

Theoretische Physik: Elektrodynamik

Übungsblatt 6

Vorlesung: Matthias Kleinmann, Übungen: Andreas Ketterer, Timo Simnacher, Fabian Bernards
 Vorlesung: Di. 10–12 (D308) und Fr. 10–12 (D308), Übungen: Fr. 8–10 (D115, B030)

Zu bearbeiten bis 29.05.2018

1. Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (3+2+3+2+3 Punkte)

Die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ lautet in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) wie folgt:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \phi} \Phi = 0, \quad (1)$$

$$\text{mit } \Delta_{\theta, \phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2)$$

- (i) Machen Sie den Separationsansatz $\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi)$ und zeigen, dass dies zu folgenden drei gewöhnlichen Differentialgleichungen führt:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 Q}{d\phi^2} + m^2 Q = 0, \quad (5)$$

mit $x = \cos \theta$.

Anleitung: Separieren Sie zuerst den Radialanteil der Laplace-Gleichung und setzen ihn gleich der Konstanten $l(l+1)$. Separieren Sie als nächstes den ϕ -abhängigen Teil und setzen ihn gleich der Konstanten $-m^2$. Machen Sie abschließend die substitution $x = \cos \theta$ um auf Gleichung (4) zu kommen.

- (ii) Wie lauten die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (3) und (5)?
 (iii) Um Gleichung (4) zu lösen, machen Sie zuerst den Ansatz $P(x) = (1-x^2)^{m/2} T(x)$ und lösen anschließend die resultierende Differentialgleichung für $T(x)$ mit einem Potenzreihenansatz $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Um die volle Punktzahl dieser Teilaufgabe zu erhalten, reicht es wenn Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_k herleiten. Es gibt zwei Extrapunkte, wenn Sie nun auch noch zeigen können, dass $P(x)$ in folgender kompakter Form dargestellt werden kann:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^l}{dx^l} P_l(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad (6)$$

wobei $P_l(x)$ die Legendre Polynome und $P_l^m(x)$ die zugeordneten Legendre Funktionen bezeichnen.

Aus dem winkelabhängigen Teil der obigen Lösung definieren wir nun folgende Funktionen:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = N_{l,m} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (7)$$

welche auch als Kugelflächenfunktionen (oder spherical harmonics) bekannt sind.

- (iv) Verifizieren Sie, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ Eigenfunktionen des winkelabhängigen Teils der Laplace-Gleichung sind:

$$\Delta_{\theta, \phi} Y_{lm}(\theta, \phi) = \lambda Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (8)$$

Wie lauten die Eigenwerte $\lambda_{l,m}$?

(v) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen orthonormal sind:

$$\int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (9)$$

Hinweis: Beachten Sie, dass für die zugeordneten Legendre Funktionen folgendes gilt: $P_l^{-m}(x) = (-1)^m (l-m)!/(l+m)! P_l^m(x)$, für $-l \leq m \leq l$. Benutzen Sie weiter die Formel (6) und partielle Integration um die Orthogonalität zu verifizieren und die Normierungskonstante $N_{l,m}$ zu bestimmen. Um die Rechnung zu vereinfachen setzen Sie die Orthogonalität der Legendre Polynome und die Normierungsbedingung $\int_{-1}^{+1} P_l(x)^2 dx = 2/(2l+1)$ voraus.

2. Randwertproblem mit azimuthaler Symmetrie (6 Punkte)

Für Probleme mit azimuthaler Symmetrie ist die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung ϕ -unabhängig ($m=0$) und lautet:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta), \quad (10)$$

wobei $P_l(\cos\theta) = P_l^{m=0}(\cos\theta)$ die Legendre'schen Polynome bezeichnen. Im Folgenden betrachten wir eine leitende Hohlkugel mit Radius a , deren beide Hälften durch einen isolierenden Ring in der Ebene $z=0$ voneinander getrennt sind. Die obere Halbkugel befinde sich auf dem Potenzial $+V$ und die untere auf dem Potenzial $-V$. Bestimmen Sie das Potenzial $\Phi(r, \theta)$ der Kugel indem Sie die Entwicklungskoeffizienten A_{lm} und B_{lm} aus den Randbedingungen bei $r=0$, $r=a$ und $r \rightarrow \infty$ bestimmen.

Hinweis: Machen Sie die Fallunterscheidung $r < a$ und $r > a$. Folgende Formel kann Ihnen bei der Berechnung der Koeffizienten von Nutzen sein:

$$\int_0^1 dx P_l(x) = \frac{(-1)^{(l-1)/2} (l-1)!}{2^l ((l+1)/2)! ((l-1)/2)!}, \quad l \text{ ungerade}. \quad (11)$$

3. Plattenkondensator mit Dielektrikum (2+2+2 Punkte)

Gegeben sei ein Plattenkondensator mit der Fläche $F = a \times b$ und Plattenabstand d . Der Raum zwischen den Kondensatorplatten sei teilweise mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_r > 1$ belegt. Wir nehmen an, dass das Dielektrikum parallel zu den Kondensatorplatten bis zu einer Länge x eingeschoben wird und damit eine Teilfläche $x \times b$ des Kondensatorzwischenraums bedeckt. Der restliche Bereich zwischen den Kondensatorplatten sei leer. Die Ladung auf den Platten sei jeweils durch Q , bzw. $-Q$, gegeben.

- (i) Berechnen Sie das $\mathbf{E}$ - und das $\mathbf{D}$ -Feld im gesamten Bereich zwischen den Kondensatorplatten.
- (ii) Berechnen Sie die elektrostatische Feldenergie W .
- (iii) Bestimmen Sie, aus der Energieänderung beim Verschieben des Dielektrikums um ein infinitesimales Längenelement dx , die auf das Dielektrikum wirkende Kraft.