugel mit verschiedenen Winkeln

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{N}, \quad k = 1, \dots, N$$

dar. Außerdem gilt, dass

$$M_N^{\pm} = (\mathbb{1} + \sigma_z)^{\otimes N}.$$

Dies kommt effektiv einer Messung der Form $\sigma_z^{\otimes N}$ gleich, die schon für die Diagonalelemente angesetzt worden ist. Insgesamt sind dies dann $2N - 2$ lokale Messungen für den nicht-diagonalen Anteil und eine Messung für den diagonalen Anteil.

Folgerung. *Die Messung des Verschränkungszeugen W ist mit $2N - 1$ lokalen Messungen möglich.*

Im nächsten Abschnitt werden die analytischen Ergebnisse durch numerisch optimierte Verschränkungszeugen weiter verbessert.

4.3 Numerische Bestimmung von optimierten Verschränkungszeugen

Nachdem im letzten Abschnitt ein analytischer Ausdruck für eine ganze Klasse von Verschränkungszeugen, welche zur Detektion des W-Zustandes dient, hergeleitet werden konnte, soll der Ansatz für den Verschränkungszeugen nun weiterverfolgt werden, um die Ergebnisse in bezug auf die Rauschtoleranz noch weiter zu verbessern. Dazu kann man zunächst zurückkommen zum maximalen Überlapp $\sqrt{\alpha}$ des W-Zustandes mit den biseparierbaren Zuständen und den Verschränkungszeugen

$$W = \alpha \mathbb{1} - |W\rangle\langle W| = \frac{N-1}{N} \mathbb{1} - |W_N\rangle\langle W_N|$$

betrachten. Die Struktur ist zwar sehr einfach und analytisch fassbar, dennoch ist die zugehörige Rauschtoleranz mit

$$p_{max} = \frac{1}{N} \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

vollkommen unbefriedigend. Verbessern können wir das Ergebnis aus dem letzten Abschnitt dadurch, dass wir wieder den Verschränkungszeugen

$$\mathfrak{W} = \omega_0 \Pi_0 + \omega_1 \Pi_1 + \omega_2 \Pi_2 - |W_N\rangle\langle W_N|$$

aus Gleichung (3) betrachten, jetzt aber nicht mehr explizit auf die Positivität der partiellen Transpositionen achten, sondern dafür sorgen, dass der minimale Überlapp des Operators \mathfrak{W} noch positiv ist. Kombiniert damit, dass der Operator \mathfrak{W} im W-Zustand einen negativen Erwartungswert besitzen soll, definiert dies gerade einen Verschränkungszeugen für den W-Zustand. Das Resultat dieser Prozedur stellen wir dem Beweis voran:

Theorem. *Durch \mathfrak{W} wird genau dann ein N -Qubit-Verschränkungszeuge für den W-Zustand definiert, wenn*

$$\Upsilon := \max_{\substack{K,L \\ K+L=N}} \max_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha^2+K\beta^2=1}} \max_{\substack{\delta,\gamma \\ \gamma^2+K\delta^2=1}} \frac{(K\beta\gamma + L\delta\alpha)^2}{N} - \omega_0 \alpha^2 \gamma^2 - \omega_1 (\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2 \gamma^2) - \omega_2 (1 - \alpha^2 - \gamma^2 + \alpha^2 \gamma^2) \leq 0$$

Um dies zu beweisen, berechnen wir den minimalen Überlapp des Operators \mathfrak{W} und fordern dessen Positivität:

$$\min_{|\psi\rangle \in BS} \langle \psi | \mathfrak{W} | \psi \rangle \geq 0$$

Dabei erfolgt die Minimierung über alle biseparierbaren Zustände. Um die Minimierung durchführen zu können, benötigt man eine geeignete Parametrisierung der biseparierbaren Zustände $|\psi\rangle$.

Glücklicherweise zeigt der Operator \mathfrak{W} nur einen von 0 verschiedenen Überlapp für Zustände mit keiner, einer oder zwei Anregungen. Wir betrachten folglich reine biseparierbare N -Qubit-Zustände

$$|\psi\rangle = |a\rangle_K \otimes |b\rangle_L,$$

wobei der Zustand $|a\rangle_K$ ein K -Qubit Zustand ist. Das kann man sich so vorstellen, dass der Zustand $|a\rangle_K$ den Zustand der ersten K der insgesamt N Qubits darstellt. Entsprechend ist $|b\rangle_L$ der Zustand der letzten L Qubits. Insgesamt gilt natürlich $N = K + L$. Aufgrund der speziellen Struktur des Operators \mathfrak{W} reicht es aus, Zustände zu betrachten, bei denen $|a\rangle_K$ und $|b\rangle_L$ im Unterraum mit einer und keiner Anregung liegen. Explizit schreiben wir:

$$\begin{aligned} |a\rangle_K &= \alpha|000\dots 0\rangle + \beta_1|100\dots 0\rangle + \beta_2|010\dots 0\rangle + \dots + \beta_K|000\dots 1\rangle \\ |b\rangle_L &= \gamma|000\dots 0\rangle + \delta_1|100\dots 0\rangle + \delta_2|010\dots 0\rangle + \dots + \delta_K|000\dots 1\rangle \end{aligned}$$

mit komplexen Koeffizienten α, γ, β_i und δ_i . Weiter benutzen wir die Notation aus dem vorherigen Abschnitt und fassen die Koeffizienten jeweils in einem Spaltenvektor zusammen:

$$\begin{aligned} |a\rangle_K &= \alpha|0\rangle_K + |\beta\rangle_K \\ |b\rangle_L &= \gamma|0\rangle_L + |\delta\rangle_L \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |a\rangle_K \otimes |b\rangle_L = (\alpha|0\rangle_K + |\beta\rangle_K) \otimes (\gamma|0\rangle_L + |\delta\rangle_L) \\ &= \alpha\gamma|0\rangle_N + \alpha|\beta\rangle_K|\delta\rangle_L + \gamma|\beta\rangle_K|0\rangle_L + |\beta\rangle_K|\delta\rangle_L \end{aligned}$$

Weiter bezeichne $E_{M \times N}$ eine Matrix mit M Zeilen und N Spalten, deren sämtliche Einträge gleich 1 sind. Damit lässt sich der Erwartungswert im Zustand $|\psi\rangle$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \mathfrak{W} | \psi \rangle &= (\alpha^* \gamma^* \langle 0 |_N + \alpha^* \langle 0 |_K \langle \delta |_L + \gamma^* \langle \beta |_K \langle 0 |_L + \langle \beta |_K \delta |_L) \mathfrak{W} \\
&\quad \times (\alpha \gamma |0 \rangle_N + \alpha |0 \rangle_K | \delta \rangle_L + \gamma | \beta \rangle_K |0 \rangle_L + | \beta \rangle_K | \delta \rangle_L) \\
&= |\alpha|^2 |\gamma|^2 \langle 0 |_N \mathfrak{W} |0 \rangle_N + |\alpha|^2 \gamma^* \langle 0 |_N \mathfrak{W} |0 \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&\quad + \alpha^* |\gamma|^2 \langle 0 |_N \mathfrak{W} | \beta \rangle_K |0 \rangle_L + \alpha^* \gamma^* \langle 0 |_N \mathfrak{W} | \beta \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&\quad + |\alpha|^2 \gamma \langle 0 |_K \langle \delta |_L \mathfrak{W} |0 \rangle_N + |\alpha|^2 \langle 0 |_K \langle \delta |_L \mathfrak{W} |0 \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&\quad + \alpha^* \gamma \langle 0 |_K \langle \delta |_L \mathfrak{W} | \beta \rangle_K |0 \rangle_L + \alpha^* \gamma \langle 0 |_K \langle \delta |_L \mathfrak{W} | \beta \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&\quad + \alpha |\gamma|^2 \langle \beta |_K \langle 0 |_L \mathfrak{W} |0 \rangle_N + \alpha \gamma^* \langle \beta |_K \langle 0 |_L \mathfrak{W} |0 \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&\quad + |\gamma|^2 \langle \beta |_K \langle 0 |_L \mathfrak{W} | \beta \rangle_K |0 \rangle_L + \gamma^* \langle \beta |_K \langle 0 |_L \mathfrak{W} | \beta \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&\quad + \alpha \gamma \langle \beta |_K \delta |_L \mathfrak{W} |0 \rangle_N + \alpha \langle \beta |_K \delta |_L \mathfrak{W} |0 \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&\quad + \gamma \langle \beta |_K \delta |_L \mathfrak{W} | \beta \rangle_K |0 \rangle_L + \langle \beta |_K \delta |_L \mathfrak{W} | \beta \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&= \omega_0 |\alpha|^2 |\gamma|^2 + \omega_1 (|\alpha|^2 \langle \delta | \delta \rangle + |\gamma|^2 \langle \beta | \beta \rangle) + \omega_2 \langle \delta | \delta \rangle \langle \beta | \beta \rangle \\
&\quad - \frac{1}{N} (|\alpha|^2 \langle \delta | E_{L \times L} | \delta \rangle + |\gamma|^2 \langle \beta | E_{K \times K} | \beta \rangle + \alpha^* \gamma \langle \delta | E_{L \times K} | \beta \rangle + \alpha \gamma^* \langle \beta | E_{K \times L} | \delta \rangle)
\end{aligned}$$

Die Summanden mit den Vorfaktoren ω_i kommen durch die diagonalen Elemente des Zustandes $|\psi\rangle$ zustande. Zum Beispiel gilt für den sechsten Summanden, der nur Terme mit einer Anregungen enthält:

$$\begin{aligned}
|\alpha|^2 \langle 0 |_K \langle \delta |_L \mathfrak{W} |0 \rangle_K | \delta \rangle_L &= |\alpha|^2 \langle 0 |_K \langle \delta |_L (\omega_0 \Pi_0 + \omega_1 \Pi_1 + \omega_2 \Pi_2 - |W\rangle \langle W|) |0 \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&= |\alpha|^2 \langle 0 |_K \langle \delta |_L (\omega_1 \Pi_1 - |W\rangle \langle W|) |0 \rangle_K | \delta \rangle_L \\
&= |\alpha|^2 (\omega_1 \langle 0 |_K \langle \delta |_L \Pi_1 |0 \rangle_K | \delta \rangle_L - \langle 0 |_K \langle \delta |_L |W\rangle \langle W|0 \rangle_K | \delta \rangle_L) \\
&= |\alpha|^2 (\omega_1 \langle 0 |_K \langle \delta |_L |0 \rangle_K | \delta \rangle_L - \langle 0 |_K \langle \delta |_L |W\rangle \langle W|0 \rangle_K | \delta \rangle_L) \\
&= |\alpha|^2 (\omega_1 \langle \delta |_L | \delta \rangle_L - \langle 0 |_K \langle \delta |_L |W\rangle \langle W|0 \rangle_K | \delta \rangle_L)
\end{aligned}$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass nur der Projektor auf Terme mit einer Anregung einen von null verschiedenen Beitrag ergeben und dass der Überlapp in diesem Falle gleich 1 ist. Weiter wurde bedacht, dass zwar der Zustand $|o\rangle_K$ normiert ist, nicht jedoch der Zustand $|\delta\rangle_L$. Damit erklären sich alle weiteren diagonalen Terme.

Ferner müssen die Terme, die den Projektor auf den W-Zustand enthalten, bestimmt werden. Auch dies kann anhand des sechsten Summanden erläutert werden. Betrachten wir also den Term:

$$\langle 0|_K \langle \delta|_L |W_N\rangle \langle W_N|0\rangle_K |\delta\rangle_L$$

Hier spielt nur der Unterraum der letzten L Qubits eine Rolle, denn auf den ersten K Qubits gibt es keine Anregungen. Der Überlapp ist also auf den ersten K Qubits gleich 0 und auf den letzten L qubits gleich $\frac{1}{N}$, da nur Terme mit einer Anregung auftreten. Deswegen gilt:

$$\langle 0|_K \langle \delta|_L |W_N\rangle \langle W_N|0\rangle_K |\delta\rangle_L = \langle 0|_K |0\rangle_K \langle \delta|_L R |\delta\rangle_L = \langle \delta|_L |R|\delta\rangle_L$$

Mit R wird die reduzierte Matrix bezüglich dem L -dimensionalen Unterraum bezeichnet, die durch $|\delta\rangle$ aufgespannt wird. Nach dem oben Gesagten sind in diesem Unterraum nur Terme mit einer Anregung vorhanden. Hier sind die diagonalen und nicht-diagonalen Terme gleich gewichtet, sodass alle Einträge von R gleich $\frac{1}{N}$ sind. Daher gilt:

$$R = \frac{1}{N} E_{L \times L}$$

Analog verfährt man mit den weiteren Termen, wobei bei den nicht-diagonalen Termen beim Überlapp mit dem W-Zustand für die reduzierten Matrizen nicht-diagonale Matrizen entstehen. Mit diesen Überlegungen gelangt man sodann zu obigen Ausdruck für $\langle \psi | \mathfrak{W} | \psi \rangle$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Beträge von α und γ beliebig aber fest gewählt werden. Aufgrund der Normierung, die für $|a\rangle$ und $|b\rangle$ vorausgesetzt wird, sind dann auch die Beträge von $|\beta$ und $|\delta\rangle$ eindeutig bestimmt. Um die angestrebte Minimierung durchzuführen, betrachtet man die diagonalen Terme der Form $\langle \delta|_L E_{L \times L} |\delta\rangle_L$ an. Der gesamte Erwartungswert wird minimal, wenn unter anderem dieser Term maximal wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn $|\delta\rangle$ der zum maximalen Singulärwert bzw. Eigenwert δ korrespondierende Vektor ist. Dann gilt, dass alle Komponenten des Vektors $|\delta\rangle$ gleich diesem maximalen Singulärwert sein müssen:

$$\delta_i = \delta_j = \delta \in \mathbb{R}$$

Aus Symmetriegründen folgt, dass dieser Wert reell sein muss. Vollkommen analog argumentiert man, dass $\langle \beta|_K E_{K \times K} |\beta\rangle_K$ maximal ist, wenn alle Koeffizienten β_i gleich dem maximalen Singulärwert β der Matrix $E_{L \times L}$ ist. Also:

$$\beta_i = \beta_j = \beta \in \mathbb{R}$$

Gleichzeitig gilt:

$$\alpha^* \gamma \langle \delta | E_{L \times K} | \beta \rangle + \alpha \gamma^* \langle \beta | E_{K \times L} | \delta \rangle = 2 \operatorname{Re} (\alpha^* \gamma \langle \delta | E_{L \times K} | \beta \rangle)$$

Re ist hier die Realteilbildung. Mit der obigen Wahl von $|\beta\rangle$ und $|\delta\rangle$ wird dieser Term aber ebenfalls maximiert, da die Vektoren zu den maximalen Singulärwerten dieselbe Form haben. Außerdem können α und γ reell gewählt werden, da die Größe $\alpha^* \gamma \langle \delta | E_{L \times K} | \beta \rangle$ aus Symmetriegründen reell ist. Für die Minimierung ergeben sich wegen der Normierung der Vektoren $|a\rangle$ und $|b\rangle$ folgende Nebenbedingungen an die Parameter:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + K\beta^2 &= 1 \\ \gamma^2 + L\delta^2 &= 1 \end{aligned}$$

Letztendlich verbleibt eine Minimierung über die Parameter α, β, γ und δ . Einsetzen aller Ergebnisse führt nach kurzer Rechnung zur Behauptung. Mithilfe des Theorems haben wir ein numerisches Kriterium an der Hand, um zu entscheiden, ob ein Operator W der Form

$$W = \omega_0 \Pi_0 + \omega_1 \Pi_1 + \omega_2 \Pi_2 - |W_N\rangle \langle W_N|$$

für gegebene Parameter ω_i ein Verschränkungszeuge ist oder nicht. Wenn dies der Fall ist, ergibt die Maximierung einen negativen Wert. Ein optimaler Verschränkungszeuge ergibt sich, wenn die Konstante Υ gleich null ist. Dies ist leicht zu erhalten, wenn man ein Tripel $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ vorliegen hat, für den das Kriterium bereits einen negativen Wert ergibt. Dann kann man alle ω_i simultan um die erhaltene Konstante verschieben und erhält mit den neuen Parametern den Wert null.

Gesucht ist nun der Verschränkungszeuge, der durch das Theorem definiert wird und die größtmögliche Rauschtoleranz besitzt. Dazu ist noch keine analytische Lösung gelungen, sodass das Problem nur numerisch behandelt werden kann. Wir haben also folgendes Optimierungsproblem zu lösen:

Bestimme ω_0, ω_1 und ω_2 , sodass gilt:

1. Das Kriterium ist erfüllt, wobei wir direkt nach den optimalen Parametern suchen, d.h. die Konstante soll null sein:

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{K,L \\ K+L=N}} \max_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha^2+K\beta^2=1}} \max_{\substack{\delta,\gamma \\ \gamma^2+K\delta^2=1}} \frac{(K\beta\gamma + L\delta\alpha)^2}{N} - \omega_0\alpha^2\gamma^2 - \omega_1(\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2\gamma^2) \\ & - \omega_2(1 - \alpha^2 - \gamma^2 + \alpha^2\gamma^2) = 0 \end{aligned}$$

2. die Rauschtoleranz bzw. Grenzwahrscheinlichkeit soll maximal sein:

$$p_{max} \leq \frac{(1 - \omega_1)}{\frac{1}{2^N} (\omega_0 + N\omega_1 + \binom{N}{2}\omega_2 - 1) + 1 - \omega_1} \rightarrow \max$$

Wir lösen das Optimierungsproblem mithilfe von Zufallszahlen. Für jede Anzahl von Qubits N berechnen wir für zufällige Wertetripel im Bereich zwischen null und eins, welche für die ω -Parameter eingesetzt werden, das obige Kriterium. Immer wenn das Kriterium erfüllt ist berechnen wir auch die zugehörige Rauschtoleranz. Das Maximum aller Rauschtoleranzen aus zulässigen Parameterwerten stellt somit eine gute Approximation an den tatsächlich besten Verschränkungszeugen dar, welcher durch das Theorem gegeben ist. Die Ergebnisse werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

Dass dieser Verschränkungszeuge auch praktisch implementierbar ist, lässt sich anhand von [53] nachvollziehen. Hier wurden W-Zustände von bis zu acht Qubits in einer Ionenfalle erzeugt. Die Experimente wurden mit $^{40}\text{Ca}^+$ -Ionen in einer linearen Paulfalle durchgeführt, wobei die Qubits durch Superpositionen des $S_{1/2}$ Grundzustandes und des metastabilen $D_{3/2}$ -Zustandes der Calciumionen definiert worden sind. Diese Repräsentation von Qubits bot sich an, da zwischen den beiden Zuständen ein Quadrupolübergang möglich ist, welcher durch Laserpulse herbeigeführt werden kann. Durch Doppler- und Seitenbandkühlung als auch durch optisches Pumpen konnte der elektronische wie auch kinetische Grundzustand der Ionen hergestellt werden. Der verschränkte Zustand, welcher durch eine Folge von Laserpulsen erzeugt worden ist, konnte mithilfe einer CCD-Kamera ausgelesen werden. In Abbildung 11 ist die daraus resultierende Tomographie des experimentell erzeugten W-Zustandes für 8 Teilchen gezeigt.

Zum Nachweis des W-Zustandes wurde auch in diesem Experiment ein Verschränkungszeuge W_{exp} verwendet. Hierbei handelte es sich um eine Unterklasse der oben beschriebenen numerischen Verschränkungszeugen mit der Einschränkung

$$\omega_0 = \omega_2.$$

Der W-Zustand für 8 Qubits konnte eindeutig nachgewiesen werden. Experimentell ergab

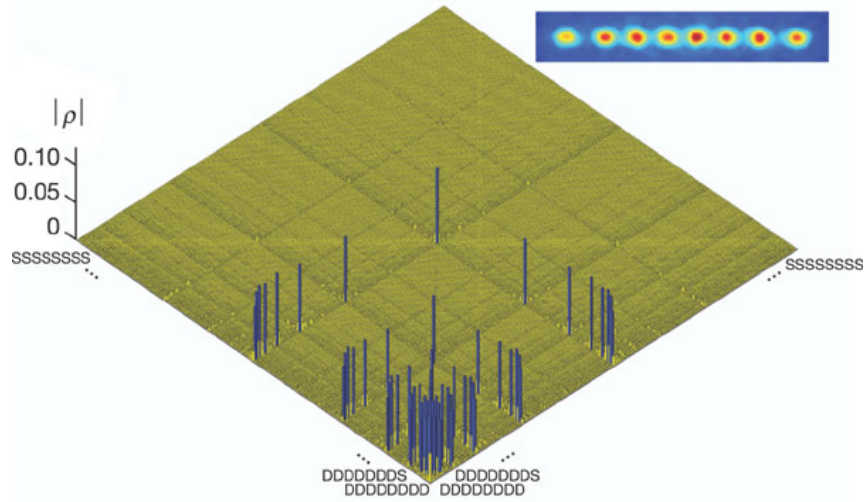


Abbildung 11: Beträge der rekonstruierten Dichtematrixelemente für den 8 Qubit W-Zustand, bestimmt durch Quantentomographie [53]

sich [53]

$$\text{Tr}(W_{exp}\rho_{exp}) = -0.0298 \pm 0.0001.$$

Damit zeigt sich, dass die hergeleiteten Verschränkungszeugen auch experimentell hervorragend zur Detektion multipartiter Verschränkung geeignet sind.

4.4 Vergleich der Rauschtoleranzen und Interpretation der Ergebnisse

Schlussendlich kommen wir nun zum Vergleich der zwei verschiedenen Klassen von Verschränkungszeugen. Die Rauschtoleranzen beider Verschränkungszeugen in Abhängigkeit von der Teilchenzahl sind in Abbildung 12 im Bereich von drei bis zehn Qubits vergleichend dargestellt. Dort ist zu erkennen, dass die Rauschtoleranzen in beiden Fällen im Grenzfall gegen eins konvergieren, d.h. im Fall großer Qubitzahlen wird jede beliebig große Beimischung von weißem Rauschen toleriert. Mit anderen Worten bedeutet dies, dass die verschränkten Zustände nahe dem W-Zustand mit steigender Qubitzahl immer besser detektiert werden. Dies kann dadurch untermauert werden, dass das “Volumen” der separierbaren Zustände im Zustandsraum für steigende Qubitzahl immer kleiner wird [51, 52].

Da die Parameter der analytischen Lösung selbst dem numerischen Kriterium genügen müssen, ist es klar, dass die analytische Lösung höchstens eine genauso gute Rauschtoleranz wie die numerische besitzen kann. Dies ist verständlich, da die numerische Lösung mithilfe des Überlapps mit den biseparierbaren Zuständen bestimmt worden ist und somit eine größere Menge verschränkter Zustände detektiert als der vollständig positive Ver-

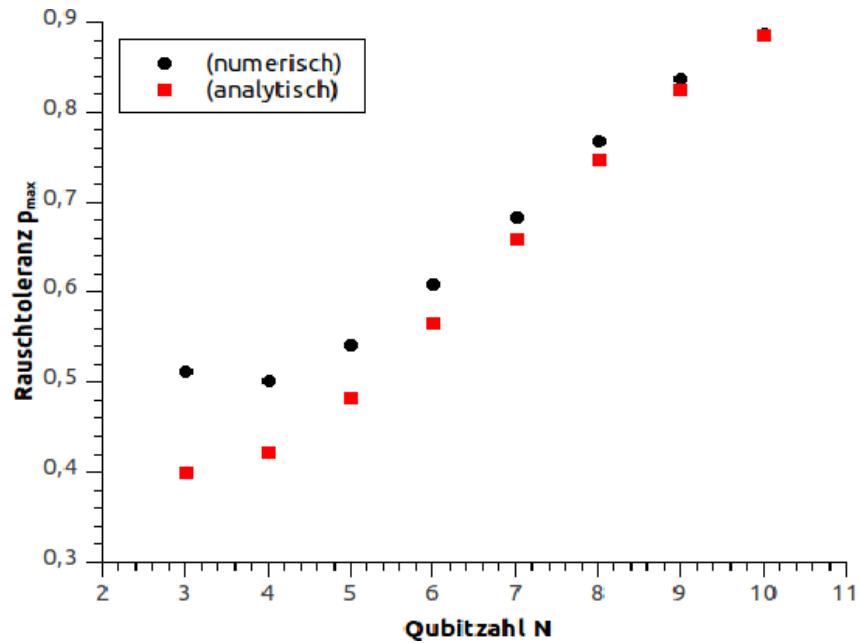


Abbildung 12: Vergleich der Rauschtoleranzen der numerischen und analytischen Lösung

schränkungszeuge.

Außerdem ist deutlich erkennbar, dass die Verschränkungszeugen nicht identisch sind. Der numerische Verschränkungszeuge ist offensichtlich für beliebige Qubitanzahl besser. Jedoch sieht man in Abbildung 12 auch, dass der Unterschied in der Rauschtoleranz schon bei 10 Qubits nicht mehr signifikant ist.

4.5 Resümee

Wir können nun die Ergebnisse des Kapitels zusammenfassen. Um einen vollständig positiven Verschränkungszeugen für W -Zustände zu konstruieren, sind wir vom einfachsten Ansatz für einen solchen Verschränkungszeugen ausgegangen, der aus einer Diagonalmatrix minus dem Projektor auf den W -Zustand bestand. Die Diagonalmatrix enthielt nur Terme mit null, einer oder zwei Anregungen, wie sie bei der partiellen Transposition des W -Zustandes auftreten. Die Positivität konnte auf analytischem Wege sicher gestellt werden. Die Maximierung der Rauschtoleranz konnte analytisch exakt erfolgen.

Die ohnehin schon exzellente Rauschtoleranz dieses Verschränkungszeugen konnte noch verbessert werden, indem für denselben Ansatz, den wir analytisch gefordert haben, numerisch den Überlapp mit den biseparierbaren Zuständen minimiert worden ist. Dadurch ergab sich ein numerisches Kriterium, auf dessen Basis wir die Rauschtoleranz, wenn auch nur mithilfe von Zufallszahlen, noch weiter verbessert haben.

5 Optimierte Verschränkungszeugen für Dicke-Zustände

Auf der Basis des Satzes von Gerschgorin werden vollständig positive Verschränkungszeugen für N -Qubit-Dicke-Zustände mit $\frac{N}{2}$ Anregungen hergeleitet. Hierbei lösen wir uns vollständig von den mittels semidefiniter Programmierung berechenbaren Lösungen und präsentieren einen alternativen Ansatz.

5.1 Analytische Bestimmung von optimierten Verschränkungszeugen

In diesem Kapitel sollen optimierte Verschränkungszeugen für Dicke-Zustände mit mehr als einer Anregung bestimmt werden. Für eine feste Zahl von Anregungen kann die Herleitung mit mehr Aufwand analog zur analytischen Bestimmung des optimierten Verschränkungszeugen für den W -Zustand erfolgen.

Wir interessieren uns im folgenden für den Fall, dass die Anzahl der Anregungen explizit von der Dimension des Systems abhängt und betrachten die speziellen Dicke-Zustände $|D_{\frac{N}{2}}^N\rangle$. Für diese Zustände wollen wir auf analytischem Wege vollständig positive Verschränkungszeugen, welche nur noch von der Qubitanzahl abhängen, herleiten. In Anlehnung an den Verschränkungszeugen für den W -Zustand wählen wir folgenden Ansatz:

$$W_G = \sum_{i=0}^N \omega_i \Pi_i^N - |D_{\frac{N}{2}}^N\rangle\langle D_{\frac{N}{2}}^N|$$

Hierbei ist bereits aus der zu verlangenden Positivität der partiellen Transpositionen von W_G eingegangen, dass alle möglichen Projektoren auf Basiszustände benötigt werden. Ferner vereinfachen wir wie folgt:

$$\omega_{\frac{N}{2}+k} = \omega_{\frac{N}{2}-k} \quad \forall k \in \left(0, \dots, \frac{N}{2}\right)$$

Diese Annahme sieht man wie folgt ein, wenn man die partiellen Transpositionen des Dicke-Zustandes betrachtet. Hier werden in der partiellen Transposition nach einem Basiswechsel Blöcke der Form $\frac{N}{2} + k$ vs. $\frac{N}{2} - k$ Anregungen auftreten, sodass die vorstehenden Parameter stets im selben Block zu finden sind.

Die Parameter $\{\omega_i\}$ sollen nun so bestimmt werden, dass alle partiellen Transpositionen von W positiv sind. Dafür wird im Folgenden ein hinreichendes Kriterium hergeleitet.

Im Prinzip könnte man analog zum analytischen Verschränkungszeugen für den W -Zustand vorgehen und versuchen, die partiellen Transpositionen des Operators W allgemein zu

berechnen und die zugehörigen Eigenwerte zu bestimmen. Um dies zu umgehen, kann zunächst eine Abschätzung erfolgen. Wir betrachten nun eine partielle Transposition des Verschränkungszeugen W_G bezüglich eines beliebigen Systems. Dabei erhält man nach einem geeigneten Basiswechsel wieder eine Blockstruktur für den partiell transponierten Operator. Die Blockmatrix B^k , welche zum Parameter ω_k gehört, hat die Dimension

$$D_k = \binom{N}{k} \times \binom{N}{k}.$$

Die Eigenwerte dieses Blockes, für die wir ja die Positivität fordern, können mithilfe von Gerschgorin-Kreisen abgeschätzt werden, welche wir zunächst definieren [54].

Gegeben sei eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die Gerschgorin-Kreise zu jedem Diagonalelement sind dann als

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| < \sum_{j \neq i=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

Damit zeigt man in der numerischen Mathematik den Satz von Gerschgorin [54].

Theorem (Gerschgorin). *Die n Eigenwerte der komplexen Matrix A liegen in der Vereinigung $\bigcup_i K_i$ aller n Gerschgorin-Kreise.*

Für die Eigenwerte der betrachteten Blockmatrizen kommt man damit zu einer groben Abschätzung. Zu einen sind die Blöcke stets reell und symmetrisch, zum anderen sind alle Diagonalelemente gleich. Damit gibt es jeweils nur einen einzigen Gerschgorin-Kreis. Die Diagonalelemente setzen wir als reell an, so dass es genügt, die Gerschgorin-Kreise nur auf der reellen Achse zu betrachten. Man kann dann eine grobe Abschätzung für die Eigenwerte bestimmen, wenn man die Diagonalelemente so bestimmt, dass der Durchmesser des zugehörigen Gerschgorin-Kreises vollständig auf der positiven reellen Achse liegt.

Schauen wir uns also einen Gerschgorin-Kreis zu einem Diagonalelement ω_k an. Die Nichtdiagonalelemente haben den Wert

$$B_{ij}^k = -\frac{1}{\binom{N}{\frac{N}{2}}}$$

Davon kann es in einer Zeile maximal $\binom{N}{k}$ geben. Für den zugehörigen Gerschgorin-Kreis gilt dann:

$$K_i = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - \omega_k| < \frac{\binom{N}{k}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}} \right\}$$

Geometrisch liegt der Kreis genau dann vollständig auf der positiven x-Achse, wenn der

Abstand zwischen Mittelpunkt und Ursprung größer ist als der Radius. Damit muss gelten:

$$\omega_k \geq \frac{\binom{N}{k}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}}$$

Für jedes k und somit jeden der Parameter ω_k haben wir ein hinreichendes Kriterium für die Positivität der partiellen Transpositionen des angesetzten Verschränkungszeugen erhalten. Ein Problem ergibt sich nur beim Parameter $\omega_{\frac{N}{2}}$. Für ihn muss gemäß der vorstehenden Formel

$$\omega_k \geq \frac{\binom{N}{\frac{N}{2}}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}} = 1$$

gelten. Jedoch gilt dann für den minimalen Erwartungswert des Verschränkungszeugen im Zustand $|D_{\frac{N}{2}}^N\rangle$:

$$Tr(W|D_{\frac{N}{2}}^N\rangle\langle D_{\frac{N}{2}}^N|) = 1 - 1 = 0.$$

Damit würde der Zustand nicht detektiert. Das Problem kann man lösen, indem man sich auf den projektiven Verschränkungszeugen W_{proj} für den Zustand $|D_{\frac{N}{2}}^N\rangle$ bezieht [45]. Dieser ist gegeben durch

$$W_{proj} = \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} \mathbb{1} - |D_{\frac{N}{2}}^N\rangle\langle D_{\frac{N}{2}}^N|.$$

Dieser ist vollständig positiv, wie im Anhang C in Anlehnung an [56] gezeigt wird. Damit kann man ansetzen:

$$\omega_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{2} \frac{N}{N-1}$$

Dann ergibt sich der Erwartungswert zu:

$$Tr(W|D_{\frac{N}{2}}^N\rangle\langle D_{\frac{N}{2}}^N|) = \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} - 1 = \frac{1 - \frac{N}{2}}{N-1} < 0 \forall N > 4$$

Die Optimierung bezüglich der Rauschtoleranz erhält man in diesem Fall einfacher als im Falle des W -Zustandes. Für alle Parameter wählt man den kleinstmöglichen Wert, wobei der entscheidende Parameter $\omega_{\frac{N}{2}}$ ohnehin festlegt.

Die Spur des Verschränkungszeugen ist:

$$Tr(W) = \sum_{k=0}^N \frac{\binom{N}{k}^2}{\binom{N}{\frac{N}{2}}} - \binom{N}{\frac{N}{2}} + \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} \binom{N}{\frac{N}{2}} - 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\binom{2N}{\frac{N}{2}}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}} - \binom{N}{\frac{N}{2}} + \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} \binom{N}{\frac{N}{2}} - 1 \\
&= \frac{\binom{2N}{\frac{N}{2}}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}} - 1 + \binom{N}{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{N}{N-1} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Dabei wurde im ersten Schritt verwendet, dass

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k}^2 = \binom{2N}{N}$$

gilt [59]. Die maximale Rauschtoleranz ist nach Abschnitt 3.2 gegeben durch:

$$p_{max} = \frac{1}{1 - \frac{Tr(W)}{2^N Tr(W\rho)}}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich dann in Abhängigkeit von der Qubitanzahl N :

$$p_{G,max}^N = \frac{1}{1 - \frac{\binom{2N}{\frac{N}{2}} - \binom{N}{\frac{N}{2}} + \binom{N}{\frac{N}{2}}^2 \left(\frac{1}{2} \frac{N}{N-1} - 1 \right)}{2^N \binom{N}{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{N}{N-1} - 1 \right)}}$$

Wie in Anhang B gezeigt, ergibt sich

$$p_{G,max}^N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} 0.414$$

im Falle unendlich großer Qubitanzahlen. Damit ist der Verschränkungszeuge W_G jedoch asymptotisch schlechter als der projektive Verschränkungszeuge W_{proj} , für den

$$p_{proj,max} = \frac{1}{2} \frac{N-1}{(N-2) \left(1 - \frac{1}{2^N} \right)}$$

gilt [55, 2] und damit

$$p_{proj,max} \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2}$$

folgt. Um dennoch eine Verbesserung der Rauschtoleranz zu erreichen, kann man einen neuen Verschränkungszeugen W_{opti} einführen, der praktisch aus W_G und W_{proj} hervorgeht. Dazu verwendet man wieder den Ansatz

$$W_{opti} = \sum_{i=0}^N \omega_i \Pi_i^N - |D_{\frac{N}{2}}^N\rangle \langle D_{\frac{N}{2}}^N|,$$

wobei die Parameter gemäß

$$\omega_k^{opti} = \min \left\{ \frac{1}{2} \frac{N}{N-1}, \frac{\binom{N}{k}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}} \right\}$$

zu wählen sind. Diese Wahl kann man immer treffen, da durch beide Bedingungen ein Verschränkungszeuge definiert wird. Aus denselben Gründen wie zuvor setzen wir

$$\omega_{\frac{N}{2}}^{opti} = \frac{1}{2} \frac{N}{N-1}.$$

Die Rauschtoleranzen der drei behandelten Verschränkungszeugen sind in Abbildung 13 gezeigt. Wie man dort erkennt kann durch die getroffene Wahl der Parameter ein Verschränkungszeuge für Dicke-Zustände gefunden werden, welcher eine bessere Rauschtoleranz als der projektive Verschränkungszeuge besitzt. Abschließend vergleichen wir die Rauschtoleranz des optimierten Verschränkungszeugen noch mit einer anderen Methode zur Detektion von Dicke-Zuständen. In [57] leiten die Autoren für ein aus allgemeineren Prinzipien folgendes Detektionskriterium für allgemeine N-Qubit-Dicke-Zustände mit k

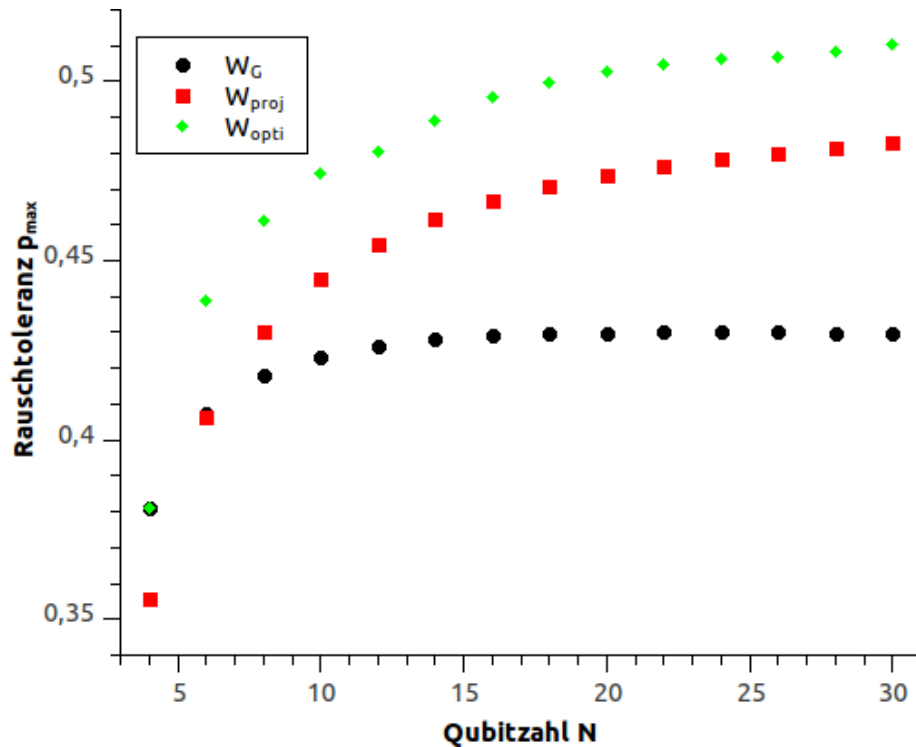


Abbildung 13: Vergleich der Rauschtoleranzen der Verschränkungszeugen W_G , W_{opti} und W_{proj} im Bereich von 4 bis 30 Qubits

Anregungen die maximale Rauschtoleranz

$$p_{k,max}^N = \frac{1}{1 + \frac{(2N-2m-1)\binom{N}{k}}{2^N}}$$

her. Die dort angegebenen Kriterien sind die bisher allgemeinsten zur Detektion von Dicke-Zuständen. Im Falle von $N/2$ Anregungen reduziert sich die Rauschtoleranz auf

$$P_N := p_{\frac{N}{2},max}^N = \frac{1}{1 + \frac{(N-1)\binom{N}{\frac{N}{2}}}{2^N}}$$

Den Vergleich dieses Resultats mit dem optimierten Verschränkungszeugen W_{opti} zeigt Abbildung 14. Wie deutlich zu erkennen ist, besitzt der optimierte Verschränkungszeuge W_{opti} nur im Falle von 4 Qubits eine kleinere Rauschtoleranz als das Ergebnis aus [57]. In [57] behaupten die Autoren, dass ihr Resultat die größte Rauschtoleranz aller bisher bekannten Kriterien besitzt. Für den Fall von Dicke-Zuständen mit $\frac{N}{2}$ Anregungen stimmt dies jedoch nicht, da mit wachsender Teilchenzahl N schon der projektive Verschränkungszeuge besser ist als ihr Ergebnis. Allerdings darf dabei nicht außer Acht gelassen werden, dass das Kriterium aus [57] aus viel allgemeineren Prinzipien folgt und für andere Dicke-Zustände eine hervorragende Rauschtoleranz aufweist, welche für wachsendes N exponentiell gegen 1 konvergiert. So kann mit dem Kriterium bei 2 Anregungen schon bei ca. 20 Qubits eine Rauschtoleranz von über 99% erreicht werden [57].

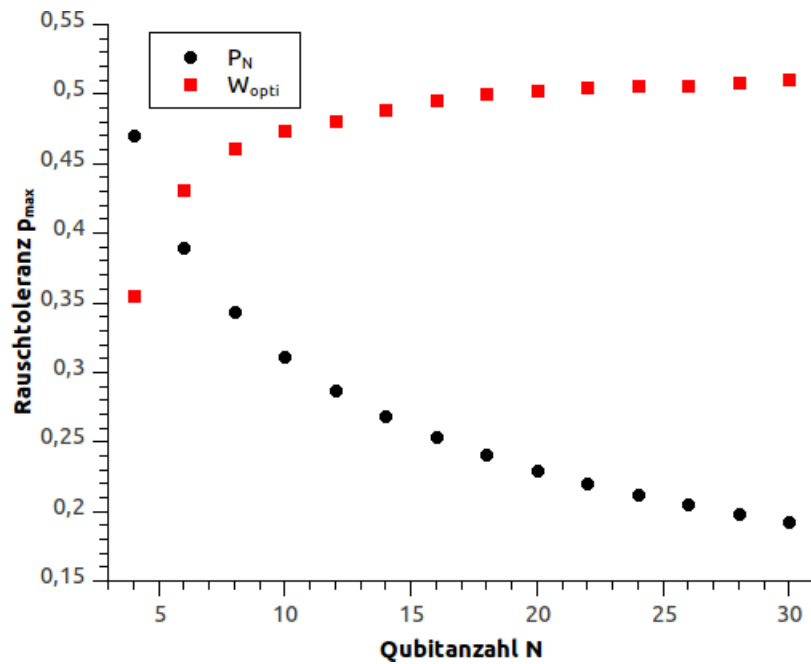


Abbildung 14: Vergleich der maximalen Rauschtoleranz von W_{opti} mit P_N im Bereich von 4 bis 30 Qubits

5.2 Resümee

Mit den hergeleiteten Verschränkungszeugen aus diesem Kapitel ist die Detektion von allgemeinen N-Qubit-Qubit-Dicke-Zuständen mit $\frac{N}{2}$ Anregungen gelungen. Es wurde nicht wie im Falle des W-Zustandes von einer numerischen Lösung ausgegangen, sondern ein vollkommen anderer Ansatz verfolgt. Hierbei wurde lediglich die Struktur des zugehörigen Verschränkungszeugen postuliert. Mithilfe des Satzes von Gerschgorin konnte für jeden auftretenden Parameter eine untere Grenze angegeben werden, sodass der Verschränkungszeuge vollständig positiv ist. Allerdings muss angemerkt werden, dass es sich nur um eine Abschätzung handelt, d.h. die unteren Schranken sind nicht exakt.

Für den dadurch erhaltenen Verschränkungszeugen ist die Rauschtoleranz bezüglich weißem Rauschen geringer als für den projektiven Verschränkungszeugen, jedoch konnte durch die Kombination beider Verschränkungszeugen effektiv ein besserer Verschränkungszeuge hergeleitet werden, welcher z.B. eine höhere Rauschtoleranz besitzt als der projektive Verschränkungszeuge oder das Kriterium von Huber et. al [57].

6 Zusammenfassung der Resultate und Ausblick

Das Ziel der vorliegenden Masterarbeit war es, neue multipartite Verschränkungskriterien für Dicke-Zustände herzuleiten. Hierbei wurden im Speziellen vollständig positive Verschränkungszeugen betrachtet.

Solche Verschränkungszeugen konnten für W-Zustände in analytischer Weise für beliebige Qubitanzahl auf der Basis von positiven partiellen Transpositionen sowie einer maximalen Rauschtoleranz gegenüber weißem Rauschen eines geeigneten Ansatzes bestimmt werden. Dieser Ansatz war motiviert aus der numerischen Lösung, die man aus dem zugehörigen semidefiniten Programm gewinnen kann. Daraus ergab sich eine Rauschtoleranz, die asymptotisch im Grenzfall unendlich vieler Qubits gegen 1 konvergiert. Derselbe Ansatz wurde verwendet um einen allgemeineren Verschränkungszeugen zu erhalten. Hierfür konnte ein numerisches Kriterium in Form eines Optimierungsproblems angegeben werden, welches auf der Positivität des Verschränkungszeugen auf der Menge der biseparierbaren Zustände basiert. In dieser Optimierung tauchen die Parameter explizit auf, sodass dadurch keine Bestimmungsgleichung für diese gegeben ist. Vielmehr kann nur überprüft werden, ob durch einen gegebenen Satz von Parametern ein Verschränkungszeuge definiert wird oder nicht. Da diese numerische Lösung jedoch besser ist als die analytische, wäre eine analytische Lösung der Optimierung, auch aus experimenteller Sicht, wünschenswert, um die zugehörigen Parameter für beliebige Qubitanzahlen zukünftig angeben zu können.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde eine Klasse von vollständig positiven Verschränkungszeugen für Dicke-Zustände mit beliebiger Qubitanzahl N und $N/2$ Anregungen hergeleitet. Für die Positivität des gemachten Ansatzes konnten aufgrund der zu komplexen Struktur der partiellen Transpositionen keinen exakten Bedingungen an die Parameter formuliert werden. Vielmehr konnten für die auftretenden Parameter untere Schranken mithilfe des Gerschgorin-Theorems ermittelt werden. Der entstehende Verschränkungszeuge ist zunächst in bezug auf die Rauschtoleranz schlechter als der zugehörige projektive Verschränkungszeuge. Die Kombination der Bedingungen an die Parameter ergab einen Verschränkungszeugen mit einer Rauschtoleranz, die die Rauschtoleranz des projektiven Verschränkungszeugen übertrifft. Auch hier ist zu bemängeln, dass hierfür keine kompakte Formel für die Parameter vorliegt. Hier könnte die Abschätzung mithilfe der Gerschgorin-Kreise noch verfeinert werden oder die unteren Schranken an die Parameter exakt gefasst werden.

In dieser Arbeit wurde deutlich, dass die vorhandenen Verschränkungszeugen für Dicke-Zustände bezüglich der Rauschtoleranz verbessert werden können. Da hier nur vollständig positive Verschränkungszeugen betrachtet worden sind, könnten weitere Untersuchungen darin bestehen, die allgemeineren vollständig zerlegbaren Verschränkungszeugen analy-

tisch zu beschreiben. Hier sind in Hinsicht auf die Rauschtoleranz noch bessere Ergebnisse zu erwarten, jedoch hat man es wie für den W-zustand demonstriert mit deutlich komplexeren Optimierungsproblemen zu tun.

Ferner sind die bestimmten Verschränkungszeugen optimiert in Hinblick auf weißes Rauschen, welches oft in photonischen Experimenten als Dekohärenzmodell dient. Hier könnten weitere realistischere Rauschmodelle betrachtet und an diese Modelle angepasste Verschränkungszeugen ermittelt werden, wobei man z.B. an Experimente mit Ionenfallen oder Festkörpern denken kann.

Experimentell ist weiter von Interesse, dass ein gegebener Verschränkungszeuge zur Verschränkungsdetektion möglichst wenige gleichzeitige lokale Messungen erfordert. Die Anzahl der lokalen Messungen konnte aber in dieser Arbeit nur für die Verschränkungszeugen für die W-Zustände ermittelt werden. Diese ist der Anzahl der Qubits direkt proportional. Die optimale Zerlegung für N-Qubit-Dicke-Zustände mit $\frac{N}{2}$ Anregungen in lokale Messungen ist bisher nicht bekannt [2]. Die Kenntnis dieser Anzahl ist für eine Beurteilung der experimentellen Qualität des Verschränkungszeugen jedoch unerlässlich. Hieran könnte in weiteren Arbeiten angeknüpft werden.

Weiter wünschenswert sind analytische Ergebnisse für vollständig positive Verschränkungszeugen für allgemeine Dicke-Zustände mit beliebiger Anregungszahl, bei denen die zugehörige Rauschtoleranz im Falle unendlich vieler Teilchen gegen eins konvergiert. Dies war auch für die oben hergeleiteten Verschränkungszeugen nur für W-Zustände der Fall, für die Dicke-Zustände mit $\frac{N}{2}$ Anregungen ist der Grenzwert deutlich kleiner als eins, sodass noch nach möglichen Verbesserungen gesucht werden muss.

Trotzdem bieten die in dieser Masterarbeit hergeleiteten Verschränkungszeugen ausgezeichnete Möglichkeiten zum Nachweis multipartiter Verschränkung und stellen darüber hinaus eine vielversprechende Grundlage für weitere Forschungsarbeiten in diesem Bereich dar.

Anhang

A: Partielle Transpositionen von W_4

Im Abschnitt 4.1 wurde für den Fall von 4 Qubits ein vollständig positiver Verschränkungszeuge W_4 für den W-Zustand hergeleitet. Aus Platzgründen und vielmehr aus Gründen der Lesbarkeit wurde dort auf die expliziten Matrixformen der partiellen Transpositionen verzichtet. Der Vollständigkeit halber werden sie hier angegeben.

$$W_4 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{4} & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_4^{TA} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{4} & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Um die Positivität zu sichern, kann man die Matrix mittels Basistransformation in Blockform bringen, sodass die Positivität dieser Blöcke hinreichend ist. Dabei ist der größte Block

$$\begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} \\ \frac{\beta}{4} & \delta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & \delta & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist genau dann positiv, wenn

$$\frac{1}{2}(\delta + \alpha) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\delta - \alpha)^2 + \beta^2} \geq 0$$

Außerdem entsteht der Block

$$\begin{pmatrix} \gamma + \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} \\ \frac{\beta}{4} & \gamma + \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} \\ \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & \gamma + \frac{\beta}{4} \end{pmatrix}$$

Hier ergibt sich keine neue Bedingung, da aus den übrigen Einträgen bereits

$$\gamma + \frac{3}{4}\beta \geq 0$$

folgt. Daher ist auch dieser Block positiv. Ferner muss gelten:

$$\gamma \geq 0$$

$$\delta \geq 0$$

$$\alpha \geq 0$$

Man berechnet leicht:

$$W_4^{TAC} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma + \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist nur noch der Block

$$\begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} \\ \frac{\beta}{4} & \delta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & \delta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & \delta & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

von Relevanz, der andere entstehenden Block ist bereits aufgrund der anderen partiellen Transposition positiv. Hier ergibt sich jedoch wieder:

$$\frac{1}{2}(\delta + \alpha) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\delta - \alpha)^2 + \beta^2} \geq 0$$

Insgesamt führt dies dann auf das in 4.1 angegebene Optimierungsproblem.

B: Numerische Lösung für den Verschränkungszeugen \widetilde{W}_5

In Abschnitt wurde die analytische Struktur des mithilfe des semidefiniten Programms berechneten vollständig positiven Verschränkungszeugen \widetilde{W}_5 für den W-Zustand im Falle von 5 Qubits angegeben. Hier wird nun die numerische Lösung präsentiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_5 \approx & D - 0.1720|W_5\rangle\langle W_5| + 0.00013|D_{3,5}\rangle\langle D_{3,5}| \\ & + 0.0641|D_{2,5}\rangle\langle D_{2,5}| + 0.0006|D_{4,5}\rangle\langle D_{4,5}| + 0.1324g + 0.0127h, \end{aligned}$$

wobei

$$h = |11\rangle\langle 11| \otimes |W_5\rangle\langle W_5| + Perm$$

$$g = |00\rangle\langle 00| \otimes |\overline{W}_5\rangle\langle \overline{W}_5| + Perm \text{ mit } |\overline{W}_5\rangle = |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle$$

ist. Der diagonale Anteil D ist gegeben durch

$$\begin{aligned} D = \text{diag}(0.2557, 0.1377, 0.1377, -0.0131, 0.1377, -0.0131, -0.0131, -0.0013, \\ 0.1377, -0.0131, -0.0131, -0.0013, -0.0131, -0.0013, -0.0013, 0.0001, \\ 0.1377, -0.0131, -0.0131, -0.0013, -0.0131, -0.0013, -0.0013, 0.0001, \\ -0.0131, -0.0013, -0.0013, 0.0001, -0.0013, 0.0001, 0.0001, 0.000024) \end{aligned}$$

Offenbar benötigt man zur Parametrisierung des gesamten Verschränkungszeugen jeweils 6 Parameter für den diagonalen und den nicht-diagonalen Anteil. Somit bekommt man ein Optimierungsproblem in 12 Variablen zu deren Bestimmung die Forderung nach positiven partiellen Transpositionen nicht ausreicht.

C: Beweis über die Struktur des Verschränkungszeugen W_{proj}

In diesem Anhang wird gezeigt, dass der Verschränkungszeuge

$$W_{proj} = \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} \mathbb{1} - |D_{\frac{N}{2}}^N\rangle\langle D_{\frac{N}{2}}^N|$$

vollständig positiv ist. Zunächst wurde in [55] gezeigt, dass

$$a_0 := \sqrt{\frac{1}{2} \frac{N}{N-1}}$$

der maximale Überlapp des Zustandes $|D_{\frac{N}{2}}^N\rangle$ mit den biseparierbaren Zuständen ist. Die vollständige Positivität des Verschränkungszeugen zeigt man dann wie folgt:

Zunächst fixieren wir eine beliebige Bipartition. Der Zustand $|D_{\frac{N}{2}}^N\rangle$ hat dann bezüglich dieser Bipartition eine Schmidtzerlegung

$$|D_{\frac{N}{2}}^N\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} a_i |ii\rangle \quad \text{mit} \quad a_{i+1} < a_i.$$

Der projektive Verschränkungszeuge ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} W &= a_0^2 \mathbb{1} - |D_{\frac{N}{2}}^N\rangle\langle D_{\frac{N}{2}}^N| \\ &= a_0^2 \mathbb{1} - \sum_{i,j=1}^N a_i a_j |ii\rangle\langle jj| \end{aligned}$$

Die partielle Transposition bezüglich des ersten Systems erhält man:

$$W^{TA} = a_0^2 \mathbb{1} - \sum_{i,j=1}^N a_i a_j |ji\rangle\langle ij|$$

Für diese Matrix ergibt sich eine Blockstruktur, in der 2×2 -Blöcke B der Form

$$B = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_i a_j \\ a_i a_j & a_0^2 \end{pmatrix}$$

Diese Blöcke sind aber nach dem Gerschgorin-Theorem positiv. Somit folgt:

$$W = Q^{T_A}$$

mit einem positivem Operator Q . Da die Argumentation für alle Bipartitionen gilt, folgt, dass der projektive Verschränkungszeugen vollständig positiv ist.

D: Maximale Rauschtoleranz des Verschränkungszeugen W_G

Hier soll die maximale Rauschtoleranz

$$p_{G,max}^N = \frac{1}{1 - \frac{\binom{2N}{N} + \left(\frac{N}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} \frac{N}{N-1} - 1\right) - \binom{N}{\frac{N}{2}}}{2^N \left(\frac{N}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{N}{N-1} - 1\right)}}$$

des Verschränkungszeugen W_G im Grenzfall unendlich vieler Qubits berechnet werden. Dazu muss nur der Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{2N}{N}}{2^N \left(\frac{N}{2}\right)} \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{N}{N-1} - 1}$$

bestimmt werden, da alle anderen Elemente im zweiten Teil des Nenners im Limes trivial werden.

Zuerst gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} = \frac{1}{2}$$

Die auftretenden Binomialkoeffizienten werden mit der Stirling-Formel behandelt [58]:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N \exp(-N) \text{ für } N \rightarrow \infty$$

Mit

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

folgt sodann:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{2N}{N}}{2^N \left(\frac{N}{2}\right)} \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{N}{N-1} - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N)! \left(\frac{N!}{2}\right)^2}{2^N N!^3} \frac{1}{-\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-2)(2N)! \left(\frac{N!}{2}\right)^2}{2^N N!^3} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-2) \left(\sqrt{4\pi N} (2N)^{2N} \exp(-2N) \right) \left(\sqrt{\pi N} \left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2}\right) \right)^2}{2^N \left(\sqrt{2\pi N} N^N \exp(-N) \right)^3} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-2) \left(\sqrt{4\pi N} (2N)^{2N} \exp(-2N) \right) \left(\sqrt{\pi N} \left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2}\right) \right)^2}{2^N \left(\sqrt{2\pi N} N^N \exp(-N) \right)^3} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-2) \left(\sqrt{4\pi N} (2N)^{2N} \exp(-2N) \right) \pi N \left(\frac{N}{2}\right)^N \exp(-N)}{2^N (2\pi)^{\frac{3}{2}} N^{\frac{3}{2}} N^{3N} \exp(-3N)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-2) 2N^{\frac{3}{2}} 2^N N^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} N^{3N} \exp(-3N)}{2^N 2^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} N^{\frac{3}{2}} N^{3N} \exp(-3N)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-2)2}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$p_{G,max}^N \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{1 - (-\sqrt{2})} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \approx 0.414$$

Literatur- und Quellenverzeichnis

- [1] M. FOX,
Quantum Optics-An introduction. Oxford University Press, Oxford (2006): S. 21f.
- [2] O. GÜHNE, G. TOTH,
Entanglement detection. Physics Reports 474, 1 (2009)
- [3] A. GLEASON,
Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space. Indiana Univ. Math. J. 6 No. 4 (1957), 885–893
- [4] G. MÜNSTER,
Quantentheorie. de Gruyter, Berlin (2006): S. 267ff.
- [5] G. M. D'ARIANO, M. F. SACCHI,
Protocols for entanglement transformations of bipartite pure states. Phys. Rev. A 67, 042312 (2003)
- [6] A. PERES,
Separability Criterion for Density Matrices. Phys. Rev. Lett. 77, 1413–1415 (1996)
- [7] M. HORODECKI, P. HORODECKI, R. HORODECKI,,
Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions. Physics Letters A 223, 1-8 (1996)
- [8] R. HORODECKI, P. HORODECKI, M. HORODECKI, K. HORODECKI,
Quantum entanglement. Rev.Mod.Phys.81:865-942, (2009)
- [9] M. LEWENSTEIN, B. KRAUS, P. HORODECKI, J. I. CIRAC,
Characterization of separable states and entanglement witnesses. Phys. Rev. A 63, 044304 (2001)
- [10] D. WERNER,
Funktionalanalysis. Springer, Berlin (2011): S.93ff.
- [11] M. BARBIERI, F. DE MARTINI, G. DI NEPI, P. MATALONI, G. M. D'ARIANO, C. MACCHIAVELLO,
Experimental Detection of Entanglement with Polarized Photons. arXiv:quant-ph/0307003

- [12] J. G. FILGUEIRAS, T. O. MACIEL, R. E. AUCCAISE, R. O. VIANNA, R. S. SARTHOUR, I. S. OLIVEIRA,
Experimental implementation of a NMR entanglement witness.
arXiv:1202.0235
- [13] S. POPESCU, D. RÖHRLICH,
Which states violate Bell's inequality maximally?. Physics Letters A 169, 411-414 (1992)
- [14] S. POPESCU,
Bell's inequalities vs. teleportation: What is nonlocality?. Phys. Rev. Lett. 72, 397 (1993)
- [15] J. S. BELL,
Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy. Cambridge University Press, Cambridge (2004)
- [16] J. F. CLAUSER, M. A. HORNE, A. SHIMONY, R. A. HOLT,,
Proposed experiment to test local hidden-variable theories. Phys. Rev. Lett. 23, 880-884 (1969)
- [17] R. WERNER, M. WOLF ,
Bell inequalities and Entanglement. arXiv:quant-ph/0107093
- [18] I. CHUANG, M. NIELSEN,
Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, Cambridge (2009): S. 26ff.
- [19] P. KAYE, R. LAFLAMME, M. MOSCA,
An introduction to quantum computing. Oxford University Press, Oxford (2007): S. 75
- [20] D. BOUWMEESTER, J.-W. PAN, K. MATTLE, M. EIBL, H. WEINFURTER, A. ZEILINGER ,
Experimental Quantum Teleportation. Nature 390, 6660, 575-579 (1997)
- [21] M. RIEBE, H. HÄFFNER, C. F. ROOS, W. HÄNSEL, M. RUTH, J. BENHELM, G. P. T. LANCASTER, T. W. KÖRBER, C. BECHER, F. SCHMIDT-KALER, D. F. V. JAMES, R. BLATT,
Deterministic Quantum Teleportation with Atoms. Nature 429, 734-737 (2004)

- [22] C. H. BENNETT, G. BRASSARD, C. CRÉPEAU, R. JOZSA, A. PERES, W. K. WOOTTERS ,
Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. Phys. Rev. Lett. 70, 1895-1899 (1993)
- [23] A. EKERT,
Quantum cryptography based on Bell's theorem. Phys. Rev. Lett. 67, 661–663 (1991)
- [24] N. ILIC ,
The Ekert protocol. Journal of Phy. 334 (2007)
- [25] E. WAKS, A. ZEEVI, Y. YAMAMOTO,
Security of Quantum Key Distribution with Entangled Photons Against Individual Attacks. arXiv:quant-ph/0012078
- [26] X. MA,
Quantum cryptography: theory and practice. arXiv:0808.1385
- [27] F. PATALONG,
Quantenkryptografie: Die sicherste Datenleitung der Welt. Auf: Spiegel-Online. 12. Oktober 2007. (Artikel zum Einsatz der Quantenkryptografie bei der Schweizer Parlamentswahl 2007), abgerufen am 30.10.2012
- [28] W. DÜR, G. VIDAL, J. I. CIRAC,
Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. Phys. Rev. A 62, 062314 (2000)
- [29] A. ACIN, D. BRUSS, M. LEWENSTEIN, A. SANPERA,
Classification of mixed three-qubit states. Phys. Rev. Lett. 87, 040401 (2001)
- [30] G. JAEGER,
Quantum Information: An overview. Springer, Berlin (2006): S.129
- [31] H. KAMPERMANN, O. GÜHNE, C. WILMOTT, D. BRUSS,
An algorithm for characterizing SLOCC classes of multiparticle entanglement. arXiv:1203.5872
- [32] B. JUNGNITSCH, T. MORODER, O. GÜHNE,
Taming multiparticle entanglement. Phys. Rev. Lett. 106, 190502 (2011)

- [33] B. JUNGNITSCH, T. MORODER, O. GÜHNE,
Entanglement Witnesses for Graph States: General Theory and Examples. Phys. Rev. A 84, 032310 (2011)
- [34] S. BOYD, L. VANDENBERGHE,
Convex Optimization. Cambridge University Press, Cambridge (2004)
- [35] S. BOYD, L. VANDENBERGHE,
Semidefinite Programming. SIAM Review Vol.38, No.1, pp.49-95, (1996)
- [36] F. JARRE, J. STOER,
Optimierung. Springer Verlag, Berlin (2003): S. 403ff
- [37] A. BASHAROV, A. BASHKEEV,
Atomic entanglement in the Dicke model. Laser Physics, Vol. 13, (2003)
- [38] X. PENG, J. ZHANG, J. DU, D. SUTER,
Ground state entanglement in a system with many body interactions. Phys. Rev. A 81, 042327 (2010)
- [39] C. CENCI, D. LYONS, L. SNYDER, S. WALCK,
Symmetric states: local unitary equivalence via stabilizers. arXiv/1007.3920
- [40] G.-D. LIN, S. F. YELIN,
Superradiance in spin- J particles: Effects of multiple levels. Phys. Rev. A 85, 033831 (2012)
- [41] W. WIECZOREK, R. KRISCHEK, N. KIESEL, P. MICHELBERGER, G. TOTH, H. WEINFURTER,
Experimental entanglement of a six-photon symmetric Dicke state. Phys. Rev. Lett. 103, 020504 (2009)
- [42] K. ŻYCKOWSKI, I. BENGTTSSON,
Geometry of Quantum States. Cambridge University Press, Cambridge (2008), S. 131
- [43] M. BOURENNANE, M. EIBL, CH. KURTSIEFER, S. GAERTNER, H. WEINFURTER, O. GUEHNE, P. HYLLUS, D. BRUSS, M. LEWENSTEIN, A. SANPERA,
Witnessing multipartite entanglement. Phys. Rev. Lett. 92, 087902 (2004)

- [44] G. TOTH, W. WIECZOREK, R. KRISCHEK, N. KIESEL, P. MICHELBERGER, H. WEINFURTER,
Practical methods for witnessing genuine multi-qubit entanglement in the vicinity of symmetric states. New J. Phys. 11, 083002 (2009)
- [45] A. SHAHAM, H. S. EISENBERG,
Quantum process tomography of single photon quantum channels with controllable decoherence. Phys. Scr. T147, 014029 (2012)
- [46] I. CHUANG, M. NIELSEN,
Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, Cambridge (2009): S. 373ff.
- [47] A. CLERK, M. DEVORET, S. GIRVIN, F. MARQUARDT, R. SCHOELKOPF,
Introduction to Quantum Noise, Measurement and Amplification. Rev. Mod. Phys. 82, 1155 (2010)
- [48] C. KING,
The capacity of the quantum depolarizing channel. arXiv:quant-ph/0204172
- [49] O. GÜHNE, C. LU, W. GAO, J. PAN,
Toolbox for entanglement detection and fidelity estimation. Phys. Rev. A 76, 030305 (2007)
- [50] O. GÜHNE, P. HYLLUS, D. BRUSS, A. EKERT, M. LEWENSTEIN, C. MACCHIAVELLO, A. SANPERA,
Detection of entanglement with few local measurements. Phys. Rev. A 66, 062305 (2002)
- [51] K. ZYCKOWSKI, P. HORODECKI, A. SANPERA, M. LEWENSTEIN,
On the volume of the set of mixed entangled state. Phys.Rev. A58 (1998) 883
- [52] D. DENG, J. CHEN,
Volume of Separable States for Arbitrary N-dimensional System. arXiv:0810.2020v1
- [53] H. HAEFFNER, W. HAENSEL, C. F. ROOS, J. BENHELM, D. CHEK-AL-KAR, M. CHWALLA, T. KOERBER, U. D. RAPOL, M. RIEBE, P. O. SCHMIDT, C. BECHER, O. GÜHNE, W. DÜR, R. BLATT,
Scalable multi-particle entanglement of trapped ions. Nature 438, 643-646 (2005)

- [54] ARENS ET. AL,
Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2008): S. 585ff.
- [55] G. TOTH,
Detection of multipartite entanglement in the vicinity of symmetric Dicke states.
J. Opt. Soc. Am. B 24, 275 (2007)
- [56] O. GUEHNE, G. TOTH, P. HYLLUS, H. BRIEGEL,
Bell Inequalities for Graph States. Phys. Rev. Lett. 95, 120405 (2005)
- [57] M. HUBER, P. ERKER, H. SCHIMPF, A. GABRIEL, B. HIESMAYR,
Experimentally feasible set of criteria detecting genuine multipartite entanglement in n-qubit Dicke states and in higher dimensional systems.
Phys. Rev. A 83, 040301(R) (2011)
- [58] F. SCHWABL,
Statistische Mechanik. Springer, Berlin (2006): S. 21
- [59] H. BARTSCH,
Taschenbuch mathematischer Formeln. Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig (2001): S.59
- [60] K. KÖNIGSBERGER,
Analysis 2. Springer, Berlin (2004): S.124

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate und Ergebnisse Anderer kenntlich gemacht habe.

.....
(Ort) (Datum)

.....
(Unterschrift)