Zwischenbericht

Erstes Projektjahr

„Mathematik Neu Denken“

Ein Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt

gefördert durch die

Deutsche Telekom Stiftung

Gießen / Siegen

Leitung:
Prof. Dr. A. Beutelspacher / Prof. Dr. R. Danckwerts

Oktober 2006

Inhalt

Zwischenbericht Gießener Teilprojekt **2**

Zwischenbericht Siegener Teilprojekt **215**

Zwischenbericht

Erstes Projektjahr

„Mathematik Neu Denken“

Ein Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt

gefördert durch die

Deutsche Telekom Stiftung

Giessener Teilprojekt

Leitung: Prof. Dr. A. Beutelspacher

Oktober 2006

Inhalt Projektgruppe Gießen

EINLEITUNG **2**
AGLA I UND II IN ZAHLEN **4**
VORLESUNG **5**
ÜBUNGEN **7**
PRAKTIKUM **8**
INTERNETFORUM, INTERNETPORTAL **10**
PROJEKT-PORTFOLIO **11**
WOCHENENDSEMINAR FREUSBURG **12**
ZUSAMMENTREFFEN IM MATHEMATIKUM UND MATHEMATISCHEN INSITUT GIEßEN **13**
SEMINAR PROBLEMLÖSEN **14**
FAZIT **15**
AUSBLICK **16**
LITERATUR **17**
ANHANG: **18**
DIE IM SOMMERSEMESTER 2006 IM PROJEKT IN GIEßEN BETEILIGTEN PERSONEN **18**
ANHANG: VORLESUNGSFOLIEN **19**
ANHANG: ÜBUNGEN **156**
ANHANG: PRAKTIKUM **169**
ANHANG: PORTFOLIO **197**
ANHANG: ZUSAMMENFASSUNG DER IN DEN PORTFOLIOS GEÄUßERTEN KRITIKPUNKTE **200**
ANHANG: EVALUATION DURCH DEN FACHBEREICH **205**
ANHANG: KLAUSUREN **208**

Einleitung

> *Unsere späteren Schüler sollen davon profitieren können, dass unsere Ausbildung besser an unseren Beruf angepasst war.*
>
> Katrin Steckenmesser

Das Projekt „Mathematik neu denken – Neuorientierung der Lehrerausbildung“ wurde an der Justus-Liebig-Universität Gießen im Wintersemester 2005/2006 begonnen und im Sommersemester 2006 erfolgreich fortgeführt. Dabei wurden die klassischen Vorlesungen *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LAAG I)* und *Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (LAAG II)* für Studierende mit Abschluss Diplom-Mathematik und Mathematik für Gymnasiallehrende (L3) restrukturiert.

Für die L3-Studierenden wurde ein neuer Veranstaltungsverbund erstellt, in dem sie getrennt von den Diplom-Mathematik-Studierenden durch die ersten beiden Semester geführt wurden. Zu dem Verbund zählten die vierstündige, dem Schulstoff angepasste Vorlesung, zweistündige Übungen in drei Übungsgruppen, sowie eine zusätzliches Computer-Praktikum.
Der Name *Analytische Geometrie und Lineare Algebra (AGLA)* weist auf die veränderte Schwerpunktsetzung auf Analytische Geometrie hin.

Innerhalb der drei verschiedenen Veranstaltungsformen gab es durch regelmäßige Absprachen unter den Verantwortlichen eine enge konzeptionelle und inhaltliche Abstimmung mit dem Ziel eines integrierten Verständnisses der behandelten Themen bei den Studierenden.
Methodisch und inhaltlich wurde ein auf die Bedürfnisse der zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer angepasster Veranstaltungsverbund angeboten.

Neben der Vorlesung, der Übung und dem Praktikum hatten die Studierenden auch im zweiten Semester durch das Internetportal Stud.IP die Möglichkeit, sich schnell und effizient über Ankündigungen und Termine bezüglich der AGLA zu informieren. Ein Internetforum der Arbeitsgruppe, sowie die Teilnehmer-Email-Liste im Stud.IP stellten den Studierenden weitere, sehr rege verwendete Kommunikationsmöglichkeiten zur Verfügung.

Neben der üblichen Erreichbarkeit der an der Veranstaltung Beteiligten in den Veranstaltungen, per Mail, Telefon oder persönlich im Mathematischen Institut hat Dipl.-Math. Jörn Schweisgut ein wöchentliches Tutorium eingerichtet.

> *Was mir besonders gut gefiel, war dass man in von Anfang an eine wahnsinnig gute Betreuung hatte und alles prima aufeinander abgestimmt war. […] Bisher hatte ich keinen anderen Kurs, in dem ich mich so gut aufgehoben und unterstützt fühlte*
>
> Nicole Eimer

Die enge Zusammenarbeit der Universitäten Siegen und Gießen wurde bei einem Wochenendseminar vom 17.3. bis zum 19.3.2006 sowohl unter den Projektmitarbeitern als auch unter den Studierenden beider Universitäten vertieft. An den Erfolg dieser Tagung auf der Freusburg haben wir am 24.6.2006 angeknüpft. Die Studierenden und Projektbeteiligten der Universitäten trafen sich an diesem Tag zu einem Austausch im Mathematikum und Mathematischen Institut in Gießen.

AGLA I und II in Zahlen

Zum ersten Semester (Wintersemester 2005/2006) hatten sich 64 Studierenden für die AGLA I angemeldet. Von diesen waren 44 Studierende aus dem ersten Semester und 20 aus höheren Semestern. Von den 44 Erstsemestlern haben 38 das Modul bestanden. Von denen aus höheren Semestern waren es 17.

Zum Sommersemester haben 36 Studierende im inzwischen zweiten Semester und 7 Studierende aus höheren Semestern an der AGLA II teilgenommen. Zu Beginn des Sommersemesters haben von den 36 Studierenden eine Studentin die Universität und ein Student das Studienfach auf Lehramt Haupt- und Realschule gewechselt. Die verbliebenen 41 Studierenden haben alle das Modul AGLA II im Sommersemester erfolgreich abgeschlossen.

Betrachtet man also lediglich[1] die 44 Studienanfänger des Wintersemesters 2005/2006, so haben 34 von Ihnen (77%) die beiden Module erfolgreich abgeschlossen.

Zum Wintersemester 2006/2007 hat sich die Zahl der Studierenden, die sich für Mathematik Gymnasiallehramt eingeschrieben haben von 51 auf 88 erhöht. Die Anzahl der endgültigen Anmeldungen für die AGLA I lag zum Zeitpunkt der Erstellung dieses Berichts noch nicht vor, es ist aber zu vermuten, dass sich die Zahl entsprechend von 44 auf ca. 80 Studierende erhöhen wird.

[1] Die Zahlen der Studierenden aus höheren Semestern sind weniger aussagekräftig, da diese Studierenden zum Teil diese beiden Module, insbesondere das zweite aufgrund einer älteren Studienordnung nicht bestehen müssen.

Vorlesung

> *Besonders gut gefallen hat mir das Klima während der Vorlesung. Das Verhältnis ist wesentlich persönlicher als es vergleichsweise in den anderen Fächern ist.*
>
> Ehsan Saeidi

Die Vorlesung wurde von Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher vierstündig gelesen. Dabei wurden Präsentationsfolien verwendet, die den Studierenden bereits vor den Vorlesungsterminen über das Online-Portal Stud.IP zur Verfügung gestellt wurden. Der Einsatz der Folien bietet viele Vorteile. Die Studierenden können sich vor und nach den Vorlesungen mit den Lerninhalten beschäftigen. Sie müssen in der Vorlesung nichts mitschreiben, können sich ein paar Anmerkungen notieren und sich so auf die Erklärungen konzentrieren und gezielt Fragen an Prof. Dr. Beutelspacher richten. Während den Vorlesungen hat Prof. Dr. Beutelspacher den Studierenden die Möglichkeit gegeben, selbst aktiv einfache Beweise durchzuführen oder Zusammenhänge zu erschließen, um eine Balance zwischen Instruktion und Konstruktion herzustellen.

Allgemein hat sich in den letzten Jahren die Vorlesung „Lineare Algebra“ bundesweit sehr in Richtung Abstraktion entwickelt: Die grundlegenden algebraischen Strukturen stehen eindeutig im Vordergrund, Zeit für geometrische Veranschaulichung oder praktische Anwendung bleibt de facto nicht. Hier setzt die Gießener Veranstaltung „Analytische Geometrie und Lineare Algebra“ einen dem Lehramtsstudium angemessenen Kontrapunkt. Sie setzt auf die Kraft der Anschauung und damit auf das Primat der Geometrie.

Die ersten beiden Kapitel der Vorlesung („Der dreidimensionale Raum“ und „Lineare Gleichungssysteme“) knüpfen bewusst und explizit an die Vorerfahrungen der Studierenden an und bereiten gleichzeitig die spätere Theorie vor. Dieses bottom-up-Modell hat alle sehr überzeugt; dies kann man auch daran erkennen, dass die abstrakten Konzepte in vielerlei Hinsicht den Studierenden auf Basis der konkreten Erfahrungen viel eingängiger waren als man das traditionelle beobachten kann. Zudem wurde großer Wert auf einen stärkeren Bezug zu außermathematischen Anwendungen mit Hinblick auf die Relevanz für die Berufspraxis gelegt.[1]

[1] „Die Qualität der Erklärung entscheidet nicht nur darüber, ob und wie gut Information verarbeitet wir, sondern kann auch Neugier und Sachinteresse wecken, z. B. durch die Herstellung aktueller Bezüge, durch Aufzeigen der Relevanz für die Berufspraxis, Benutzung von Paradoxien sowie den Einsatz von Beispielen Analogien und Metaphern.“ (in *Helmke, Schrader*: *Hochschuldidaktik* – Schlüsselmerkmale erfolgreicher Lehre. In Rost, D.H. (Hg): *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie.* Seite 252.)

Durch die Wechselwirkung zwischen der deduktiv organisierten Mathematik und ihren Anwendungen in der Schule wurde ein gültiges, prozessorientiertes Bild vermittelt.

Da Prof. Nickel im kommenden Wintersemester an der Universität Siegen die Lineare Algebra für die Lehramtsstudierenden lesen wird, konnten sich Prof. Beutelspacher und Prof. Nickel auch über inhaltliche Aspekte für die kommende zweite Projektphase austauschen und werden eng zusammenarbeiten.

Übungen

> *Besonders gut gefallen hat mir persönlich die Abstimmung zwischen den einzelnen Kursen (Vorlesung, Übung, Praktikum). In keinen anderen Fachbereich ist der Ablauf so klar und gut gegliedert.*
>
> Sebastian Volp

Die Übungen wurden in drei Übungsgruppen jeweils zweistündig durchgeführt. In den Übungen wurde der in der Vorlesung behandelte Stoff vertieft und geübt. Die von der klassischen Mathematiker- und Mathematiklehrerausbildung übliche Übungsorganisation, in der überwiegend Hausaufgaben gestellt und in den Übungsstunden die „perfekten" Musterlösungen ritualisiert vorgeführt wurden, wurde umstrukturiert. So wurde eine Abkehr von der bisher üblichen Oganisationsform der LAAG-Übungen mit alleinigem Vorrechnen der Hausaufgaben erzielt.

In den *AGLA* – Übungen lag der Schwerpunkt auf der Bearbeitung der Präsenzaufgaben durch die Studierenden. In den Übungen wurde damit auf eine aktive Konstruktion des Wissens durch die Lernenden gesetzt. Die Rolle Übungsgruppenleiterinnen (Eva-Maria Brand und Sabine Post) und Übungsgruppenleiter (Eduard Kromer) wandelte sich dadurch vom Instruktor zum Moderator.

Die Übungen wurden von Dipl.-Math. Jörn Schweisgut in enger Kooperation und Absprache mit Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher konzipiert und organisiert. Daher konnten zum Vorlesungsstoff passende Aufgaben gestellt werden und die Studierenden konnten als Lernende die für den Mathematikunterricht wichtige Balance[1] von Prozessorientierung und Produktorientierung bei den Aufgaben erleben.

Für die zweite Projektphase ist ein enge Kooperation unter den Mitarbeitern in den Veranstaltungen Lineare Algebra (Universität Siegen) und AGLA I (Universität Gießen) angestrebt.

[1] Vgl. Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand 2001, S.4

Praktikum

> *Dieses Praktikum mit dem Mathematikprogramm „Derive Version 6.1“ war in meinen Augen das absolute Highlight der zwei Semester. Mancher Stoff […] wurde mir durch die praktischen Übungen am Laptop erst richtig klar.*
>
> Jennifer Bäcker

Neben der Orientierung an geometrischer Anschauung ist das Praktikum ein Highlight des Gießener Projekts. Wir waren von Anfang an der Überzeugung, dass Lehramtsstudierende durchgängig einen sinnvollen Umgang mit den neuen Medien, insbesondere mit Computeralgebrasystemen haben sollten. Nur so kann es gelingen, dass die Lehrer in Zukunft den Rechner souverän einsetzen und insbesondere über Einsatzmöglichkeiten und deren Grenzen genau Bescheid wissen.

Wir hatten das große Glück, mit Herrn Dr. Weller einen ausgesprochenen Experten auf diesem Gebiet gewinnen zu können. Er hat jahrzehntelange, stets neu reflektierte Erfahrung im praktischen Einsatz von Rechnern in der Schule.

In Zusammenarbeit mit Dipl.-Math. Maren van Kessel führte Herr Dr. Weller das Praktikum in zwei Gruppen durch. Diese zusätzliche Veranstaltung ist im Studienverlaufsplan des modularisierten L3-Studiums Mathematik nicht vorgesehen.

Das Praktikum hatte im Wesentlichen zwei Ziele. Zum einen sollte den Studierenden ein Computeralgebrasystem (am Beispiel von Derive 6) als leistungsfähiges Werkzeug zur Bearbeitung und (dynamischen) Visualisierung eigener mathematischer Problemstellungen und Modellbildungen, aber auch zur Verwendung im Mathematikunterricht der Schule vorgestellt und zugänglich gemacht werden. Zum anderen wurden gerade diese Möglichkeiten genutzt, um den in der Vorlesung und den Übungen behandelten Lerninhalt der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra zu veranschaulichen und zu bearbeiten.

Im Rahmen des Praktikums schulten die Studierenden ihre Grundvorstellungen mathematischer Begriffe (z. B. platonische Körper, Raumkurven, Vektorräume) und durch heuristisch-

experimentelles Arbeiten ihre Problemlösekompetenz.[1] Das Praktikum sollte die Studierenden zu selbstständigerer Auseinandersetzung mit der Mathematik anregen, eine Forderung, die die Studierenden selbst an ihren zukünftigen Mathematikunterricht stellen.

[1] Problemlösendes Lernen ist eine, wenn nicht die notwendige Qualifikation für eine ungewisse Zukunft (vgl. Wernig/Kriwet 1999 S.7.)

Internetforum, Internetportal

In einem Internetportal des Fachbereiches (http://elearning.uni-giessen.de/studip) werden die die Veranstaltungen mit einer näheren Beschreibungen angeboten und verwaltet.

Den Studierenden werden Dateien (Folien zur Vorlesung, Übungsblätter, Übungen und Dateien zum Praktikum, etc.) zum Download angeboten. Termine und Ankündigungen werden verwaltet und Informationen zur Vorlesung, Übungen, Praktikum etc. werden den Studierenden über ein News-Board oder einen E-Mail-Verteiler zugänglich gemacht.

Neben diesem Portal haben wir unter http://www.uni-giessen.de/diskfor ein Diskussionsforum zur AGLA installiert, an dem sich die Studierenden anmelden können. Dort konnten sie neben organisatorischen Fragen vor allem inhaltliche Fragen bezüglich des Vorlesungs-, Praktikums- oder Übungsstoffes stellen. Von dieser Möglichkeit wurde mit nahezu 1000 Beiträgen im Laufe des Projektes rege Gebrauch gemacht.

Projekt-Portfolio

Im Wintersemester und im Sommersemester konnten die Studierenden jeweils ein Projekt-Portfolio erstellen. Während im Wintersemester fünf Themen mit starkem Vorlesungsbezug (platonische Körper, vierdimensionaler Würfel, Seifenblasen, kleine Vektorräume, Retro-reflexion) gestellt wurden, gliederte sich das Portfolio im Sommersemester in zwei Teile.

Zum einen konnten sie sich über das Projekt AGLA äußern und ihre positive und negative Kritik am Projekt äußern. Dieser Projektteil dient einerseits der Evaluation des Projektes und als Rückmeldung für die Projektmitarbeiter, zum anderen reflektieren die Studierenden durch die Arbeit an der Kritik über die beiden vergangenen Semester, ihr Studium und veranschaulichen sich so ihren bisher erreichten Erfolg in ihrem Studium.

Der zweite Teil des Portfolios im Sommersemester bestand darin, einen von sechs für die AGLA wichtigen Mathematikern (Leibniz, Grassmann, Cayley, Hamilton, Euler, Gauß) darzustellen. Das Portfolio trägt dazu bei, dass die Studierenden die erlernte Mathematik historisch und von ihrer Entstehung besser einordnen und so die Bedeutung einzelner Entdeckungen besser einschätzen und bewerten können.

In die Bearbeitung der Projekte haben die Studierenden viel Zeit investiert und sich aktiv damit auseinandergesetzt.

Wochenendseminar Freusburg

Die Treffen mit den Studenten aus Siegen boten mir die Möglichkeit mich mit den anderen Studenten auszutauschen und gegenseitig von Problemen zu berichten. Die Treffen waren gut organisiert und ließen keine Wünsche offen.

Judith Podeschwa

Ein zentraler Punkt des Projektes ist die enge Zusammenarbeit der Universitäten Siegen und Gießen – sowohl auf der Ebene der für das Projekt Verantwortlichen, als auch unter den Studierenden. Daher wurde wie geplant vom 17.3. bis zum 19.3.2006 eine gemeinsame Tagung der beiden Projektgruppen mit den Studierenden durchgeführt.

Das Seminar untergliederte sich in verschiedene Themenschwerpunkte mit unterschiedlichen Anforderungen an die Studierenden. So konnten die Studierenden von dieser Veranstaltung nicht nur im inhaltlich-mathematischen Bereich profitieren, sondern auch Vortragstechniken erlernen, ihre sozialen Kompetenzen und ihre Kommunikationsfähigkeit/Diskussionsfähigkeit verbessern, sich besser kennen lernen und Erfahrungen austauschen.

Ein Höhepunkt des Wochenendseminars war der Vortrag von Frau B. Barzel (StD' - Universität Duisburg-Essen) über offenen Mathematikunterricht, der die Studierenden zum Überdenken ihrer bisherigen Erfahrungen anregte und eine Diskussionsgrundlage schaffte.

Die Giessener Studierenden hatten im Rahmen ihres Praktikums Workshops mit Derive erstellt und ausgearbeitet. Sie stellten den Siegener Studierenden ihre Themen vor und boten ihnen die Möglichkeit, aktiv am PC erste Erfahrungen mit Computeralgebrasystemen zu machen. Im Gegenzug haben die Siegener Studierenden Vorträge zur Schulanalysis vom höheren Standpunkt und zur Didaktik der Analysis für die Giessener Studierenden vorbereitet.

Ein wichtiger Aspekt des Wochenendseminars war die Reflexion und Thematisierung des eigenen Lernprozesses in der Schulzeit und im Studium. Daher diskutierten die Studierenden in einer Diskussionsrunde, geleitet von Herrn Dr. D. Vogel, mit aktiven Lehrenden und Seminarausbildern über die Anforderungen an Lehrerinnen und Lehrer und die Kompetenzen, die die Studierenden als zukünftige Lehrende während ihres Studiums erwerben sollten.

Zusammentreffen im Mathematikum und Mathematischen Insitut Gießen

Die enge Zusammenarbeit und Kontakt insbesondere unter den Studierenden der beiden Projektgruppen konnte mit dem Treffen am 24.6.2006 im Mathematikum Gießen noch intensiviert werden.

Zusammen konnten die Studierenden an den Exponaten des Mathematikums experimentieren, die für die jeweiligen Vorlesungen (Analysis bzw. Analytische Geometrie und Lineare Algebra) relevanten Experimente identifizieren, die darin befindliche Mathematik erkunden und sich darüber austauschen.

Seminar Problemlösen

Im Studienverlaufsplan des modularisierten Studiums für das gymnasiale Lehramt Mathematik ist im zweiten oder dritten Semester ein Seminar vorgesehen. Neben den klassischen Seminaren, die vom Institut angeboten werden, wurde von Prof. Beutelspacher speziell für die Studierenden des Projektes ein eigenes Seminar zum Thema „Problemlösen“ anbieten, um die heuristischen Fähigkeiten der Studierenden zu schulen.

Um problemlösend tätig zu werden, müssen heuristische Verfahren als Grundvoraussetzungen gelehrt worden sein und vom Problemlöser angewandt werden. Heuristische Fähigkeiten sind Grundlage für eine verständige Erschließung unserer Welt. Sie sind in eine intellektuelle Haltung eingebettet, zu der auch die Bereitschaft gehört, sich frei, kreativ und positiv gestimmt einer gedanklichen Herausforderung zu stellen.[1]

In diesem Seminar wurden die Prinzipien des aktiv-entdeckenden Lernens fachbezogen erlebt. Dies deckt sich mit den Forderungen aus den PISA- Ergebnissen von 2000 und 2003, die den deutschen Schülern eine relativ schlechte Problemlösekompetenz attestierten.[2]
Um der starken Nachfrage an den Seminaren durch die Studierenden im Projekt nachzukommen, wird Prof. Beutelspacher im Sinne des Projektes im kommenden Wintersemester sogar noch zwei zusätzliche Seminare zur elementaren Algebra mit starkem Bezug zum Schulstoff vom höheren Standpunkt anbieten.

[1] Vgl. Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand 2001, S.75/76.

[2] Im Jahre 2000 lagen die deutschen Schüler in der PISA-Studie mit ihren naturwissenschaftlichen Leistungen 13 Punkte unter dem OECD Durchschnitt. Vgl. Prenzel/Rost/Senkbeil/Häußler/Klopp 2001, S. 229 und Rost/Walter/Carstensen/Senkbeil/Prenzel 2004, S. 132.

Fazit

> *Ich erachte es für vollkommen richtig, auch in Zukunft die Lehramts- von den Diplom-Studenten zu trennen. Diese Aufgliederung sollte sich dann jedoch auf das gesamte Studium beziehen.*
>
> Mareike Behrens

Das erste Projektjahr war äußerst erfolgreich. Die Aussagen der Studierenden beispielsweise im Portfolio und die deutlich gestiegene Nachfrage nach diesem Studiengang und Projekt (über 70% mehr eingeschriebene Studierende im kommenden Wintersemester) belegen dies.

Neben der Nachfrage nach einer Fortführung des Projektes für zukünftige Studienanfänger auch über das Leuchtturmprojekt hinaus wurde von Seiten der Studierenden mehrfach der Wunsch geäußert, auch die anderen Veranstaltungen des Lehramtsstudiums einzubeziehen und im Sinne des Projektes umzustrukturieren.

Die größere Relevanz des Studiums für den zukünftigen Beruf führte zu einer deutlich höheren intrinsischen Motivation bei den Studierenden, wie es den Aussagen im Portfolio zu entnehmen ist.

Von Seiten der betreuenden Dozenten und Mitarbeiter wurde das Projekt mit sehr hohem Engagement durchgeführt, da sie von den Zielen und Methoden des Projektes überzeugt sind. Dieses Engagement übertrug sich auf die Studierenden, die sich begeistert, hoch motiviert und sehr engagiert in die ihnen gebotenen Veranstaltungen des Projektes einbrachten.

Ausblick

Das Projekt ist für die Studienanfänger des Wintersemesters 2005/2006 nun eigentlich abgeschlossen. Dennoch werden wir diese Studierenden im kommenden Wintersemester in einer zusätzlichen Vorlesung und zwei Seminaren zur elementaren Algebra weiter im Sinne des Projektes mit speziell für die Bedürfnisse der zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer zugeschnittenen Veranstaltungen betreut. Dies verstetigt den Erfolg des Projektes bei diesen Studierenden und erleichtert ihnen den Übergang zum bisher nicht umstrukturierten weiteren Mathematikstudium. In diesem Veranstaltungskomplex wird die Schulalgebra des 5. bis 10. Schuljahres „vom höheren Standpunkt“ behandelt. Das Prinzip „Instruktion und Konstruktion“ wird auch hier explizit fortgeführt, denn die vier Wochenstunden sind in eine zweistündige Vorlesung (inklusive Übungsphasen und ein zweistündiges Seminar (in zwei Gruppen) aufgeteilt. Diese Veranstaltung, die das Projekt hervorragend ergänzt und weiterführt, wird nicht mit Mitteln des Projekts finanziert.

Die momentan im Projekt betreuten Studierenden sollen auch im Anschluss an die Veranstaltungen von unserer Arbeitsgruppe betreut und beobachtet werden.

Das Projekt soll im Wintersemester 2006/2007 und Sommersemester 2007 mit den neuen Studienanfängern wiederholt werden. Dabei wird der gewählte Ansatz fortgeschrieben und verbessert. Insbesondere ist zusätzlich ein intensiver Austausch mit der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Nickel in Siegen geplant, der die dortige „Lineare Algebra“ für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten liest.

Literatur

- **Borneleit, P.; Danckwerts, R.; Henn, H.-W.; Weigand, H.-G.** Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe (Verkürzte Fassung). In: Journal für Mathematikdidaktik 22 (2001) Heft 1, S. 75-76.

- **Prenzel, M.; Rost, J.; Senkbeil, M. Häußler, P; Klopp, A.** Naturwissenschaften im internationalen Vergleich. In: Baumert, J.; Klieme, E.; Neubrand, M.; Pernzel, M. Schiefele, U.; Schneider, W.; Stanat, P.; Tillmann, K.; Weiß, M. (Hg.). Pisa 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Leske und Budrich, 2001, Kapitel 4, S. 129-243.

- **Rost, J.; Walter, O.; Carstensen, C.; Senkbeil, M.; Prenzel, M.** Naturwissenschaftliche Kompentenz. In: Prenzel, M.; Baumert, J.; Blum, W.; Lehmann, R.; Leutner, D.; Neubrand, M.; Pekrun, R.; Rolff, H.; Rost, J.; Schiefele, U. (Hg). Pisa 2003 – Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Waxmann Verlag GmbH 2004, Kapitel 4, S. 111-145.

- **Helmke, A.; Schrader, F.-W.** Hochschuldidaktik. In Rost, D.H. (Hg.) – Handwörterbuch Pädagogische Psychologie, Beltz Psychologie Verlags Union, Weinheim 2001, S. 249-254.

- **Wernig, R.; Kriwet, I.** Problemlösendes Lernen. In: Pädagogik Heft 10, 1999, S. 7-11.

Anhang:

Die im Sommersemester 2006 im Projekt in Gießen beteiligten Personen

- **Professor:** Dr. Albrecht Beutelspacher
- **Lehrbeauftragter:** Dr. Hubert Weller
- **Wissenschaftlicher Mitarbeiter:** Dipl.-Math. Jörn Schweisgut
- **Wissenschaftliche Hilfskräfte:**
    - Dipl.-Math. Maren van Kessel
    - Dipl.-Math. Björn Fay
- **Studentische Hilfskräfte:**
    - Eva-Maria Brand
    - Sabine Post
    - Eduard Kromer

Analytische Geometrie und Linearen Algebra II

Folienskript zur Vorlesung

Die Vorlesung

- **Termin: Mo, Do, 8:15 – 10:00 in HS II**
- **Besprechen der Folien**
- **Erörterung der Inhalte**

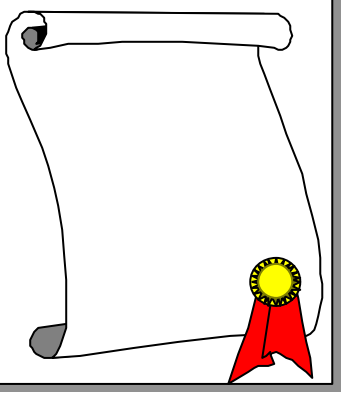
Praktikum

- **Termine: dienstags**
  - 10-12 Uhr im MZVG 9
    für Studierende **mit Laptop**
    (Laptop und Mehrfachsteckdose mitbringen)
  - 12-14 Uhr im HRZ* Raum 14 für Studierende **ohne Laptop**
    (nur begrenzte Kapazität)
    ***Hier gibt es Ausnahmen!** – Näheres im Stud.IP bzw. Praktikum

Modulprüfung

Sie können maximal 100 Punkte erringen.

- Übungsaufgaben: 20 Punkte
- Klausuren: 25 + 30 Punkte
- Mitarbeit in den Übungen 5 Punkte
- Praktikum: 10 Punkte
- Portfolio: 10 Punkte



© Beutelspacher
April 2006

Klausurtermine

Klausurtermine

- **1. Klausur am Samstag, 10.06.2006, Hörsäle II und III**
- **2. Klausur am Samstag, 15.07.2006, Hörsäle II und III**

Zugelassene Hilfsmittel: Keine

© Beutelspacher
April 2006

Übungsgruppen

- **Di 8 – 10 Raum 8, MZVG**
- **Di 14 - 16 Raum 9, MZVG**
- **Di 16 - 18 Raum 9, MZVG**

Beginn: 25.04.2006

© Beutelspacher
April 2006

Kapitel 4
Lineare Abbildungen

Inhalt

4.1 Abbildungen des dreidimensionalen Raums

$\tau_{A,B}$

4.2 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

$f: V \rightarrow W$

4.3 Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen

${}_B M_C(f)$

4.4 Der Homomorphiesatz

$V / Kern(f) \cong Bild(f)$

© Beutelspacher
Januar 2006

4.1 Abbildungen im dreidimensionalen Raum

Wir betrachten den dreidimensionalen Raum, den wir uns innerhalb der analytischen Geometrie als $\mathbf{R}^3$ vorstellen.

Definition. Eine **Translation** (auch **Verschiebung** genannt) ist eine Abbildung der Form

$$(x, y, z) \mapsto (x+a, y+b, z+c),$$

wobei a, b, c feste reelle Zahlen sind.

Mit anderen Worten: Zu jedem Punkt wird ein fester Vektor (a, b, c) addiert.

Beispiele: (a, b, c) = (0, 0, 0): Identität; (a, b, c) = (1, 0, 0): Verschiebung in x-Richtung.

© Beutelspacher
Januar 2006

Wie viele Translationen gibt es?

4.1.1 Satz / Definition. Seien zwei Punkte P = (x, y, z) und P‘ = (x‘, y‘, z‘) gegeben, dann gibt es genau eine Translation, die P auf P‘ abbildet. Wir bezeichnen diese Translation mit $\tau_{P,P'}$ („tau“).

Beweis. Eine durch (a, b, c) beschriebene Translation bildet genau dann P auf P‘ ab, wenn x‘ = x+a, y‘ = y+b, z‘ = z+c, also

$$a = x' - x,\ b = y' - y,\ c = z' - z$$

ist. Dies zeigt die Existenz und die Eindeutigkeit.

Spezialfall: $\tau_{A,A} = \mathrm{id}$. Ferner gilt: $\tau_{A,B}(C) = C \Rightarrow A = B \Rightarrow \tau_{A,B} = \mathrm{id}$.

Außerdem: $\tau_{A,B}(C) = D \Rightarrow \tau_{A,B} = \tau_{C,D}$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Wann ist $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$?

4.1.2 Satz („Parallelogrammeigenschaft“). Seien A, B, C nichtkollineare Punkte. Dann gilt $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$ genau dann, wenn die Punkte ABDC ein Parallelogramm bilden.

Beweis. Nach Definition einer Translation gilt $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$ genau dann, wenn es einen Punkt P = (a, b, c) gibt mit A + P = B und C + P = D.

Wenn A + P = B und C + P = D gilt, dann sind die Geraden AB und CD, sowie die Geraden AC und BD parallel:

Wegen B – A = P = D – C sind AB und CD parallel (Definition).
Wegen D – B = (C+P – (A+P)) = C – A sind auch AC und BD parallel.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis, 2. Teil

Sei umgekehrt ABDC ein Parallelogramm. Seien B = A+P, D = C+Q, C = A+R, D = B+S. Dann ist

D = B + S = A+P+S und D = C+Q = A+R+Q, also P+S = R+Q.

Da AB und CD parallel sind, ist Q (= D – C) ein Vielfaches von P (= B – A), etwa Q = kP. Ebenso ist S ein Vielfaches von R, etwa S = hR.

Aus P+S = Q+R folgt jetzt P+hR = R+kP, also (h–1)R = (k–1)P. Da die Punkte A, B, C nichtkollinear sind, kann nicht R ein Vielfaches von P sein. Also ist h–1 = 0 = k–1, und also P = Q. Das bedeutet $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Anwendungen

- Konstruktion des Bildes eines Punkts.
- Jede Translation $\tau_{A,B}$ ist gleich einer Translation $\tau_{O,P}$. (Wähle P als vierte Ecke des Parallelogramms mit den Ecken O, A, B.)

© Beutelspacher
Januar 2006

Was ist ein Vektor?

Man sagt oft: Ein „Vektor“ ist ein „Pfeil“ $\overrightarrow{AB}$ von A nach B. Man spricht auch von einem „Ortsvektor“ („Pfeil“ $\overrightarrow{OP}$ von O nach P).

Besser: Ein „Vektor“ entspricht („ist“) einer Translation $\tau_{A,B}$. Ein „Ortsvektor“ entspricht („ist“) einer Translation $\tau_{O,P}$.

Damit hat man folgende Beziehungen:

Punkt P des $R^n \leftrightarrow$ Vektor $\leftrightarrow$ Ortsvektor $\overrightarrow{OP} \leftrightarrow$ Translation $\tau_{O,P}$ $\leftrightarrow$ Translation $\tau_{A,B} \leftrightarrow$ Vektor $\overrightarrow{AB}$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Geometrische Eigenschaften einer Translation

4.1.3 Satz. Sei $\tau = \tau_{A,B}$ eine Translation, Dann gilt

(a) τ führt die Punkte einer beliebigen Geraden g wieder in die Punkte einer Geraden g‘ über. (Man nennt eine solche Abbildung eine **Kollineation**.)

(b) Die Geraden g und g‘ sind parallel.

(c) Es gibt eine Parallelenschar, bei der alle Geraden auf sich selbst abgebildet werden.

Beweis. Die Translation τ sei durch (a, b, c) gegeben.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis

(a) Sei g die Gerade, deren Punkte die Form $k(a_2 – a_1, b_2 – b_1, c_2 – c_1) + (a_1, b_1, c_1)$ haben. Sei $P_3 = k(a_2 – a_1, b_2 – b_1, c_2 – c_1) + (a_1, b_1, c_1)$ ein dritter Punkte auf der Geraden durch $P_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $P_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Diese Punkte werden durch τ abgebildet auf

$\tau(P_1) = (a_1+a, b_1+b, c_1+c)$, $\tau(P_2) = (a_2+a, b_2+b, c_2+c)$, $\tau(P_3) = k(a_2 – a_1, b_2 – b_1, c_2 – c_1) + (a_1+a, b_1+b, c_1+c)$.

Dann liegt auch $\tau(P_3)$ auf der Geraden durch $\tau(P_1)$ und $\tau(P_2)$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis (b), (c)

(b) Die Geraden g durch $P_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $P_2 = (a_2, b_2, c_2)$ und g' durch $\tau(P_1) = (a_1+a, b_1+b, c_1+c)$, $\tau(P_2) = (a_2+a, b_2+b, c_2+c)$ sind parallel, da $(a_2+a, b_2+b, c_2+c) – (a_1+a, b_1+b, c_1+c) = (a_1, b_1, c_1) – (a_2, b_2, c_2)$ gilt.

(c) Alle Geraden der Parallelenschar von AB werden unter τ auf sich selbst abgebildet (Parallelogrammeigenschaft).

© Beutelspacher
Januar 2006

Punktspiegelungen

Die Spiegelung σ an einem Punkt Z (Punktspiegelung) hat die Eigenschaft, dass für jeden Punkt $P \neq Z$ gilt, dass Z der Mittelpunkt von P und $P' = \sigma(P)$ ist.

Das bedeutet: Sei $Z = (a, b, c)$, $P = (x, y, z)$ $P' = (x', y', z')$. Dann ist $(a, b, c) = Z = ((x+x')/2, (y+y')/2, (z+z')/2)$. Das bedeutet: $2a – x = x'$, usw. Insgesamt folgt: $x' = 2a – x$, $y' = 2b – y$, $z' = 2c – z$. Dies nehmen wir als Definition:

Definition. Die **Punktspiegelung** $\sigma = \sigma_Z$ am Punkt $Z = (a, b, c)$ bildet einen Punkt $P = (x, y, z)$ ab auf $P' = (2a – x, 2b – y, 2c – z)$.

Spezialfall: $Z = O$. Dann ist $P' = (–x, –y, –z)$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Produkt von Punktspiegelungen

4.1.4 Satz. Seien P und Q Punkte. Sei R der Punkt mit der Eigenschaft, dass Q der Mittelpunkt von P und R ist. Dann gilt

(a) $\sigma_Q \cdot \sigma_P = \tau_{P,R} = \sigma_R \cdot \sigma_Q$.

(b) Ein Produkt von zwei Punktspiegelungen ist eine Translation

(c) Jede Translation kann als Produkt von zwei Punktspiegelungen geschrieben werden.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis

Beweis. (a) Sei P = (a, b, c), Q = (d, e, f). Dann gilt:

$\sigma_Q \cdot \sigma_P (x, y, z) = \sigma_Q(2a - x, 2b - y, 2c - z)$

$= (2d - (2a - x), 2e - (2b - y), 2f - (2c - z))$

$= (x + 2(d - a), y + 2(e - b), z + 2(f - c))$.

Da R = (d, e, f) + (d – a, e – b, f – c) = (2d – a, 2e – b, 2f – c) ist, gilt R – P = (2d – 2a, 2e – 2b, 2f – 2c).

Insgesamt folgt $\sigma_Q \cdot \sigma_P = \tau_{P,R}$.

(b) und (c) folgen direkt aus (a).

© Beutelspacher
Januar 2006

Spiegelungen

Definition. Eine **Spiegelung** an der Ebene E (der **Achse**) ist eine Abbildung $\sigma = \sigma_E$, die folgendermaßen definiert ist:

- $\sigma(P) = P$, falls P ein Punkt von E ist

- $\sigma(P) = Q$, wobei Q so gewählt ist, dass E die Mittelsenkrechte von PQ ist.

Konstruktion: Um den Bildpunkt Q eines Punktes P zu konstruieren, fällt man das Lot von P auf E (Schnittpunkt S), verlängert das Lot auf die andere Seite von E und konstruiert den Punkt Q mit $|QS| = |PS|$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Erste Eigenschaften einer Spiegelung

4.1.5 Satz. Sei $\sigma = \sigma_E$ eine Spiegelung. Dann gfi8lt

(a) $\sigma\sigma = id$. (Man sagt auch: s hat „Ordnung 2“).

(b) Ein Punkt bleibt unter s genau dann fest, wenn er auf E liegt.

(c) Eine Gerade wird unter s genau dann auf sich selbst abgebildet, wenn sie senkrecht auf E steht.

Beweis. (a) und (b) folgen aus der Konstruktion.

(c) Dass jede Gerade, die senkrecht auf E steht, fest bleibt, folgt ebenfalls aus der Konstruktion.

Umgekehrt: Eine Gerade, die nicht senkrecht auf E steht, bleibt unter σ nicht fest: ÜA.

© Beutelspacher
Januar 2006

Spiegelungen und Translationen

4.1.5 Satz. (a) Die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an parallelen Ebenen ist eine Translation.

(b) Jede Translation lässt sich als Produkt von Spiegelungen darstellen, deren Spiegelachsen parallele Ebenen sind.

Beweis. (a) Seien E und E‘ parallele Ebenen mit Abstand d. Sowohl bei Anwendung von σ_E als auch bei $\sigma_{E'}$ bleiben die Geraden senkrecht zu E bzw. E‘ fest. Also wird jeder Punkt P bei der Hintereinanderausführung $\tau = \sigma_{E'} \sigma_E$ auf der Senkrechten zu E durch P bewegt, und zwar in Richtung von E auf E‘ um das Doppelte des Abstands von E und E‘. Also ist τ eine Translation.
(b) Umgekehrte Konstruktion: ÜA.

© Beutelspacher
Januar 2006

Drehungen

Definition. Eine **Drehung** (auch **Rotation** genannt) um eine Gerade g (ihre **Achse**) und um den Winkel α ist eine Abbildung $r = \rho(g, \alpha)$, die wie folgt definiert ist:

$\rho(P) = P$, falls P auf g liegt

$\rho(P) = Q$, wobei Q folgende Bedingungen erfüllt:

- Q liegt in der Ebene W durch P, die senkrecht zu g steht,
- Q und P haben den gleichen Abstand von g,
- der Winkel QSP hat den Wert α, wobei S der Schnittpunkt von E mit g ist.

© Beutelspacher
Januar 2006

Spiegelungen und Drehungen

4.1.6 Satz. (a) Seien E und E‘ Ebenen, die sich in einer Geraden g schneiden. Dann ist die Hintereinanderausführung von σ_E und $\sigma_{E'}$ eine Drehung um die Achse g.

(b) Jede Drehung um die Achse g lässt sich als Produkt von Spiegelungen darstellen, deren Spiegelachsen Ebenen durch g sind.

Hinweis zum Beweis. Der Drehwinkel ist doppelt so groß wie der Winkel, den die beiden Ebenen einschließen.

© Beutelspacher
Januar 2006

4.2 Definition und grundlegende Eigenschaften

„Lineare“ Abbildungen – Ziele: (a) Vergleich von Vektorräumen. Sind zwei gegebene Vektorräume „wesensgleich“ oder grundsätzlich verschieden?
(b) Vergleich von Objekten innerhalb eines Vektorraums: Sind alle Basen gleichberechtigt?

Definition. Seien V, W Vektorräume über demselben Körper K. Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt eine **lineare Abbildung** (oder auch **Homomorphismus**), falls für alle $v, v' \in V$ und alle $k \in K$ gilt:

Additivität: $f(v + v') = f(v) + f(v')$,
Homogenität: $f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Einfache Beispiele

(0) Die **Nullabbildung** (diejenige Abbildung, die jeden Vektor von V auf den Nullvektor von W abbildet) ist eine lineare Abbildung.

(1) Die **identische Abbildung** id_V auf V ($id_V: v \mapsto v$) ist eine lineare Abbildung von V in sich.

(2) Sei V ein K-Vektorraum, und sei $k_0 \in K$. Dann ist die Abbildung $f: v \mapsto k_0 v$, eine lineare Abbildung von V in sich. Denn:

$$f(v + v') = k_0(v + v') = k_0 v + k_0 v' = f(v) + f(v')$$

und

$$f(kv) = k_0(kv) = (k_0 k)v = (k k_0)v = k(k_0 v) = k \cdot f(v).$$

$k_0 = 0$: Nullabbildung, $k_0 = 1$: identische Abbildung.

© Beutelspacher
Januar 2006

Interessantere Beispiele

Sei $V = \mathbf{R}^3$, $W = \mathbf{R}^2$. Das Bild eines Vektors (x, y, z) muss ein Vektor mit zwei Komponenten sein. Zum Beispiel sind

☺ $(x, y, z) \mapsto (x+y, y+z)$

☺ $(x, y, z) \mapsto (x+y+z, z)$

☺ $(x, y, z) \mapsto (x, 0)$

☺ $(x, y, z) \mapsto (3x - 7z, 2x + 100y + 23z)$

lineare Abbildungen, aber die folgenden nicht:

☹ $(x, y, z) \mapsto (xy, z)$

☹ $(x, y, z) \mapsto (x+y, 1)$

☹ $(x, y, z) \mapsto (x^2, y+z)$

© Beutelspacher
Januar 2006

Bild(f)

Definition. Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Der Teil von W, der von f erfasst wird, nennt das **Bild** von f. Genauer:

$$\textbf{Bild(f)} := \{w \in W \mid \text{es gibt } v \in V \text{ mit } f(v) = w\}.$$

4.2.1 Satz. Bild(f) ist ein Unterraum von W, also insbesondere ein Vektorraum.

Beweis. Mit Hilfe des Unterraumkriteriums.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis

(a) Bild(f) $\neq \{\}$, denn o_W liegt in Bild(f):

$$f(o_V)+f(o_V) = f(o_V+o_V) = f(o_V).$$

Subtraktion von $f(o_V)$ liefert $f(o_V) = o_W$. Also $o_W \in$ Bild(f).

(b) Sei $w \in$ Bild(f) und $k \in K$. Sei v ein Urbild von w; dann gilt:

$$k \cdot w = k \cdot f(v) = f(k \cdot v) \in \text{Bild(f)}.$$

(c) Seien $w, w' \in$ Bild(f). Betrachte Urbilder v und v' von w und w'. Dann folgt

$$w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v') \in \text{Bild(f)}.$$

Somit ist Bild(f) ein Unterraum von W.

© Beutelspacher
Januar 2006

Bilder einer Basis

Der folgende Satz ist das wichtigste Hilfsmittel zum Verständnis linearer Abbildungen:

4.2.2 Hauptsatz (Beschreibung linearer Abbildungen durch die Bilder einer Basis). Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V.
Dann gibt es zu beliebigen Vektoren $w_1, ..., w_n \in W$ genau eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, ..., n)$.

Mit anderen Worten: Man kann die Bilder einer Basis beliebig vorschreiben; durch die Bilder einer Basis ist eine lineare Abbildung aber eindeutig bestimmt.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis: Existenz

Der **Beweis** erfolgt in zwei Schritten.

(a) Existenz von f: Sei $\{v_1, ..., v_r\}$ eine *linear unabhängige* Menge von Vektoren. Dann so gibt es für beliebige $w_1, ..., w_r \in W$ *mindestens* eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle i.

Denn: Wir ergänzen $\{v_1, ..., v_r\}$ zu einer Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ von V und wählen $w_{r+1}, ..., w_n \in W$ beliebig. (Z. B. $w_{r+1} = ... = w_n = o$.)

Sei $v \in V$ beliebig. Sei $v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$. Wir definieren

$$f(v) := k_1w_1 + k_2w_2 + ... + k_nw_n.$$

Insbesondere ist $f(v_i) = w_i$.

Behauptung: f ist eine lineare Abbildung.

© Beutelspacher
Januar 2006

f ist linear

Additivität: Sei $u = h_1v_1 + h_2v_2 + ... + h_nv_n$. Dann ist

$$f(v+u) = f((k_1+h_1)v_1 + (k_2+h_2)v_2 + ... + (k_n+h_n)v_n)$$

$$= (k_1+h_1)w_1 + (k_2+h_2)w_2 + ... + (k_n+h_n)w_n$$

$$= (k_1w_1 + k_2w_2 + ... + k_nw_n) + (h_1w_1 + h_2w_2 + ... + h_nw_n) = f(v) + f(u).$$

Homogenität: Sei $k \in K$ beliebig. Dann ist

$$f(kv) = f(kk_1v_1 + kk_2v_2 + ... + kk_nv_n)$$

$$= kk_1w_1 + kk_2w_2 + ... + kk_nw_n$$

$$= k(k_1w_1 + k_2w_2 + ... + k_nw_n) = kf(v).$$

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis: Eindeutigkeit

(b) Eindeutigkeit von f: Sei $\{v_1, ...,v_s\}$ ein *Erzeugendensystem* von V. Dann gibt es für beliebige $w_1, ..., w_s \in W$ *höchstens eine* lineare Abbildung f von V nach W mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, ..., s$.

Denn: Seien f und g lineare Abbildungen von V in W mit $f(v_i) = w_i$ und $g(v_i) = w_i$ $(i = 1, ..., s)$.
Zu zeigen: Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $f(v) = g(v)$.

Da $\{v_1, ..., v_s\}$ ein Erzeugendensystem ist, gilt $v = k_1v_1 + ... + k_sv_s$.

Daraus ergibt sich

$$f(v) = f(k_1v_1 + ... + k_sv_s) = k_1f(v_1) + ... + k_sf(v_s) = k_1w_1 + ... + k_sw_s$$
$$= k_1g(v_1) + ... + k_sg(v_s) = g(k_1v_1 + ... + k_sv_s) = g(v).$$

© Beutelspacher
Januar 2006

Iso, Auto, Endo

Definition. Eine lineare Abbildung von V nach W heißt **Isomorphismus**, falls sie injektiv und surjektiv ist.
Ein Isomorphismus von V nach V (also in sich) heißt **Automorphismus**. M.a.W.: Ein Automorphismus ist eine umkehrbare lineare Abbildung eines Vektorraums in sich.
Manchmal wird eine lineare Abbildung von V in sich auch Endomorphismus genannt.
Vektorräume V und W, zwischen denen es einen Isomorphismus gibt, nennt man **isomorph**. Man schreibt dann $V \cong W$.

Die Menge aller Automorphismen des Vektorraums V bekommt eine Bezeichnung, nämlich **GL(V)** (steht für „general linear group“).

© Beutelspacher
Januar 2006

An einer Basis kann man alles erkennen

4.2.3 Charakterisierung einer linearen Abbildung durch die Bilder der Vektoren einer Basis. Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung; sei $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ eine Basis von V, und sei $w_i := f(v_i)$ für $i = 1, 2, ..., n$. Dann gilt:

(a) Die Vektoren $w_1, w_2, ..., w_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn f injektiv ist.

(b) Genau dann ist $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ ein Erzeugendensystem von W, wenn f surjektiv ist.

(c) Genau dann ist $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ eine Basis von W, wenn f bijektiv, also ein Isomorphismus ist.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis (a)

Beweis. (a) Angenommen, $w_1, ..., w_n$ sind linear unabhängig. Seien v und v' Vektoren aus V mit $f(v) = f(v')$. Wir zeigen $v = v'$.

Wir stellen v, v' als Linearkombination der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ dar:

$$v = k_1v_1 + ... + k_nv_n, \quad v' = k_1'v_1 + k_2'v_2 + ... + k_n'v_n.$$

Es folgt

$$f(v) = k_1w_1 + ... + k_nw_n \quad \text{und} \quad f(v') = k_1'w_1 + ... + k_n'w_n.$$

Wegen $f(v) = f(v')$ ist also $k_1w_1 + ... + k_nw_n = k_1'w_1 + ... + k_n'w_n$.

Da $w_1, ..., w_n$ linear unabhängig sind, folgt durch Koeffizientenvergleich $k_1 = k_1', ..., k_n = k_n'$, also $v = v'$.

Umkehrung: ÜA.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis (b)

(b) Sei $\{w_1, ..., w_n\}$ ein Erzeugendensystem von W. Zu zeigen: Für beliebiges $w \in W$ gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$.

Da $w_1, ..., w_n$ ein Erzeugendensystem von W ist, können wir w (nicht notwendigerweise eindeutig) schreiben als

$$w = k_1w_1 + k_2w_2 + ... + k_nw_n.$$

Dann ist offenbar

$$v := k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$$

ein Urbild von w.

Umkehrung: ÜA.

© Beutelspacher
Januar 2006

Folgerung 1: Wenn einmal, dann immer ...

Folgerung 1. (**„Wenn einmal unabhängig, dann immer unabhängig; wenn einmal Erzeugendensystem, dann immer Erzeugendensystem.“)** Wenn die Bilder *einer* Basis von V unter f linear unabhängig sind (bzw. ein Erzeugendensystem bilden), dann sind die Bilder *jeder* Basis von V unter f linear unabhängig (bzw. bilden ein Erzeugendensystem).

Beweis. Sei B eine Basis, deren Bild linear unabhängig ist. Dann ist f nach dem vorigen Satz injektiv.
Angenommen, es gäbe eine Basis B^*, deren Bild nicht linear unabhängig ist; dann wäre f nicht injektiv: Widerspruch.

Die anderen Behauptungen folgen entsprechend.

© Beutelspacher
Januar 2006

Folgerung 2: Basis auf Basis

Folgerung 2. Seien V und W Vektorräume über dem Körper K. Wenn V und W die gleiche Dimension n haben, dann gibt es zu jeder Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ von V und jeder Basis $\{w_1, ..., w_n\}$ von W genau eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, ..., n)$.
Diese lineare Abbildung ist ein Isomorphismus.
Insbesondere können je zwei Basen eines Vektorraums V durch einen eindeutigen Automorphismus aufeinander abgebildet werden.

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit von f: Hauptsatz.

f bijektiv: Teil (c) des vorigen Satzes.

© Beutelspacher
Januar 2006

Folgerungen 3, 4: Eindeutigkeit eines Vektorraums

Folgerung 3. Je zwei Basen eines Vektorraums V können durch genau eine lineare Abbildung ineinander überführt werden; diese lineare Abbildung ist ein Automorphismus. Man nennt solche linearen Abbildungen auch **Basistransformationen**.

Folgerung 4 (Fundamentalsatz für endlichdimensionale Vektorräume). Je zwei K-Vektorräume derselben endlichen Dimension sind isomorph. Insbesondere ist jeder n-dimensionale K-Vektorraum isomorph zu K^n.

Beweis. Man wählt in zwei n-dimensionalen K-Vektorräumen je eine Basis. Nach Folgerung 2 ist die Abbildung, die die eine Basis in die andere überführt, ein Isomorphismus.

© Beutelspacher
Januar 2006

4.3 Darstellung von linearen Abb. durch Matrizen

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung eines n-dimensionalen K-Vektorraums V in einen m-dimensionalen K-Vektorraum W.

Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V und $C = \{w_1, ..., w_m\}$ Basis von W.

Wir stellen die Bilder der Basisvektoren v_j aus B als Linearkombinationen der Basis C dar:

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + ... + a_{mj}w_m \quad (j = 1, ..., n) \text{ mit } a_{ij} \in K.$$

Diese Körperelemente a_{ij} fassen wir in einer Matrix A zusammen:

Definition. Jede so gewonnene Matrix ${}_BM_C(f)$ wird eine **Darstellungsmatrix** der linearen Abbildung f genannt.

© Beutelspacher
Januar 2006

Darstellungsmatrix

$$A = {}_B M_C(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Merkregel: *Die Koeffizienten des Bildes von* v_j *sind die Einträge in der* j*-ten Spalte von* A.

Bemerkung: Es gibt *nicht nur eine* Darstellungsmatrix.
Vielmehr gehört zu jeder Wahl einer Basis B und einer Basis C eine Darstellungsmatrix!

© Beutelspacher
Januar 2006

Beispiel

Beispiele. Sei f die Abbildung von $\mathbf{R}^2$ in sich, die durch folgende Vorschrift definiert ist: $f: (x, y) \mapsto (3x–2y, x+y)$.

– Sei B = C = {(1, 0), (0, 1)}. Dann ist

$${}_B M_C(f) = {}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

– Sei B = {(1, 0), (0, 1)} und C = {(3, 1), (–2, 1)}. Dann ist

$${}_B M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

© Beutelspacher
Januar 2006

Beispiel (Fortsetzung)

Sei $B = \{(5, 8), (-1, 1)\}$ und $C = \{(0, 1), (1, 1)\}$, dann gilt

$$ {}_B M_C(f) = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}. $$

Denn es gilt

$$ f(5, 8) = (-1, 13) = 14(0, 1) + (-1)(1, 1) $$

und

$$ f(-1, 1) = (-5, 0) = 5(0, 1) + (-5)(1, 1). $$

© Beutelspacher
Januar 2006

Jede Matrix ist eine lineare Abbildung

Jede Matrix aus $K^{m \times n}$ ist Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung.

Beweis. Wir wählen Basen $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von V und $C = \{w_1, ..., w_m\}$ von W. Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$ eine Matrix.
Wir definieren die Bilder der Basisvektoren v_j wie folgt:

$$ f(v_j) := a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + ... + a_{mj}w_m \quad (j = 1, ..., n). $$

Da eine lineare Abbildung durch die Bilder einer Basis bestimmt ist, ist f dadurch definiert.
Klar: f hat bezüglich B und C die Darstellungsmatrix A.

© Beutelspacher
Januar 2006

Darstellungssatz

Wir fassen zusammen:

Darstellungssatz. Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung.
Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V und $C = \{w_1, ..., w_m\}$ eine Basis von W. Dann wird durch

$$f(v_j) =: a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + ... + a_{mj}w_m \quad (j = 1, ..., n)$$

eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ definiert.
Umgekehrt gehört zu jeder Matrix $A = (a_{ij})$ aus $K^{m\times n}$ (bei festen Basen B und C) genau eine lineare Abbildung f; diese wird durch

$$f(v_j) := a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + ... + a_{mj}w_m \quad (j = 1, ..., n)$$

definiert.

f: K^n ® K^m

Man kann $m\times n$-Matrizen als lineare Abbildung von K^n in K^m auffassen. Dazu stellen wir die Vektoren als Spaltenvektoren dar:

$$K^n = \{(k_1, k_2, ..., k_n)^T \mid k_1, k_2, ..., k_n \in K\}.$$

Dann induziert (das heißt „ist“) jede $m\times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit folgender Vorschrift eine lineare Abbildung von K^n in K^m:

$$f(k_1, k_2, .., k_n) := A \cdot (k_1, k_2, .., k_n)^T := \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + ... + a_{1n}k_n \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + ... + a_{2n}k_n \\ \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + ... + a_{mn}k_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Beispiel: Sei $n = m = 3$, und sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^{3\times 3}.$$

Dann wird durch A die folgende lineare Abbildung von $\mathbf{R}^3$ in sich induziert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + 7z \\ x + 2y \\ -x + 4y + 8z \end{pmatrix}.$$

© Beutelspacher
Januar 2006

Darstellungsmatrix einer Matrix

Darstellungsmatrix einer als lineare Abbildung interpretierten Matrix. Sei A eine Matrix aus $K^{m\times n}$ – aufgefasst als lineare Abbildung K^n nach K^m. Seien $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bzw. $C = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ die Basis aus Einheitsvektoren des K^n bzw. des K^m. Dann gilt ${}_B M_C(f) = A$.
Mit anderen Worten: A hat bezüglich der Basen aus Einheitsvektoren sich selbst als Darstellungsmatrix.

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$. Dann wird $e_1 \in K^n$ auf den Vektor abgebildet, der in der i-ten Komponente das Element $a_{i1} \cdot 1 = a_{i1}$ hat.
Mit anderen Worten: e_1 wird auf die erste Spalte von A abgebildet.
I. a. wird e_j auf die j-te Spalte von A abgebildet.

© Beutelspacher
Januar 2006

Rang einer linearen Abbildung

Rang einer linearen Abbildung. Sei A eine Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f: V \to W$. Dann gilt:

$$\dim(\text{Bild}(f)) = \text{Rang}(A).$$

Insbesondere ist Rang(A) unabhängig von der Wahl der Darstellungsmatrix A von f. Man nennt diese Zahl daher den **Rang** von f.

Beweis. Sei $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ die Basis von V, die zur Bildung der Darstellungsmatrix A verwendet wurde: D.h. $A = {}_B M_C(f)$.
Behauptung: Der von den Spalten $s_1, ..., s_n$ von A erzeugte Unterraum U von K^m ist isomorph zu dem Unterraum W' von W, der von den Bildern $f(v_1), ..., f(v_n)$ der Basisvektoren erzeugt wird.
(Die Abbildung $s_i \mapsto f(v_i)$ definiert einen Isomorphismus: ÜA.)

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis

Anders ausgedrückt: Die Koordinatenvektoren $s_1, s_2, ..., s_n$ spannen einen zu $\langle f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\rangle = \text{Bild}(f)$ isomorphen Vektorraum U auf.
Nach Definition des Rangs einer Matrix ist also

$$\text{Rang}(A) = \dim(U) = \dim(\text{Bild}(f)).$$

Korollar. Genau dann ist eine Menge $s_1, s_2, ..., s_k$ von Spalten von A linear unabhängig, wenn die Vektoren $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_k)$ linear unabhängig sind.

© Beutelspacher
Januar 2006

Darstellungsmatrix eines Isomorphismus

Charakterisierung von Isomorphismen. Seien V und W n-dimensionale Vektorräume. Eine lineare Abbildung f von V nach W ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für beliebige Basen B von V und C von W die Matrix $A = {}_B M_C(f)$ den Rang n hat.

Beweis. (a) Rang(A) < n. Nach dem vorigen Satz ist dann dim(Bild(f)) < n. Also ist Bild(f) ein echter Unterraum von W. Somit ist f nicht surjektiv, insbesondere nicht bijektiv.
(b) Rang(A) = n. Dann sind die Bilder der Basis B linear unabhängig, erzeugen also einen Unterraum der Dimension n von W. Da dim(W) = n ist, sind die Bilder von B eine Basis von W. Also ist f bijektiv.

© Beutelspacher
Januar 2006

Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen

Darstellungsmatrix des Produkts von linearen Abbildungen.
Seien V_1, V_2, V_3 Vektorräume über dem Körper K.
Seien $g: V_1 \to V_2$ und $f: V_2 \to V_3$ lineare Abbildungen.
Sei B_i eine Basis von V_i $(i = 1, 2, 3)$,
und sei $A = {}_{B1}M_{B2}(g)$, $B = {}_{B2}M_{B3}(f)$. Dann ist

$$ {}_{B1}M_{B3}(fg) = BA. $$

Kurz: Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen entspricht der Multiplikation von Matrizen.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis I

Beweis. Sei $A = (a_{ji})$ die Darstellungsmatrix von g, und $B = (b_{kj})$ die Darstellungsmatrix von f.

Seien u_i die Vektoren aus B_1, v_j die Vektoren aus B_2 und w_k die Vektoren aus B_3.

Beweisziel: Um die Darstellungsmatrix $C = (c_{ki})$ von fg zu erhalten, müssen wir $fg(u_i)$ ausrechnen und diesen Vektor als Linearkombination der w_k darstellen.

Zunächst gilt: $$g(u_i) = \sum_j a_{ji} v_j .$$

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis II

Damit ergibt sich

$$fg(u_i) = f(\sum_j a_{ji} v_j) = \sum_j a_{ji} f(v_j) = \sum_j a_{ji} \sum_k b_{kj} w_k$$

$$\sum_j \sum_k a_{ji} b_{kj} w_k = \sum_k (\sum_j b_{kj} a_{ji}) w_k = \sum_k c_{ki} w_k .$$

Das ist die Behauptung.

© Beutelspacher
Januar 2006

Invertierbare Matrizen

Definition. Eine $n \times n$-Matrix M mit Elementen aus dem Körper K heißt **invertierbar** (oder **umkehrbar**, manchmal auch **regulär**), falls es eine Matrix M' gibt mit $MM' = E_n = M'M$.
Wir schreiben dann M^{-1} für die Inverse M' von M.

Korollar 1 (Charakterisierung invertierbarer Matrizen). Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihr Rang gleich n ist.

Beweis. Sei A eine $n \times n$-Matrix über K. Wir betrachten einen n-dimensionalen Vektorraum V über K und eine Basis B von V. Die Matrix A stellt bezüglich der Basis B eine lineare Abbildung f dar; das heißt $A = {}_B M_B(f)$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis

Zunächst sei A invertierbar. Dann existiert die Matrix A^{-1}. Diese stellt ebenfalls bezüglich der Basis B eine lineare Abbildung f' dar, das heißt $A^{-1} = {}_B M_B(f')$.) Nach dem obigen Satz ist dann AA^{-1} die Darstellungsmatrix (bezüglich der Basis B) der Abbildung ff'.
Da AA^{-1} die Einheitsmatrix ist, ist ff' die Identität.
Ebenso folgt, dass $f'f$ die Identität ist. Daraus folgt $f' = f^{-1}$. Also ist f invertierbar, somit ein Isomorphismus. Also ist $\text{Rang}(A) = n$.

Sei nun $\text{Rang}(A) = n$. Dann ist f ein Isomorphismus, also existiert f^{-1}. Sei A' die Darstellungsmatrix von f^{-1} bezüglich B. Dann sind sowohl AA' als auch $A'A$ Darstellungsmatrizen der Identität. Also sind AA' und $A'A$ Einheitsmatrizen; d.h. A ist invertierbar.

© Beutelspacher
Januar 2006

Basiswechsel

Korollar 2 (Transformation der Darstellungsmatrix bei Basiswechsel). *Sei* $f: V \to W$ *eine lineare Abbildung. Seien* B *und* B' *Basen von* V, C *und* C' *Basen von* W. *Seien* $A = {}_{B}M_{C}(f)$ *und* $A' = {}_{B'}M_{C'}(f)$ *die entsprechenden Darstellungsmatrizen. Dann gibt es eine invertierbare Matrix* T *und eine invertierbare Matrix* S *mit*

$$A' = TAS.$$

Beweis. Sei $S = {}_{B'}M_{B}(id_V)$ die Darstellungsmatrix von id_V bezüglich der Basen B' und B, und sei $T = {}_{C}M_{C'}(id_W)$ die Darstellungsmatrix von id_W bezüglich der Basen C und C'. Dann ist nach Korollar 1 TAS die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $id_W \bullet f \bullet id_V = f$ bezüglich der Basen B' und C'. Das heißt $TAS = A'$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Lineare Abbildungen von V in sich

Korollar 3. Sei f eine lineare Abbildung von V in sich. Seien B, B' Basen von V, und seien $A = {}_{B}M_{B}(f)$ und $A' = {}_{B'}M_{B'}(f)$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix S mit

$$A' = S^{-1}AS.$$

Beweis. Sei $S = {}_{B'}M_{B}(id)$ die Darstellungsmatrix von id bezüglich der Basen B' und B, und sei $T = {}_{B}M_{B'}(id)$ die Darstellungsmatrix von id bezüglich der Basen B und B'. Dann ist $TAS = A'$ nach Korollar 2. Ferner gilt

$$ST = {}_{B'}M_{B}(id) \cdot {}_{B}M_{B'}(id) = {}_{B}M_{B}(id) = E.$$

Entsprechend zeigt man $TS = E$. Also ist $T = S^{-1}$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Ähnlichkeit von Matrizen

Definition. Man nennt zwei $n \times n$-Matrizen M und M' **ähnlich**, falls es eine invertierbare $n \times n$-Matrix S gibt mit $M' = S^{-1}MS$.

Man kann leicht nachweisen (ÜA), dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist.

Mit dieser Begriffsbildung kann man Korollar 3 wie folgt formulieren:

Ähnlichkeit von Darstellungsmatrizen. Je zwei Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung eines Vektorraums in sich sind ähnlich.

© Beutelspacher
Januar 2006

4.3 Der Homomorphiesatz

Sei stets $f: V \to W$ eine lineare Abbildung des K-Vektorraums V in den K-Vektorraum W.

Definition. Die Menge

$$\text{Kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = o\}$$

heißt der **Kern** von f.

Beispiel: Sei f die durch $(x, y) \mapsto (x - y, 0)$ definierte lineare Abbildung des $\mathbf{R}^2$ in sich. Dann ist $\text{Kern}(f) = \{(x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Der Kern ist ein Unterraum

4.3.1 Satz. Kern(f) ist ein Unterraum von V.

Beweis. Wir wenden das Unterraumkriterium an.

– Wegen $f(o) = o$ ist $o \in$ Kern(f), also ist Kern(f) $\neq \{\}$.

– Seien $v \in$ Kern(f) und $k \in K$. Dann gilt

$$f(k \cdot v) = k \cdot f(v) = k \cdot o = o;$$

somit ist mit $v \in$ Kern(f) auch $kv \in$ Kern(f).

– Seien $v, v' \in$ Kern(f). Dann ist

$$f(v+v') = f(v) + f(v') = o + o = o;$$

also ist $v+v' \in$ Kern(f).

© Beutelspacher
Januar 2006

Kern und Injektivität

4.3.2 Satz. Genau dann ist Kern(f) = {o}, wenn f injektiv ist.

Beweis. Sei zunächst Kern(f) = {o}. Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Dann folgt

$$o = f(v) - f(v') = f(v-v'),$$

also $v-v' \in$ Kern(f). Da Kern(f) nur aus dem Nullvektor besteht, folgt $v - v' = o$, also ist $v = v'$. Also ist f injektiv.

Nun sei umgekehrt f injektiv. Da schon o auf o abgebildet wird, darf wegen der Injektivität von f kein von o verschiedener Vektor von V auf o abgebildet werden.
Also besteht Kern(f) nur aus dem Nullvektor.

© Beutelspacher
Januar 2006

Der Homomorphiesatz

4.3.3 Homomorphiesatz. Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$V/Kern(f) \cong Bild(f).$$

Genauer gesagt: Die Abbildung $\varphi: V/Kern(f) \to Bild(f)$, die durch

$$\varphi(v + Kern(f)) := f(v)$$

definiert ist, ist ein Isomorphismus von $V/Kern(f)$ nach $Bild(f)$.

Bemerkung. Mit diesem Satz kann man $Bild(f)$ „innerhalb von V“, d.h. als $V/Kern(f)$, wiedererkennen.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis: φ ist wohldefiniert

Beweis. (1) φ ist wohldefiniert. Dies müssen wir nachweisen, da φ mit Hilfe von Repräsentanten einer Nebenklasse definiert ist. Seien v und v' Repräsentanten derselben Nebenklasse nach $Kern(f)$. Das heißt

$$v + Kern(f) = v' + Kern(f).$$

Zu zeigen: $\varphi(v + Kern(f)) = \varphi(v' + Kern(f))$.
Nach Definition von φ ist also zu zeigen: $f(v) = f(v')$.

Aus $v + Kern(f) = v' + Kern(f)$ folgt $v - v' \in Kern(f)$. Dies bedeutet $f(v-v') = o$, also $f(v) - f(v') = o$, das heißt $f(v) = f(v')$.

© Beutelspacher
Januar 2006

Beweis: φ ist ein Isomorphismus

(2) φ ist linear. Additivität: Seien $v, v' \in V$. Dann gilt

$$\varphi[(v + \mathrm{Kern}(f)) + (v' + \mathrm{Kern}(f))] = \varphi[v+v' + \mathrm{Kern}(f)] = f(v+v')$$

$$= f(v) + f(v') = \varphi(v + \mathrm{Kern}(f)) + \varphi(v' + \mathrm{Kern}(f)).$$

Die Homogenität folgt ähnlich einfach.

(3) φ ist bijektiv. surjektiv: klar, denn $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Bild}(f)$
injektiv: Seien $v + \mathrm{Kern}(f)$ und $v' + \mathrm{Kern}(f)$ verschiedene Nebenklassen.
Hätten diese dasselbe Bild unter φ, so wäre $f(v) = f(v')$,
also $v–v' \in \mathrm{Kern}(f)$, d.h. $v + \mathrm{Kern}(f) = v' + \mathrm{Kern}(f)$, ein Widerspruch.

© Beutelspacher
Januar 2006

Dimensionsformel für lineare Abbildungen

1. Folgerung (Dimensionsformel für lineare Abbildungen).
Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $\dim(V) = n$. Dann gilt:

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = n.$$

Beweis. Aus dem Homomorphiesatz und der zweiten Dimensionsformel folgt

$$\dim(\mathrm{Bild}(f))$$
$$= \dim(V/\mathrm{Kern}(f))$$
$$= \dim(V) – \dim(\mathrm{Kern}(f))$$
$$= n – \dim(\mathrm{Kern}(f)).$$

© Beutelspacher
Januar 2006

Dimension des Lösungsraums

2. Folgerung (Dimension des Lösungsraums). Sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem, wobei A eine $m \times n$-Matrix ist. Dann gilt

$$\dim(\mathbf{L}(A, 0)) = n - \text{Rang}(A).$$

Beweis. Wir fassen A als lineare Abbildung von K^n nach K^m auf. Nach Definition von $L(\mathbf{A}, 0)$ gilt $\text{Kern}(A) = L(\mathbf{A}, 0)$.
Ferner ist $\text{Bild}(A)$ gleich dem Erzeugnis der Spalten von A. (Denn das Bild des i-ten Einheitsvektors ist die i-te Spalte von A.)
Also liefert die Dimensionsformel für lineare Abbildungen:

$$n = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\mathbf{L}(A, 0)) + \text{Rang}(A).$$

© Beutelspacher
Januar 2006

injektiv = surjektiv (falls ...)

3. Folgerung (Äquivalenz von Injektivität und Surjektivität). Sei f eine lineare Abbildung eines endlichdimensionalen Vektorraums V in einen Vektorraum W. Wenn $\dim(V) = \dim(W)$ ist, so gilt

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv}.$$

Um zu zeigen, dass eine lineare Abb. von V nach W bijektiv ist, braucht man also nur zu zeigen, dass sie injektiv oder surjektiv ist. Insbesondere gilt der Satz für lineare Abbildungen eines endlichdimensionalen Vektorraums in sich.

Beweis. Es gilt

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{o\} \Leftrightarrow \dim(\text{Bild}(f)) = n \Leftrightarrow f \text{ surjektiv}.$$

© Beutelspacher
Januar 2006

4.4 Der Dualraum

Sei stets V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.
Wir betrachten lineare Abbildungen von V in den 1-dimensionalen K-Vektorraum K

Definition. Eine **Linearform** von V ist eine lineare Abbildung von V in K. D.h.: Eine Linearform f ordnet jedem Vektor v ein Körperelement $f(v)$ so zu, dass gilt

$f(v+v') = f(v) + f(v')$ und $f(kv) = k \cdot f(v)$ für alle $v, v' \in V, k \in K$.

Beispiel: Die Abbildung f von $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}$, die einen Vektor (x, y, z) auf $x+y+z$ abbildet, ist eine Linearform.

© Beutelspacher
Januar 2006

Kern einer Linearform

Kern einer Linearform. Sei f eine Linearform von V, die nicht die Nullabbildung ist. Dann hat $\text{Kern}(f)$ die Dimension $n–1$.

Beweis. Da f nicht die Nullabbildung ist, hat $\text{Bild}(f)$ mindestens die Dimension 1.
Da K ein 1-dimensionaler Vektorraum ist, folgt $\dim(\text{Bild}(f)) = 1$.
Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ergibt sich daraus $\dim(\text{Kern}(f)) = n–1$.

Beispiel. Der Kern der Linearform $f: (x, y, z) \mapsto x+y+z$ ist der 2-dimensionale Unterraum

$$\text{Kern}(f) = \{(x, y, –x–y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}.$$

© Beutelspacher
Januar 2006

Kapitel 5
Polynome

Inhalt

5.1 Was ist ein Polynom?

$a_n x^n + \ldots + a_n x + a_0$

6.3 Polynomdivision und Ideale

$f = qg + r$

5.1 Was ist ein Polynom?

Sei K ein Körper. Dann sind folgende Konzepte äquivalent:

Endliche Folgen $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in K$,

Unendliche Folgen $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ mit $a_i \in K$, *die an nur endlich vielen Stellen Elemente* $\neq 0$ *haben*,

Polynome $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ mit $a_i \in K$.

Wir schreiben auch $f = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. (Nicht f(x) …)

Wir bezeichnen die Menge aller Polynome mit K[x].

© Beutelspacher
Mai 2006

Beispiele

Folge	Polynom
1, 2, 3	$1 + 2x + 3x^2$
3, 2, 0, 1	$3 + 2x + 1x^3$
0, 1	x
0, 0, 1	
	$x^5 + 3x^7$
–1, 1, –1	

© Beutelspacher
Mai 2006

Grad

Definition. Ein Polynom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ hat den **Grad** n, falls $a_n \neq 0$ ist.

Wir schreiben Grad(f) = n.

Polynome können den Grad 1, 2, 3, … haben.

Polynome vom Grad 0: Konstante Polynome $f = a_0 \neq 0$.

Polynom vom Grad $-\infty$: Das Nullpolynom.

© Beutelspacher
Mai 2006

K[x]

5.1.1 Satz. Die Menge K[x] aller Polynome über dem Körper K bildet (bezüglich komponentenweise Verknüpfungen) einen Vektorraum. Eine Basis dieses Vektorraums ist $1, x, x^2, x^3, \ldots$

Beweis. Entweder alles nachrechen oder Überführung auf den Vektorraum V_∞.

5.1.2 Satz. Die Menge der Polynome aus K[x] vom Grad $\leq n$ bilden einen Vektorraum der Dimension n+1. Eine Basis ist $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Beweis. Zeige, dass die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ einen Unterraum von K[x] bildet.

© Beutelspacher
Mai 2006

Multiplikation

Man kann Polynome auch **multiplizieren**. Dazu „multipliziert man aus“ und multipliziert die Potenzen von x nach der Regel $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$.

Beispiele:

$(3x^2 + 2x - 3)\cdot(x+7) =$

$(3x + 2)^2 =$

$(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1)(x - 1) =$

© Beutelspacher
Mai 2006

Mehrere Variable

Man erhält Polynome in mehreren Variablen, in dem man die Polynombildung iteriert: K[x, y] = K[x][y].

Beispiele:

© Beutelspacher
Mai 2006

Ringe

Definition. Ein **Ring** ist eine Menge zusammen mit einer Addition + und einer Multiplikation ·, bei der man „wie gewohnt“ addieren, subtrahieren und multiplizieren (nicht notwendigerweise dividieren) kann.

Addition: kommutativ, assoziativ, Nullelement 0, negatives Element von a: –a.

Multiplikation: assoziativ

Distributivgesetz.

kommutativer Ring, **Ring mit 1**

Beispiele von Ringen

Z

Z_n

n´n-Matrizen

K[x]

K[x] ist ein Ring

5.1.3 Satz. K[x] ist ein kommutativer Ring mit 1.

Beweis. Neutrale Elemente: Nullelement ist das Nullpolynom, Einselement ist das konstante Polynom 1.

© Beutelspacher
Mai 2006

Die Gradformel

5.1.4 Gradformel für Polynome. Seien f und g Polynome vom Grad n und m aus K[x], wobei K ein Körper ist. Dann ist Grad(f·g) = n+m.

Beweis. Wenn f oder g das Nullpolynom ist, dann ist auch fg das Nullpolynom, und die Behauptung gilt.

Seien f und g verschieden vom Nullpolynom und sei $h = f \cdot g = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ Wenn $k > m+n$, dann ist $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = 0$,

da in jedem Summanden $a_i b_j$ entweder $i > n$ oder $j > m$ (oder beides), also $a_i b_j = 0$ ist. Also gilt Grad(h) = Grad(fg) ≤ n+m. Da sich aber $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$ ergibt, hat fg tatsächlich den Grad n+m.

© Beutelspacher
Mai 2006

Invertierbare Polynome

5.1.5 Folgerung (invertierbare Polynome).
Die einzigen invertierbaren Polynome aus $K[x]$ sind die Polynome vom Grad 0, also die konstanten Polynome $a \in K\backslash\{0\}$.

Beweis. Sei f ein invertierbares Polynom. Dann gibt es ein Polynom g mit $f \cdot g = 1$.
Da das konstante Polynom 1 den Grad 0 hat, müssen nach der Gradformel auch die Polynome f und g den Grad ≤ 0 haben.
Da f nicht das Nullpolynom sein kann, muss f also den Grad 0 haben.

© Beutelspacher
Mai 2006

Einsetzen

Ziel: Man möchte in ein Polynom Zahlen einsetzen, aber auch komplexe Objekte (Matrizen, Abbildungen).

Definition. Sei K ein kommutativer Körper, und sei R ein Ring mit Einselement 1, der K enthält, so dass die Einschränkung der Addition und Multiplikation von R auf K die Addition und Multiplikation von K ergibt.

Sei $f = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n \in K[x]$ ein Polynom.
Für jedes Element $r \in R$ definieren wir

$$f(r) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r^2 + ... + a_n \cdot r^n .$$

Man sagt, dass $f(r)$ durch **Einsetzen** von r in f entsteht.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beispiel

Beispiel klar. Sei f das Polynom $x^2 + x - 6 \in \mathbf{R}[x]$, und sei M die folgende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Was ist f(M)? Dies berechnet sich wie folgt:

$$f(M) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Einsetzungshomomorphismus

Satz vom Einsetzungshomomorphismus. Sei r ein Element des Rings R. Wenn r mit jedem Element von K vertauschbar ist (d.h. $kr = rk$ – und also auch $kr^2 = r^2k$ usw. – für alle $k \in K$), dann gilt für alle Polynome $f, g \in K[x]$:

$$(f+g)(r) = f(r) + g(r),$$

$$(f \cdot g)(r) = f(r) \cdot g(r).$$

(Die Abbildung

$$\varphi: K[x] \to R: f \mapsto f(r)$$

ist ein „**Ringhomomorphismus**“; man nennt sie den **Einsetzungshomomorphismus**.)

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis

Beweis. Seien $f = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$ und $g = b_0 \cdot x^0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \ldots + b_n \cdot x^n$ (dabei darf a_n oder b_n gleich Null sein).
Additivität:

$$(f + g)(r) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)r + (a_2+b_2)r^2 + \ldots + (a_n+b_n)r^n$$

$$= a_0 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r^2 + \ldots + a_n \cdot r^n + b_0 + b_1 \cdot r + b_2 \cdot r^2 + \ldots + b_n \cdot r^n = f(r) + g(r).$$

Multiplikativität: Der Koeffizient c_k von x^k in $f \cdot g$ ist

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Also ergibt sich:

Beweis: Teil 2

$$(f \cdot g)(r) = a_0 b_0 \cdot 1 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \cdot r + \ldots + (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) \cdot r^k + \ldots$$

$$= a_0 b_0 \cdot 1 + a_0 b_1 \cdot r + a_1 b_0 \cdot r + \ldots + \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \cdot r^k + \ldots$$

Andererseits ist

$$f(r) \cdot g(r) = a_0 b_0 \cdot 1 + a_0 (b_1 \cdot r) + (a_1 \cdot r) b_0 + \ldots + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^i (b_{k-i} \cdot r^{k-i}) + \ldots$$

Da r mit jedem Element von K, insbesondere also mit allen a_i und b_j, vertauschbar ist, folgt $(fg)(r) = f(r) \cdot g(r)$.

Anwendung: $R = K^{n\times n}$

Bemerkung. Der wichtigste Anwendungsfall ist $R = K^{n\times n}$.

In diesem Fall ist jedes Element von R mit jedem Element von K vertauschbar.

Denn jede Matrix der Form $k\cdot E_n$ ist mit jeder $n\times n$-Matrix vertauschbar (ÜA).

Also ist das Einsetzen einer $n\times n$-Matrix ein Homomorphismus.

© Beutelspacher
Mai 2006

5.2 Polynomdivision

Der folgende Satz ist die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen über Polynomringe.

5.2.1 Polynomdivision. Seien f und g Polynome über dem Körper K. Wenn g nicht das Nullpolynom ist, dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome q, r aus $K[x]$ mit

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \text{Grad}(r) < \text{Grad}(g).$$

Beispiel: $f = 2x^2 + 5x - 7$, $g = x - 5$.

Dann gilt $2x^2 + 5x - 7 = (x - 5)(2x + 15) + 68$ $(q = 2x + 15, r = 68)$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis

Beweis. 1. Existenz von q und r. Induktion nach $n = \mathrm{Grad}(f)$.
Sei $m = \mathrm{Grad}(g)$.

Wenn $n < m$ ist, dann kann man q als Nullpolynom und $r = f$ wählen.

Sei nun $n \geq m$. Dann ist $g \cdot x^{n-m}$ ein Polynom vom Grad n. Ferner gibt es ein $a \in K$, so dass $g' = a \cdot g \cdot x^{n-m}$ bei x^n den gleichen Koeffizienten wie f hat. Daher ist $h = f - g$, ein Polynom, dessen Grad kleiner als n ist. Nach Induktionsannahme gibt es also Polynome q' und r mit

$$h = q'g + r \quad \text{und} \quad \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g).$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis, 2. Teil

Also ist

$$f = h + g' = q'g + r + a \cdot x^{n-m} \cdot g = (q' + a \cdot x^{n-m}) \cdot g + r = qg + r,$$

wobei $q = q' + a \cdot x^{n-m}$ ist.
Damit haben wir Polynome q und r gefunden, die die gewünschte Gleichung erfüllen.

2. Eindeutigkeit von q und r. Seien q, r sowie q', r' Polynome mit

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g)$$

und

$$f = q'g + r' \quad \text{und} \quad \mathrm{Grad}(r') < \mathrm{Grad}(g).$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis: 3. Teil

Daraus ergibt sich

$$(q - q')g = qg - q'g = r' - r.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung ein Polynom ist, dessen Grad kleiner als Grad(g) ist, muss auch die linke Seite einen Grad kleiner als Grad(g) haben.
Da die linke Seite aber ein Vielfaches von g ist, kann dies nur dann der Fall sein, wenn das fragliche Vielfache von g das Nullpolynom ist.

Also ist $r - r'$ das Nullpolynom, und somit ist auch $q'-q$ das Nullpolynom. Das heißt $r = r'$ und $q' = q$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Nullstellen

Definition. Sei $K[x]$ der Polynomring über dem Körper K. Sei $f \in K[x]$.
Man nennt ein Körperelement k eine **Nullstelle** von f, falls $f(k) = 0$ ist.

5.2.2 Lemma über die Nullstellen eines Polynoms (Satz von Ruffini). Sei k eine Nullstelle des Polynoms $f \in K[x]$.
Dann gibt es ein Polynom $q \in K[x]$ mit $f = q \cdot (x - k)$.

Kurz: Wenn k eine Nullstelle von f ist,
dann ist $x-k$ ein Faktor von f.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis

Beweis. Sei $g := x–k$. Der Satz über Polynomdivision ergibt

$$f = q\cdot(x – k) + r \text{ mit } \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g) = 1.$$

Daher hat r den Grad 0 oder ist das Nullpolynom. In jedem Fall ist r ein konstantes Polynom.

Durch Einsetzen sieht man, dass $r(k) = 0$ ist:

$$r(k) = [f – q\cdot(x – k)](k) = f(k) – q(k)\cdot(x – k)(k) = 0 – q(k)\cdot 0 = 0.$$

Das einzige konstante Polynom mit einer Nullstelle ist aber das Nullpolynom; somit ist $f = q\cdot(x – k)$. Das ist die Behauptung.

© Beutelspacher
Mai 2006

Vielfachheit einer Nullstelle

Definition. In Analogie zu der Situation in $\mathbf{Z}$ sagen wir, dass ein Polynom g ein Polynom $f \in K[x]$ **teilt**, wenn es ein Polynom $h \in K[x]$ gibt mit $f = g\cdot h$. In diesem Fall schreiben wir auch $g \mid f$.

Definition. Sei k eine Nullstelle des Polynoms $f \in K[x]$.
Dann heißt die größte natürliche Zahl v, so dass $(x – k)^v$ das Polynom f teilt, die **Vielfachheit der Nullstelle** k von f.

Wenn v die Vielfachheit der Nullstelle k von f ist, dann kann man f schreiben als

$$f = (x – k)^v\cdot q$$

für ein geeignetes Polynom $q \in K[x]$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Nullstellen von Polynomen

5.2.3 Satz über die Nullstellen eines Polynoms. Sei f ein Polynom aus $K[x]$. Seien $k_1, k_2, ..., k_s$ paarweise verschiedene Nullstellen mit Vielfachheiten $v_1, v_2, ..., v_s$ von f. Dann kann man f schreiben als

$$f = (x - k_1)^{v1} \cdot (x - k_2)^{v2} \cdot ... \cdot (x - k_s)^{vs} \cdot q$$

für ein geeignetes Polynom $q \in K[x]$.

Die wichtigste Folgerung aus diesem Satz ist

5.2.4 Satz über die Anzahl der Nullstellen. Ein Polynom vom Grad n über einem Körper hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis der Folgerung

Beweis. Wir zerlegen f so weit wie möglich in Linearfaktoren. D.h.

$$f = (x - k_1)^{v1} \cdot (x - k_2)^{v2} \cdot ... \cdot (x - k_s)^{vs} \cdot q$$

mit einem Polynom q, das keine Nullstelle hat.
Wir betrachten jetzt das Polynom

$$f^* = (x - k_1)^{v1} \cdot (x - k_2)^{v2} \cdot ... \cdot (x - k_s)^{vs} .$$

Da f^* die Faktoren $(x - k_1)^{v1}$, $(x - k_2)^{v2}$, ..., $(x - k_s)^{vs}$ hat, ist der Grad von f^* genau $v_1+v_2+ ... +v_s$. Insbesondere gilt für die Anzahl s aller Nullstellen von f:

$$s \leq v_1+v_2+ ... +v_s = \text{Grad}(f^*) \leq \text{Grad}(f) = n.$$

Also hat f höchstens n Nullstellen.

© Beutelspacher
Mai 2006

Ideale

Definition. Sei R ein kommutativer Ring. Eine Teilmenge I von R heißt ein **Ideal** von R, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

– $I \neq \{\}$,

– Additivität: Wenn $a, b \in I$, so ist auch $a+b \in I$ und $a - b \in I$,

– Magnetische Anziehungseigenschaft: Wenn $a \in I$ und $r \in R$ sind, so ist auch $r \cdot a \in I$.

Beispiele. (a) Jeder Ring R hat die **trivialen** Ideale {0} und R.

(b) Die Menge der geraden Zahlen ist ein Ideal von **Z**.
Allgemein: Die Vielfachen einer ganzen Zahl a bilden ein Ideal.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beispiele von Idealen

(c) Die Menge I aller Polynome von K[x] mit Absolutglied = 0 ist ein Ideal: $I = \{x \cdot f \mid f \in K[x]\}$.
Allgemein: Für jedes Polynom g ist die Menge $I(g) = \{f \cdot g \mid f \in K[x]\}$ ein Ideal von K[x].

Noch allgemeiner: Für jede Menge $\{g_1, g_2, \ldots\}$ von Polynomen ist die Menge $I(g_1, g_2, \ldots) = \{f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 + \ldots \mid f_1, f_2, \ldots \in K[x]\}$ ein Ideal von K[x]. Beispiel: $I(x^3-1, x^4-1)$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Hauptideale

Definition. Sei R ein Ring. Für $a \in R$ bezeichnen wir mit $I(a)$ die Menge aller Vielfachen von a, d.h.

$$I(a) = \{r \cdot a \mid r \in R\}.$$

Man nennt $I(a)$ das **von** a **erzeugte Hauptideal**.

Ein Hauptideal besteht also nur aus den Vielfachen eines einzigen Elements; dies sind die Ideale, die man am einfachsten beschreiben kann. In der Literatur findet man auch die Schreibweise (a) für $I(a)$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Jedes Ideal ist ein Hauptideal

5.2.5 Ideale eines Polynomrings. Jedes Ideal eines Polynomrings $K[x]$ in einer Unbestimmten ist ein Hauptideal!

Beispiel. Was ist $I(x^3-1, x^4-1)$? Dies ist das Hauptideal (nach Satz), das von $x-1$ erzeugt wird: $I(x^3-1, x^4-1) = I(x-1)$ (ÜA).

Beweis. Sei I ein beliebiges Ideal von $K[x]$. O.B.d.A. $I \neq \{0\}$, denn das „Nullideal“ $\{0\}$ wird von 0 erzeugt.

Zu zeigen: Es gibt ein Polynom g mit $I = I(g)$.

Wir wissen: I enthält Polynome vom Grad ≥ 0.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis des Satzes über Hauptideale

Trick: Wir finden ein erzeugendes Polynom, indem wir ein Polynom kleinsten Grades in I betrachten.

Genauer gesagt: Die *Menge der Grade* ≥ 0 der in I liegenden Polynome ist nicht leer. Also hat diese Menge ein kleinstes Element m.

Sei g ein Polynom vom Grad m in I.

Behauptung: g erzeugt I.

Zu zeigen: Für jedes Polynom $f \in I$ gibt es $q \in K[x]$ mit $f = q \cdot g$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis: Eigentlich ist es nur Polynomdivision ...

Dazu wenden wir Polynomdivision an: Es gibt $q, r \in K[x]$ mit

$$f = qg + r \text{ und } \text{Grad}(r) < \text{Grad}(g).$$

Nach Definition eines Ideals ist mit g auch $(-q)g$ ein Element von I. Ferner liegt mit f und $-qg$ auch $f-qg$ in I. D.h. $r = f-qg \in I$.

Da aber $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(g)$ ist und da $\text{Grad}(g)$ minimal unter allen nichtnegativen Graden der Polynome in I ist,
muss r einen negativen Grad haben.
Somit ist r das Nullpolynom, und es folgt $f = qg$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Kapitel 6
Determinanten

Inhalt

6.1 Permutationen: $\pi = (3\ 7\ 5\ 1\ 2)$

6.2 Die Leibnizsche Determinantenformel: det(M) = ...

6.3 Die Determinantenfunktion: det(M)

6.4 Wie berechnet man eine Determinante?

6.4 Der Multiplikationssatz: det(MN) = det(M)det(N)

6.1 Permutationen

Um Determinanten explizit bestimmen zu können, braucht man Permutationen.

Definition. Eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge X in sich wird eine **Permutation** von X genannt.
Wir werden stets voraussetzen, dass X mindestens zwei Elemente hat.

6.1.1 Satz (Anzahl aller Permutationen). Eine endliche Menge mit n Elementen besitzt genau $n!$ Permutationen.

Beispiel: Es gibt genau 26! = 403.29.461.126.605.635.584.000.000 Permutationen der Menge der Buchstaben A, B, C, ..., Z.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis

Beweis. Sei $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Um eine Permutation π festzulegen, müssen wir die Bilder $\pi(x_1), \pi(x_2), ..., \pi(x_n)$ festlegen.

Für $\pi(x_1)$ haben wir n Möglichkeiten, nämlich alle Elemente von X.

Für $\pi(x_2)$ gibt es noch $n–1$ Möglichkeiten, nämlich alle Elemente von X außer $\pi(x_1)$.

Für $\pi(x_3)$ gibt es noch $n–2$ Möglichkeiten, nämlich alle Elemente von X außer $\pi(x_2)$ und $\pi(x_1)$.

Usw.

Insgesamt gibt es $n \cdot (n–1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.
Diese Zahl wird mit $n!$ (sprich „n Fakultät“) abgekürzt.

© Beutelspacher
Mai 2006

Erste Schreibweise für eine Permutation

Man kann eine Permutation π – wie jede Abbildung – dadurch beschreiben, dass man das Bild jedes Elementes angibt.
Erste Zeile: Elemente von X (meist in der natürlichen Reihenfolge); zweiten Zeile: unter jedem Element i steht das Bild $\pi(i)$.

Beispiel: Die Permutation

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

bildet 1 auf 3, 2 auf 4, 3 auf 5, 4 auf 6, 5 auf 1, usw. ab.

Im allgemeinen:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n-1 & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(i) & \dots & p(n-1) & p(n) \end{pmatrix}.$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Zyklische Permutationen

Definition. Eine Permutation π von X wird ein **Zyklus** (**zyklische Permutation**) genannt, falls die Elemente, die von π bewegt werden, zyklisch vertauscht werden. Genauer : Eine Permutation π ist **zyklisch**, falls es ein $i \in X$ und eine natürliche Zahl k gibt mit

(1) $\pi^k(i) = i$,

(2) die Elemente $i, \pi(i), \pi^2(i), ..., \pi^{k-1}(i)$ sind paarweise verschieden,

(3) jedes Element $\neq i, \pi(i), \pi^2(i), ..., \pi^{k-1}(i), \pi^k(i) (= i)$ wird von π festgelassen.

Die kleinste solche natürliche Zahl k heißt **Länge** des Zyklus π. Wir schreiben $\pi = (i\ \pi(i)\ \pi^2(i)\ \dots\ \pi^{k-1}(i))$ und nennen π einen k-Zyklus.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beispiele

Beispiel: $\pi = (3\ 7\ 5\ 1\ 2) \in \mathbf{S}_7$ ist ein Zyklus der Länge 5.
Genauer: Die Permutation π vertauscht die Elemente 3, 7, 5, 1, 2 zyklisch und lässt alle anderen Elemente (das heißt 4 und 6) fest.

$\pi = (2\ 4) \in \mathbf{S}_5$ ist ein Zyklus der Länge 2.

(2 4 6 8) = (4 6 8 2) = (6 8 2 4) = (8 2 4 6).

Definition. Ein Zyklus der Länge 2 heißt eine **Transposition**. Eine Transposition vertauscht also genau zwei Elemente.

Definition. Sei π eine Permutation der Menge X. Wir sagen, dass π das Element $i \in X$ **fest lässt**, falls $\pi(i) = i$ ist. Man nennt i dann auch einen **Fixpunkt** von π.

© Beutelspacher
Mai 2006

Jede Permutation ist Produkt disjunkter Zyklen

Darstellung einer Permutation als Produkt disjunkter Zyklen.
Jede Permutation kann als Produkt zyklischer Permutationen geschrieben werden, von denen keine zwei ein Element gemeinsam haben.

Das heißt: Zu jedem $\pi \in \mathbf{S}_n$ gibt es zyklische Permutationen $\zeta_1, ..., \zeta_s \in \mathbf{S}_n$, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

– („Produkt“) $\pi = \zeta_1\zeta_2...\zeta_s$,

– („disjunkt“) kein Element aus X, das von einer „Komponente“ ζ_i bewegt wird, wird von einer anderen Komponente ζ_j ebenfalls bewegt
($i, j = 1, ..., n,\ i \neq j$).

© Beutelspacher
Mai 2006

Beispiel

Beispiel: Wir betrachten die Permutation

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8 .$$

Wir verfolgen den „Weg“ der einzelnen Elemente: Element 1 wird auf 3 abgebildet, 3 auf 5 und 5 auf 1. Der erste Zyklus ist also

$$\zeta_1 = (1\ 3\ 5).$$

Nun betrachten wir ein Element, das noch nicht auftauchte, zum Beispiel 2. Dieses wird auf 4, 4 wird auf 6 und 6 wieder auf 2 abgebildet. Daher lautet der zweite Zyklus

$$\zeta_2 = (2\ 4\ 6).$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Beispiel (Forts.)

Es gibt noch ein Element, das nicht erfasst wurde, nämlich 7. Dieses wird mit 8 vertauscht; also lautet der dritte (und letzte) Zyklus

$$\zeta_3 = (7\ 8).$$

Die gesamte Permutation π lässt sich also schreiben als

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1\,3\,5)(2\,4\,6)(7\,8) = ?_1 \cdot ?_2 \cdot ?_3 .$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Die symmetrische Gruppe

Bemerkung. Für das Studium von Permutationen spielt es keine Rolle, *welche* n-elementige Menge wir betrachten. Daher werden wir in der Regel die Menge $X = \{1, 2, ..., n\}$ zugrunde legen.

Definition. Die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ bezeichnet man mit S_n. Diese Struktur wird die **symmetrische Gruppe** auf n Elementen genannt. („Gruppen“ werden in der Algebra behandelt.)

Offenbar ist das Produkt zweier Permutationen wieder eine Permutation. Wenn wir das Produkt $\pi\psi$ der Permutationen π und ψ berechnen, arbeiten wir *von rechts nach links* („erst ψ, dann π“).

© Beutelspacher
Mai 2006

Gerade und ungerade Permutationen

6.1.2 Darstellung von Permutationen durch Transpositionen.
Man kann jede Permutation als Produkt von Transpositionen darstellen

Beweis. 1. Da jede Permutation ein Produkt von Zyklen ist, genügt es, die Aussage nur für Zyklen zu beweisen.
2. Der Zyklus $(x_1\ x_2\ x_3 ...\ x_k)$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben:

$$(x_1\ x_2\ x_3 ...\ x_k) = (x_1\ x_2)(x_2\ x_3) ... (x_{k-2}\ x_{k-1})(x_{k-1}\ x_k).$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Beispiel

$\pi = (3\ \ 5\ \ 8) = (3\ \ 5)(5\ \ 8)$ (Produkt von Transpositionen)

$(3\ \ 5) = (4\ \ 5)(3\ \ 4)(4\ \ 5)$ und $(5\ \ 8) = (7\ \ 8)(6\ \ 7)(5\ \ 6)(6\ \ 7)(7\ \ 8)$.

(Produkt von Nachbartranspositionen)

Damit folgt

$\pi = (3\ \ 5\ \ 8) = (3\ \ 5)(5\ \ 8)$
$= (4\ \ 5)(3\ \ 4)(4\ \ 5)(7\ \ 8)(6\ \ 7)(5\ \ 6)(6\ \ 7)(7\ \ 8)$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Gerade Permutationen und Transpositionen

6.1.3 Satz über gerade Permutationen. *Sei $\pi \in \mathbf{S}_n$ eine Permutation. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*
(a) *π kann als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden.*
(b) *π kann nicht als Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden.*

Definition. Man nennt eine solche Permutation π **gerade** und schreibt $\mathrm{sig}(\pi) = 1$ („Signum“).

Die Menge aller geraden Permutationen aus $\mathbf{S}_n$ wird mit mit $\mathbf{A}_n$ bezeichnet. Diese Menge wird die **alternierende Gruppe** genannt.

© Beutelspacher
Mai 2006

Ungerade Permutationen

6.1.4 Satz über ungerade Permutationen. *Sei* $\pi \in \mathbf{S}_n$ *eine Permutation. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*
(a) π *kann als Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden.*
(b) π *kann nicht als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden.*

Definition. Man nennt eine solche Permutation π **ungerade** und schreibt $\mathrm{sig}(\pi) = -1$ („Signum“).

© Beutelspacher
Mai 2006

Signumsformel

6.1.5 Signumsformel. Seien $\pi, \psi \in \mathbf{S}_n$. Dann gilt:

$$\mathrm{sig}(\pi\psi) = \mathrm{sig}(\pi)\cdot\mathrm{sig}(\psi).$$

In Worten: Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Permutation ist ungerade usw.

Beweis. Eine Permutation hat genau dann Signum 1 (bzw. –1), wenn sie Produkt einer geraden (bzw. ungeraden) Anzahl von Transpositionen ist.

© Beutelspacher
Mai 2006

Signum der inversen Permutation

6.1.6 Signum der inversen Permutation. Für jede Permutation $\pi \in \mathbf{S}_n$ gilt: π ist genau dann gerade, wenn π^{-1} gerade ist.
Mit anderen Worten:

$$\text{sig}(\pi) = \text{sig}(\pi^{-1}).$$

Beweis. Da die Identität $\text{id} = \pi\pi^{-1}$ gerade ist, müssen π und π^{-1} entweder beide Produkt einer geraden Anzahl oder beide Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen sein.

$\mathbf{A}_n$

Definition. Die Menge aller geraden Permutationen aus $\mathbf{S}_n$ wird mit mit $\mathbf{A}_n$ bezeichnet. Diese Menge wird die **alternierende Gruppe** genannt.

Satz über die alternierende Gruppe.
(a) Das Produkt je zweier Permutationen aus $\mathbf{A}_n$ liegt wieder in $\mathbf{A}_n$.
D.h.: $\mathbf{A}_n$ ist bezüglich der Hintereinanderausführung von Permutationen abgeschlossen.
(b) Für jede Permutation $\pi \in \mathbf{S}_n \backslash \mathbf{A}_n$ gilt $\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n \cup \pi\mathbf{A}_n$
wobei $\pi\mathbf{A}_n := \{\pi\alpha \mid \alpha \in \mathbf{A}_n\}$ ist.
(c) Für $n \geq 2$ gilt $|\mathbf{A}_n| = n!/2$.
D.h. Genau die Hälfte der Permutationen ist gerade.

6.2 Die Leibnizsche Determinantenformel

Leibnizsche Determinantenformel. Sei n eine natürliche Zahl. Durch die folgende Vorschrift det wird eine Determinantenfunktion definiert. Sei $M = (m_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ eine n×n-Matrix mit Elementen aus K. Dann ist

$$\det(M) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sig}(p) \cdot m_{1,p(1)} \cdot m_{2,p(2)} \cdot \ldots \cdot m_{n,p(n)}.$$

Determinante der Einheitsmatrix

6.2.1 Folgerung. *Es gilt* $\det(E_n) = 1$.

Beweis. Prinzipiell muss man für alle Permutationen die Produkte ausrechnen und diese aufsummieren. In Wirklichkeit muss man aber nur die Permutationen π berücksichtigen, für die gilt

$$\operatorname{sig}(\pi) \cdot m_{1,\pi(1)} \cdot m_{2,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\pi(n)} \neq 0.$$

Dazu müssen alle Elemente $m_{1,\pi(1)}, m_{2,\pi(2)}, \ldots, m_{n,\pi(n)}$ ungleich Null sein. Wegen $M = E_n$ ist dies nur dann der Fall, wenn $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 2, \ldots, \pi(n) = n$ gilt. Also ist π die Identität id., und es ist

$$\det(E_n) = \operatorname{sig}(id) \cdot m_{11} \cdot m_{22} \cdot \ldots \cdot m_{nn} = 1.$$

Determinante einer 2´2-Matrix

6.2.2 Folgerung. Die Determinante einer 2´2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

berechnet sich nach der Leibnizschen Formel als

$$\det(M) = ad - bc.$$

Beweis. Es gibt genau zwei Permutationen der Menge 1, 2, nämlich die Identität ε und die Transposition $\tau = (1\ 2)$. Daher ergibt sich:

$$\det(M) = \mathrm{sig}(\varepsilon)\cdot m_{1,\varepsilon(1)} \cdot m_{2,\varepsilon(2)} + \mathrm{sig}(\tau) \cdot m_{1,\tau(1)} \cdot m_{2,\tau(2)}$$

$$= 1\cdot m_{11}\cdot m_{22} + (-1)\cdot m_{12}\cdot m_{21} = ad - bc.$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Übungen

$$\det\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Regel von Sarrus

6.2.3 Folgerung (Regel von Sarrus). Sei $M = (m_{ij})$ eine 3×3-Matrix, dann gilt

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$= m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} - m_{31}m_{22}m_{13} - m_{32}m_{23}m_{11} - m_{33}m_{21}m_{12}.$$

(Man muss die drei „Diagonalen“ in Richtung der Hauptdiagonalen mit Plus und die drei „Diagonalen“ in Richtung der Nebendiagonalen mit Minus versehen.)

Pierre-Frédéric Sarrus, französischer Mathematiker, 1798 - 1858.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis der Regel von Sarrus

Beweis. Es gibt sechs Permutationen der Menge {1, 2, 3}, nämlich die Identität id., die beiden 3-Zyklen (1 2 3) und (1 3 2) sowie die drei Transpositionen (1 2), (2 3) und (1 3). Also kann man die Determinante der 3×3-Matrix M gemäß der Leibnizschen Formel wie folgt ausrechnen:

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{sig}(\mathrm{id})\cdot m_{11}m_{22}m_{33} + \mathrm{sig}(123)\cdot m_{12}m_{23}m_{31} + \mathrm{sig}(132)\cdot m_{13}m_{21}m_{32}$$
$$+ \mathrm{sig}(12)\cdot m_{12}m_{21}m_{33} + \mathrm{sig}(23)\cdot m_{11}m_{23}m_{32} + \mathrm{sig}(13)\cdot m_{13}m_{22}m_{31}$$
$$= m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} - m_{31}m_{22}m_{13} - m_{32}m_{23}m_{11} - m_{33}m_{21}m_{12}.$$

© Beutelspacher
Mai 2006

6.3 Die Determinantenfunktion

Ziel: Wir zeigen, dass die Determinante einige sehr (schöne und) nützliche Eigenschaften hat.

Definition. Eine Abbildung $\det: K^{n\times n} \to K$ heißt eine **Determinantenfunktion**, falls sie die folgenden drei Eigenschaften hat:

© Beutelspacher
Mai 2006

Definition (Forts.)

(D1) Die Abbildung det ist **linear** (das heißt **additiv** und homogen) in jeder Zeile. Das heißt: Für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ und jedes $k \in K$ gilt

$$\det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ k \cdot z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = k \cdot \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $z_1, z_2, ..., z_n$ die Zeilen einer $n\times n$-Matrix.

(D2) Wenn Rang(M) < n ist, dann ist det(M) = 0.

(D3) $\det(E_n) = 1$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Invarianz gegenüber elementaren Zeilenumformungen

6.3.1 Satz. Sei $M \in K^{n\times n}$. Dann gilt für jede Determinantenfunktion det:

(a) Wenn man M durch Multiplikation einer Zeile mit einem Körperelement k in M' verwandelt, so ist $\det(M') = k\cdot\det(M)$.

(b) Wenn man ein Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile aus M addiert, so gilt für das Ergebnis M': $\det(M') = \det(M)$.

(c) Wenn man M durch Vertauschen zweier Zeilen in M' verwandelt, dann ist $\det(M') = -\det(M)$.

Bemerkung. In der Sprache der linearen Gleichungssysteme handelt es sich um „elementare Zeilenumformungen des Typs 2, 3, und 1“.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis

Beweis. (a): Homogenität in der entsprechenden Zeile.

(b) Wir addieren das k-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile von M und erhalten M'.

Sei M^* die Matrix, die aus M entsteht, indem die j-te Zeile durch das k-fache der i-ten *ersetzt* wird. Dann folgt aus (D1):

$$\det(M') = \det(M) + \det(M^*).$$

Da in M^* die i-te und die j-te Zeile linear abhängig sind, folgt wegen (D2) $\det(M^*) = 0$. Also

$$\det(M') = \det(M) + \det(M^*) = \det(M).$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis: Vertauschen zweier Zeilen

(c) In M vertauscht man die i-te und die j-te Zeile $\rightarrow M'$.
In M addiert man die j-te Zeile zur i-ten $\rightarrow M_i$.
In M' addiert man die j-te Zeile (d.h. i-te Z. von M) zur i-en $\rightarrow M_j'$.

Nach (b) gilt: $\det(M_i) = \det(M)$ und $\det(M_j') = \det(M')$.

M_i und M_j' unterscheiden sich nur in der j-ten Zeile, da in beiden in der i-ten Zeile die Summe der i-ten und j-ten Zeile von M steht.

In M ersetzt man die i-te und die j-te Zeile durch ihre Summe $\rightarrow N$.
Nach (D2) ist $\det(N) = 0$. Dann folgt mit (D1)

$$0 = \det(N) = \det(M_i) + \det(M_j') = \det(M) + \det(M').$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Eindeutigkeit der Determinantenfunktion

6.3.2. Satz. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ gibt es höchstens eine Determinantenfunktion.

Beweis. Seien det, det': $K^{n\times n} \rightarrow K$ Determinantenfunktionen.
Zu zeigen: Für alle $n\times n$-Matrizen M gilt $\det(M) = \det'(M)$.

Hilfsaussage: Wenn die $n\times n$-Matrizen N und M durch elementare Zeilenumformungen auseinander hervorgehen, so gilt

$$\det(M) = \det'(M) \Rightarrow \det(N) = \det'(N).$$

Sei $M \in K^{n\times n}$ beliebig. Falls $\text{Rang}(M) < n$, dann $\det(M) = 0 = \det'(M)$.
Sei also $\text{Rang}(M) = n$. Dann kann man M durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n verwandeln (Kapitel 4).
Nach (D3) ist $\det(E_n) = 1 = \det'(E_n)$. Somit ist $\det(M) = \det'(M)$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Determinante einer regulären Matrix

6.3.3 Satz (Determinante einer regulären Matrix). Sei M eine $n \times n$-Matrix. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(a) M ist regulär (d.h. M besitzt eine Inverse),

(b) $\text{Rang}(M) = n$,

(c) $\det(M) \neq 0$.

Beweis. Wir wissen: Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann regulär, wenn ihr Rang n ist. Daher gilt „(a) $\Leftrightarrow$ (b)".

„(c) $\Rightarrow$ (b)": Kontraposition von (D2).

„(b) $\Rightarrow$ (c)" wurde in obigem Beweis mitbewiesen.

© Beutelspacher
Mai 2006

Existenz und Eindeutigkeit der Determinantenfunktion

6.3.5 Hauptsatz. Für jede natürliche Zahl n gibt es genau eine Determinantenfunktion.
Jede Determinantenfunktion lässt sich mit der Leibnizschen Formel ausdrücken.

Beweis. Nach dem Satz über die Eindeutigkeit der Determinantenfunktion gibt es für jedes n höchstens eine Determinantenfunktion. Also muss man „nur" zeigen, dass die Leibnizsche Formel eine Determinantenfunktion ist.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis der Leibnizschen Formel: (D1)

Beweis. Wir definieren für jede n×n-Matrix M:

$$L(M) = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sig}(p) \cdot m_{1,p(1)} \cdot m_{2,p(2)} \cdot \ldots \cdot m_{n,p(n)}.$$

Zu zeigen: L erfüllt (D1), (D2) und (D3). Sei $M = (m_{ij}) \in K^{n\times n}$.

(D1) Additivität: Für jedes $\pi \in \mathbf{S}_n$ gilt:

$$m_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot m_{i-1,\pi(i-1)} \cdot (m_{i,\pi(i)} + m'_{i,\pi(i)}) \cdot m_{i+1,\pi(i+1)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\pi(n)}$$
$$= m_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot m_{i-1,\pi(i-1)} \cdot m_{i,\pi(i)} \cdot m_{i+1,\pi(i+1)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\pi(n)} +$$
$$m_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot m_{i-1,\pi(i-1)} \cdot m'_{i,\pi(i)} \cdot m_{i+1,\pi(i+1)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\pi(n)}$$

Homogenität:

$$m_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot m_{i-1,\pi(i-1)} \cdot k \cdot m_{i,\pi(i)} \cdot m_{i+1,\pi(i+1)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\pi(n)}$$
$$= k \cdot m_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot m_{i-1,\pi(i-1)} \cdot m_{i,\pi(i)} \cdot m_{i+1,\pi(i+1)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\pi(n)} .$$

Beweis der Leibnizschen Formel: (D2)

(D3): schon bewiesen.

(D2) Sei Rang(M) < n. Dann sind die Zeilen von M linear abhängig. Sei o.B.d.A. die erste Zeile z_1 eine Linearkombination der anderen.

Reduktion: Aufgrund der schon bewiesenen Eigenschaft (D1) gilt:

$$L\begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{n} k_i z_i \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = k_2 \cdot L\begin{pmatrix} z_2 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + k_3 \cdot L\begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \ldots + k_n \cdot L\begin{pmatrix} z_n \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Auf der rechten Seite wird L auf Matrizen angewandt, die jeweils zwei gleiche Zeilen haben.

Beweisreduktion

Also genügt zu zeigen: L(M) = 0, falls M zwei gleiche Zeilen hat.

Sei M eine Matrix, in der zwei Zeilen, o.B.d.A. die ersten beiden, gleich sind. Dann ist L(M) = 0.

Sei $\tau = (1\ 2)$. Nach dem Satz über die alternierende Gruppe gilt $\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n \cup \mathbf{A}_n\tau$. Also berechnet sich L(M) wie folgt (nächste Folie):

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweisabschluss

$$
\begin{aligned}
L(M) &= \sum_{p \in S_n} \mathrm{sig}(p) \cdot m_{1,p(1)} \cdot m_{2,p(2)} \cdot \ldots \cdot m_{n,p(n)} \\
&= \sum_{a \in A_n} [\mathrm{sig}(a) \cdot m_{1,a(1)} \cdot m_{2,a(2)} \cdot \ldots \cdot m_{n,a(n)} \\
&+ \mathrm{sig}(at) \cdot m_{1,at(1)} \cdot m_{2,at(2)} \cdot \ldots \cdot m_{n,at(n)}] \\
&= \sum_{a \in A_n} [m_{1,a(1)} \cdot m_{2,a(2)} \cdot m_{3,a(3)} \cdot \ldots \cdot m_{n,a(n)} \\
&- m_{1,a(2)} \cdot m_{2,a(1)} \cdot \cdot m_{3,a(3)} \cdot \ldots \cdot m_{n,a(n)}] \\
&= \sum_{a \in A} [m_{1,a(1)} \cdot m_{2,a(2)} - m_{1,a(2)} \cdot m_{2,a(1)}] \cdot m_{3,a(3)} \cdot \ldots \cdot m_{n,a(n)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

© Beutelspacher
Mai 2006

6.4 Wie berechnet man Determinanten?

6.4.1 Satz (Reduktion der Determinante auf eine Diagonalmatrix). Sei M eine beliebige Matrix aus $K^{n\times n}$. Dann kann man M durch elementare Zeilenumformungen vom Typ 3 (das heißt Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen) in eine Matrix verwandeln, bei der jedes Element unterhalb der Hauptdiagonalen Null ist.
Bei diesem Vorgang ändert sich die Determinante nicht.

Wenn $\det(M) \neq 0$ ist, so kann man die Matrix M durch elementare Zeilenumformungen vom Typ 3 sogar in eine **Diagonalmatrix** verwandeln, die dieselbe Determinante wie M hat.

© Beutelspacher
Mai 2006

Dreiecksmatrizen

Determinante einer Dreiecksmatrix. Sei $M \in K^{n\times n}$ eine Matrix der folgenden Gestalt:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & \dots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & & & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & & m_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Man nennt M eine **obere Dreiecksmatrix**.) Dann gilt: ·

$$\det(M) = m_{11}\cdot m_{22} \cdot \dots \cdot m_{nn}.$$

Kurz: Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente. Dies gilt insbesondere für Diagonalmatrizen.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis

Beweis. In der Leibnizschen Formel sind nur solche Summanden $\text{sig}(\pi)m_{1,\pi(1)}\cdot m_{2,\pi(2)}\cdot\ldots\cdot m_{n,\pi(n)} \neq 0$, für die $m_{i,\pi(i)} \neq 0$ ist für alle i.

Da M eine obere Dreiecksmatrix ist, brauchen wir nur diejenigen Summanden zu betrachten mit $1 \leq \pi(1), 2 \leq \pi(2), \ldots, n \leq \pi(n)$.

Behauptung: $\pi = \text{id}$. Wäre $\pi \neq \text{id}$., so gäbe es ein i mit $i < \pi(i)$. Sei i die kleinste solche Zahl. Sei $\pi(j) = i$. Dann ist $j \geq i-1$ (sonst wäre $\pi(j) = j \neq i$). Ferner ist auch $j \neq i$ (sonst wäre $\pi(i) = \pi(j) = i$). Also ist $j > i$, und es wäre $j > i = \pi(j)$: Widerspruch.)

Daher folgt

$$\det(M) = \text{sig}(\text{id}) \cdot m_{11} \cdot m_{22} \cdot \ldots \cdot m_{nn}.$$

M_{ij}

Definition. Für eine $n\times n$-Matrix M bezeichnen wir mit M_{ij} diejenige $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die aus M durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Idee: Man führt die Berechnung der Determinante der „großen“ $n\times n$-Matrix M auf die Berechnung der Determinanten der „kleinen“ $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen M_{ij} zurück.

Entwicklung nach einer Zeile

Entwicklung nach der i-ten Zeile. Sei $M = (m_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ eine Matrix aus $K^{n \times n}$. Dann gilt für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(M_{ij}) .$$

Mit anderen Worten: Um die Determinante zu berechnen, geht man die i-te Zeile Element für Element durch, multipliziert jedes Element mit der entsprechenden **Unterdeterminante** und addiert diese Produkte mit alternierenden Vorzeichen.

© Beutelspacher
Mai 2006

Entwicklung nach der ersten Zeile

Entwicklung nach der ersten Zeile. Sei $M = (m_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ eine Matrix aus $K^{n \times n}$. Dann gilt:

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot m_{1j} \cdot \det(M_{1j}) .$$

Mit anderen Worten: Um die Determinante zu berechnen, geht man die erste Zeile Element für Element durch, multipliziert jedes Element mit der entsprechenden **Unterdeterminante** und addiert diese Produkte mit alternierenden Vorzeichen, wobei man mit + beginnt..

© Beutelspacher
Mai 2006

Beispiel

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 9\end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 9\end{pmatrix} + 5\cdot\det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweisidee

Beweis. Induktion nach n.

Induktionsbasis: n = 1 trivial.

Induktionsschritt: Sei n > 1 und die Aussage richtig für n–1.
Zu zeigen: Die Abbildung Δ, die definiert ist durch

$$\Delta(M) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot m_{1j} \cdot \det(M_{1j}),$$

erfüllt die Bedingungen (D1), (D2) und (D3). Dann ist Δ eine, und damit *die* Determinantenfunktion. Also gilt det = Δ.
Beachte: Die Funktion det auf der rechten Seite operiert nur auf (n–1)×(n–1)-Matrizen.

© Beutelspacher
Mai 2006

Entwicklung nach einer Spalte

Entwicklung nach einer Spalte. Sei $M = (m_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ eine Matrix aus $K^{n \times n}$. Dann gilt für alle $j \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(M_{ij}) .$$

Das heißt: Man geht die j-te Spalte Element für Element durch, multipliziert jeweils ein Element mit der entsprechenden Unterdeterminante und addiert diese Produkte mit alternierendem Vorzeichen.

Beweisidee. Entwicklung nach der ersten Spalte: Definiere Γ:

$$\Gamma(M) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(M_{ij}) .$$

Zeige, dass Γ den Bedingungen (D1), (D2) und (D3) genügt.

© Beutelspacher
Mai 2006

Die transponierte Matrix

Definition. Die zu einer n×m-Matrix M **transponierte** Matrix M^T ist eine m×n-Matrix, die dadurch entsteht, dass man die Zeilen als Spalten liest und umgekehrt.

Formaler: Sei $M = (m_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$. Dann ist die zu M **transponierte** Matrix M^T gleich

$$M^T = (m_{ji})_{1 \le j \le n, 1 \le i \le m}.$$

Andere Bezeichnungen für M^T: M', M*, M^t oder ${}^tM$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beispiele, Satz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ A & B & C & D & E \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & A \\ 2 & 7 & B \\ 3 & 8 & C \\ 4 & 9 & D \\ 5 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Determinante der transponierten Matrix. Sei $M \in K^{n\times n}$. Dann gilt $\det(M^T) = \det(M)$.

© Beutelspacher
Mai 2006

6.6 Der Multiplikationssatz

Multiplikationssatz für Determinanten.
Seien $M, M' \in K^{n\times n}$. Dann gilt

$$\det(M \cdot M') = \det(M) \cdot \det(M').$$

In Worten: Die Determinante des Produkts zweier Matrizen ist gleich dem Produkt ihrer Determinanten.

1. Folgerung. Das Produkt zweier Matrizen mit Determinante $\neq 0$ hat ebenfalls Determinante $\neq 0$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Folgerungen

2. Folgerung. (a) Das Produkt zweier Matrizen mit Determinante 1 hat ebenfalls Determinante 1.
(b) Das Produkt zweier Matrizen mit Determinante 1 oder –1 hat ebenfalls Determinante 1 oder –1.

3. Folgerung. Für je zwei Matrizen $M, M' \in K^{n\times n}$ gilt

$$\det(MM') = \det(M'M).$$

4. Folgerung. Für jede invertierbare Matrix $M \in K^{n\times n}$ gilt

$$\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1}.$$

© Beutelspacher
Mai 2006

Multiplikation mit Elementarmatrizen

Multiplikation mit Elementarmatrizen. Sei $M \in K^{n\times n}$. Die Matrix M' entstehe aus M durch Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile von M ($i \neq j$). Dann gilt

$$M' = AM.$$

Dabei ist $A = A_{i,j}(a)$ die Matrix aus $K^{n\times n}$, die auf der Hauptdiagonale Einsen, an der Stelle (i, j) das Element a und sonst Nullen hat.

Solche Matrizen werden **Elementarmatrizen** genannt.

Jede Elementarmatrix hat die Determinante 1.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis

Beweis. Wir berechnen die Matrix AM.

Erste Zeile von AM: Man multipliziert den Vektor $(1, 0, 0, ..., 0)$ der Reihe nach mit den Spalten von M.
Das heißt: Die erste Zeile von AM ist gleich der ersten Zeile von M.

Dies gilt entsprechend für die Zeilen $z_2, ..., z_{i-1}$ und $z_{i+}, ..., z_n$.

i-te Zeile: Da die i-te Zeile von A an der i-ten Stelle eine 1, an der j-ten Stelle das Element a und sonst Nullen hat, ergibt sich als i-te Zeile von AM die Summe $z_i + az_j$.

Insgesamt folgt $AM = M'$.

Klar: $\det(A) = 1$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Inverse einer Elementarmatrix

Hilfssatz. Die zu einer Elementarmatrix inverse Matrix ist wieder eine Elementarmatrix.
Genauer: Sei $A_{i,j}(a)$ die Elementarmatrix aus $K^{n\times n}$, bei der an der Stelle (i, j) außerhalb der Hauptdiagonalen das Element $a \neq 0$ steht, dann ist $A^{-1} = A_{i,j}(-a)$.

Beweis. Berechne $A_{i,j}(a) \cdot A_{i,j}(-a)$ (ÜA).

Folgerung. Sei T ein Produkt von Elementarmatrizen. Dann ist T invertierbar und die Inverse S ist ebenfalls ein Produkt von Elementarmatrizen.

© Beutelspacher
Mai 2006

Reduktion auf eine Diagonalmatrix

Satz. Sei $M \in K^{n \times n}$. Wenn $\det(M) \neq 0$ ist, dann gibt es ein Produkt S von Elementarmatrizen und eine Diagonalmatrix D mit

$$\det(D) = \det(M) \text{ und } M = SD.$$

Man kann D so wählen, dass jedes Diagonalelement – bis auf das letzte – gleich 1 ist; dieses letzte ist dann gleich $\det(M)$.

© Beutelspacher
Mai 2006

Beweis

Beweis. Verwandle M durch elementare Zeilenumformungen vom Typ 3 in eine Diagonalmatrix D. Jede Zeilenumformung ist eine Multiplikation mit einer Elementarmatrix. Also ist der Übergang von M nach D ein Produkt T von Elementarmatrizen. Also gilt:

$$D = TM.$$

Sei S die Inverse von T. Dann ist $SD = M$.

Restliche Aussagen: ÜA.

© Beutelspacher
Mai 2006

Kapitel 7
Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

Inhalt

7.1 Eigenvektoren und Eigenwerte

$f(v) = k \cdot v$

7.2 Das charakteristische Polynom

$\chi_f = \det(M - xE)$

7.3 Das Minimalpolynom

m_f

Fragestellung

Erinnerung: Jede lineare Abbildung f eines Vektorraums V in einen Vektorraum W lässt sich durch eine Matrix ${}_B M(f)_C$ darstellen (Darstellungsmatrix).

Die Gestalt der Darstellungsmatrix hängt stark von der Wahl der Basis B von V und der Basis C von W ab.

Frage: Kann man durch geeignete Wahl dieser Basen die Darstellungsmatrix „einfach“ gestalten?
Die einfachsten Matrizen sind Diagonalmatrizen!
Man kann sie nämlich besonders einfach multiplizieren!

© Beutelspacher
Juni 2006

Voraussetzungen/Einschränkungen

- Wir betrachten nur lineare Abbildungen eines Vektorraums V in sich.
- Wir betrachten nur Darstellungsmatrizen ${}_B M_B(f)$ bezüglich einer einzigen Basis B.

(Wenn man die Basis B' des Bildraums frei wählen kann, kann man immer „diagonalisieren“!)

© Beutelspacher
Juni 2006

Die zentrale Definition

Definition. Sei f eine lineare Abbildung des K-Vektorraums V in sich. Dann heißt f **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass in der Darstellungsmatrix ${}_B M_B(f)$ höchstens auf der Diagonalen Elemente $\neq 0$ stehen.
Eine solche Matrix heißt **Diagonalmatrix**.

Mit anderen Worten: f ist diagonalisierbar, wenn bezüglich einer geeigneten Basis B die Darstellungsmatrix folgende Gestalt hat:

$$ {}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix} . $$

Diagonalisierbarkeit – in der Sprache der Basen

Wir können die Frage der Diagonalisierbarkeit so umformulieren:

7.1.1 Satz. Die lineare Abbildung f ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ von V gibt, so dass gilt

$$f(v_1) = k_1 v_1,\ f(v_2) = k_2 v_2,\ \dots,\ f(v_n) = k_n v_n$$

für geeignete Körperelemente $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Zentrale Fragen

- Ist jede lineare Abbildung diagonalisierbar? (Antwort: Nein!)
- Unter welchen Bedingungen ist eine gegebene lineare Abbildung diagonalisierbar?
- Gibt es ein Verfahren, mit dem man entscheiden kann, ob eine gegebene lineare Abbildung diagonalisierbar ist?
- Gibt es ein Verfahren, mit dem eine Diagonalmatrix finden kann?
- Wenn f nicht diagonalisierbar ist, was dann?

Bezeichnungen: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, und sei f eine lineare Abbildung von V in sich.

© Beutelspacher
Juni 2006

7.1 Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition. Ein Körperelement $k \in K$ heißt ein **Eigenwert** von f, falls es einen Vektor $v \in V$ gibt mit

$$f(v) = k \cdot v \text{ und } v \neq o.$$

Ein Vektor $v \in V$ heißt ein **Eigenvektor** von f zum Eigenwert k, falls gilt

$$f(v) = k \cdot v \text{ und } v \neq o.$$

© Beutelspacher
Juni 2006

Beispiele

(a) Die Identität hat den Eigenwert 1 und keinen sonst.

(a)' Eine lineare Abbildung f hat den Eigenwert 1, wenn es einen Vektor $v \neq o$ gibt mit $f(v) = v$.

(b) Die Nullabbildung hat 0 als Eigenwert und keinen sonst.

(b)' Eine lineare Abbildung f hat 0 als Eigenwert, wenn es einen Vektor $v \neq o$ gibt mit $f(v) = o$.

(c) Die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 bilden zusammen mit dem Nullvektor genau den Kern von f:

$$\{v \in V \mid f(v) = o, v \neq 0\} \cup \{o\} = \text{Kern}(f).$$

Beispiel

Sei f die lineare Abbildung von $\mathbf{R}^2$ in sich, die durch folgende Vorschrift definiert ist:

$$f(x, y) = (y, x).$$

Ein Vektor (a, b) ist genau dann ein Eigenvektor, wenn es ein k gibt mit

$$f(a, b) = k(a, b).$$

Das bedeutet: $(b, a) = f(a, b) = k(a, b) = (ka, kb)$.
Daher muss $b = ka$ und $a = kb$ gelten. Sei o.B.d.A. $a \neq 0$.
Dann folgt $a = kb = k^2a$, also $k = 1$ oder $k = -1$.
Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 (bzw. –1) ist (1, 1) (bzw. (1, –1)).

0. Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

0. Kriterium zur Diagonalisierbarkeit. Eine lineare Abbildung f von V in sich ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis von V aus Eigenvektoren gibt.

Beweis. (A) Wenn V eine Basis B aus Eigenvektoren von f besitzt, ist die Darstellungsmatrix ${}_BM_B(f)$ eine Diagonalmatrix.

(B) Wenn f diagonalisierbar ist, so gibt es eine Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von V, so dass ${}_BM_B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.
Behauptung: B besteht nur aus Eigenvektoren.
Seien $k_1, k_2, \ldots, k_n$ die Elemente auf der Diagonalen dieser Matrix.
Dann ist $f(v_i) = k_i v_i$ für alle i. Also ist jedes v_i ein Eigenvektor.

Eigenwerte von Matrizen

Definition. Sei $M \in K^{n\times n}$. Ein Element $k \in K$ heißt ein **Eigenwert** von M, falls k ein Eigenwert einer linearen Abbildung ist, die bezüglich einer Basis durch M definiert ist.
Kurz: *Eigenwerte von* M *sind die Eigenwerte von* f.

D. h.: $k \in K$ ist ein Eigenwert von $M = (m_{ij})$, falls es eine Basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von K^n gibt, so dass die lineare Abbildung f, die durch

$$f(v_j) := m_{1j}v_1 + m_{2j}v_2 + \ldots + m_{nj}v_n$$

definiert ist, den Eigenwert k hat.

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 1 und 0.

Verschiedene Eigenwerte sind sehr verschieden

7.1.2 Lemma über verschiedene Eigenwerte. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Beweis. Seien $k_1, k_2, ..., k_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte der linearen Abbildung f, und seien $v_1, v_2, ..., v_m$ zugehörige Eigenvektoren

Induktion nach m.

Induktionsbasis. $m = 1$: Ergibt sich aus der Definition eines Eigenwerts, da $v_1 \neq o$ ist.

Induktionsschritt. Sei $m > 1$, und sei die Behauptung richtig für $m–1$. Es sei $h_1v_1 + h_2v_2 + ... + h_mv_m = o$. Zu zeigen: $h_1 = h_2 = ... = h_m = 0$.

© Beutelspacher
Juni 2006

Beweis

Wir wenden f an:

$$o = f(o) = h_1f(v_1) + h_2f(v_2) + ... + h_mf(v_m) = h_1k_1v_1 + h_2k_2v_2 + ... + h_mk_mv_m.$$

Andererseits gilt auch

$$o = k_m \cdot o = k_m \cdot (h_1v_1 + h_2v_2 + ... + h_mv_m) = k_mh_1v_1 + k_mh_2v_2 + ... + k_mh_mv_m.$$

Da K kommutativ ist, ergibt sich zusammen

$$o = (k_m–k_1)h_1v_1 + (k_m–k_2)h_2v_2 + ... +(k_m–k_{m–1})h_{m–1}v_{m–1}.$$

Nach Induktion folgt daraus

$$(k_m–k_1)h_1 = 0, (k_m–k_2)h_2 = 0, ..., +(k_m–k_{m–1})h_{m–1} = 0.$$

Wegen $k_m \neq k_i$ $(1 \leq i \leq m–1)$, folgt $h_1 = h_2 = ... = h_{m–1} = 0$.
Damit ergibt sich auch $h_m = 0$.

© Beutelspacher
Juni 2006

n verschiedene Eigenwerte

7.1.3 Satz. Wenn eine lineare Abbildung eines n-dimensionalen Vektorraums n verschiedene Eigenwerte hat, dann ist sie diagonalisierbar.

Beweis. Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Eigenvektoren zu den n verschiedenen Eigenwerten. Nach dem Lemma sind dann $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig; also bilden sie eine Basis.
Bezüglich dieser Basis hat f Diagonalgestalt.

Beispiel. Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 1 und –1, ist also diagonalisierbar.

Eine Diagonalgestalt lautet $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

© Beutelspacher
Juni 2006

Eigenräume

Definition. Sei $k \in K$. Mit Eig(f, k) bezeichnen wir die Menge aller Vektoren v mit $f(v) = k \cdot v$:

$$\text{Eig}(f, k) := \{v \in V \mid f(v) = k \cdot v\}.$$

Man nennt Eig(f, k) den **Eigenraum** von f zum Eigenwert k.

7.1.4 Satz über Eigenräume. Sei $k \in K$ beliebig. Dann gilt:
(a) Eig(f, k) ist ein Unterraum von V.
(b) Genau dann ist k ein Eigenwert von f, wenn $\text{Eig}(f, k) \neq \{o\}$ ist.
(c) $\text{Eig}(f, k) = \text{Kern}(f - k \cdot \text{id})$.
(d) Seien $k_1, k_2, \ldots, k_s$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f. Sei B_r eine Basis von $\text{Eig}(f, k_r)$ $(r = 1, 2, \ldots, s)$, dann ist die Menge $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s$ linear unabhängig.

© Beutelspacher
Juni 2006

Beweis (a), (b), (c)

Beweis. (a) Wir verwenden das Unterraumkriterium.
Seien also $v, w \in Eig(f, k)$, und sei $h \in K$. Dann ist

$$f(v+w) = f(v) + f(w) = kv + kw = k(v+w)$$

und

$$f(hv) = hf(v) = hkv = khv.$$

Also sind sowohl $v+w$ als auch hv in $Eig(f, k)$ enthalten.

(b) folgt aus der Definition eines Eigenwerts.

(c) $Eig(f, k) = \{v \in V \mid f(v) = kv\} = \{v \in V \mid f(v) - kv = o\}$
$= \{v \in V \mid (f - k \cdot id)(v) = o\} = Kern(f - k \cdot id)$.

Beweis (d)

(d) Beweis für $s = 2$. Sei $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ eine Basis von $Eig(f,k)$, und sei $B_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_{s'}\}$ eine Basis von $Eig(f, k')$ mit $k \neq k'$.

Sei

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_sv_s + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_{s'}w_{s'} = o.$$

Sei $v := a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_sv_s$, $v' = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_{s'}w_{s'}$.
Dann ist $v+v' = o$ und $v \in Eig(f, k)$, $v' \in Eig(f, k')$. Nach dem Lemma über verschiedene Eigenwerte folgt $v = o$ und $v' = o$.
Das heißt $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_sv_s = o$ und $v' = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_{s'}w_{s'} = o$.
Da $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ eine Basis ist, ergibt sich $a_1 = a_2 = \ldots = a_s = o$.
Entsprechend folgt $b_1 = b_2 = \ldots = b_{s'} = o$.

1. Kriterium der Diagonalisierbarkeit

1. Kriterium zur Diagonalisierbarkeit. Eine lineare Abbildung von V in sich ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der Dimensionen ihrer Eigenräume mindestens n ist.

Beweis. (A) Sei f diagonalisierbar. Nach dem 0. Kriterium gibt es eine Basis B aus Eigenvektoren. Da jeder Eigenvektor in einem Eigenraum liegt, ist das Erzeugnis der Eigenräume mindestens so groß wie das Erzeugnis der Basis B, also so groß wie V. Somit ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume mindestens n.

Beweis

(B) Sei die Summe der Dimensionen der Eigenräume mindestens n. Wähle in jedem Eigenraum eine Basis und bilde die Vereinigung B dieser Basen. Nach dem Satz über Eigenwerte (d) ist B linear unabhängig. Da B nach Voraussetzung mindestens n Elemente hat, ist B eine Basis. Nach dem 0. Kriterium ist f diagonalisierbar.

1. Verfahren, um die Diagonalisierbarkeit einer linearen Abbildung f zu überprüfen. Dieses Verfahren geht in drei Schritten vor.

1. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte von f.

2. Schritt: Bestimmung der (Dimensionen der) Eigenräume.

3. Schritt: Anwendung des 1. Kriteriums.

Beispiel

Beispiel. Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ ist nicht diagonalisierbar.

(1) Sei $\{v, w\}$ eine Basis von $\mathbf{R}^2$, und sei f die lineare Abbildung von $\mathbf{R}^2$ in sich, deren Darstellungsmatrix bezüglich $\{v, w\}$ die Matrix M ist. Das bedeutet

$$f(v) = 0\cdot v + 0\cdot w = o,\ f(w) = 1\cdot v + 0\cdot w = v.$$

f hat nur den Eigenwert 0. (Denn: Sei k ein beliebiger Eigenwert von f. Dann gibt es einen Vektor $av + bw \neq o$ mit

$$f(av + bw) = k(av + bw).$$

Beispiel - Fortsetzung

Wegen $f(av + bw) = a\cdot f(v) + b\cdot f(w) = a\cdot o + b\cdot v = bv$ folgt daraus

$$bv = f(av + bw) = k(av + bw) = kav + kbw,$$

also $b = ka$ und $0 = kb$. Daraus ergibt sich $k = 0$.)

(2) $\mathrm{Eig}(f, 0) = \{av + bw \mid a, b \in K, f(av + bw) = o\}$
$= \{av + bw \mid a, b \in K, bv = o\} = \{av + bw \mid a, b \in K, b = 0\}$
$= \{av \mid a \in K\} = \langle v \rangle$.

(3) Nach (1) ist $\mathrm{Eig}(f, 0)$ der einzige nichttriviale Eigenraum; nach (2) hat dieser die Dimension $1 < n$. Nach dem 1. Kriterium ist also f nicht diagonalisierbar.

7.2 Das charakteristische Polynom

Ziel: Systematische Berechnung von Eigenwerten

7.2.1 Satz vom charakteristischen Polynom. Sei M die Darstellungsmatrix von f bezüglich einer Basis B von V.
Dann gilt: Genau dann ist $k \in K$ ein Eigenwert von f, wenn gilt

$$\det(M - kE) = 0.$$

Beweis. Wir wissen:

$\Leftrightarrow$ k ist ein Eigenwert von f

$\Leftrightarrow$ $\text{Kern}(f - k \cdot id) \neq \{o\}$

$\Leftrightarrow$ $f - k \cdot id$ ist nicht injektiv.

Beweis

Da M die Darstellungsmatrix von f und $k \cdot E$ die Darstellungsmatrix von $k \cdot id$ ist, ist $M - k \cdot E$ die Darstellungsmatrix von $f - k \cdot id$.
Ferner wissen wir (Abschnitt 5.2) Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn der Rang einer Darstellungsmatrix gleich n ist.

Damit gilt:

k ist ein Eigenwert von f

…

$\Leftrightarrow$ $f - k \cdot id$ ist nicht injektiv.

$\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(M - k \cdot E) < n$

$\Leftrightarrow$ $\det(M - k \cdot E) = 0$.

Das charakteristische Polynom einer Matrix

Definition. Sei $M \in K^{n\times n}$, und sei x eine Unbestimmte über K. Dann nennt man das Polynom

$$\chi_M = \det(M - x\cdot E) \in K[x]$$

das **charakteristische Polynom** der Matrix M.

χ ist ein griechischer Buchstabe, der „chi“ ausgesprochen wird.

Berechnung von χ_M:

- Subtraktion von x von jedem Diagonalelement von M
- Berechnung der Determinante.

Achtung: Zunächst ist das charakteristische Polynom nur für eine Matrix definiert!

Beispiele

(a) Das charakteristische Polynom der $n\times n$-Nullmatrix ist $(-1)^n\cdot x^n$.

(b) Das charakteristische Polynom der $n\times n$-Einheitsmatrix ist $\chi_{En} = (1-x)^n$.

(c) Das charakteristische Polynom der 3×3-Matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ist $\chi_M = \det\begin{pmatrix} 3-x & 2 & -1 \\ 1 & -x & -4 \\ 3 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$

$= (3-x)(-x)(1-x) - 24 - 2(1-x) - 3x = -x^3 + 4x^2 - 4x - 26.$

Das charakteristische Polynom einer linearen Abbildung

7.2.2 Charakteristisches Polynom einer linearen Abbildung. Die charakteristischen Polynome je zweier Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung sind gleich.

Definition. Sei f eine lineare Abbildung von V in sich. Das **charakteristische Polynom** χ_f von f ist definiert als

$$\chi_f = \chi_M$$

für irgendeine Darstellungsmatrix M von f.

Bemerkungen. 1. Der Satz sagt, dass χ_f wohldefiniert ist.
2. Name: χ_f ist „charakteristisch“ (kennzeichnend) für die Abbildung f und nicht nur für die Matrix M.

Beweis

Beweis. Seien M und M' Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung. Zu zeigen: $\chi_{M'} = \chi_M$.
Sei A die Matrix, welche die Basistransformation beschreibt, die die Basis von M in die von M' überführt. Dann ist A invertierbar, und es gilt $M' = AMA^{-1}$. Damit folgt:

$$\chi_{M'} = \det(M' - xE) = \det(AMA^{-1} - xE)$$
$$= \det(AMA^{-1} - xEAA^{-1})$$
$$= \det(AMA^{-1} - AxEA^{-1})$$
$$= \det(A \cdot (M - xE) \cdot A^{-1})$$
$$= \det(A) \cdot \det(M - xE) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A) \cdot \chi_M \cdot \det(A)^{-1} = \chi_M.$$

Eigenwerte und das charakteristische Polynom

7.2.3 Satz über das charakteristische Polynom. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_f sind genau die Eigenwerte von f.

Beweis. Sei $k \in K$. Dann gilt:

k ist ein Eigenwert von $f \Leftrightarrow \det(M - kE) = 0 \Leftrightarrow \chi_f(k) = 0$.

Bemerkungen. (a) Bestimmung der Eigenwerte einer linearen Abbildung ist einfach: 1. charakteristisches Polynom, 2. Nullstellen.
(b) Nullstellen sind i.a. schwer zu bestimmen.
(c) Es gibt Polynome, die keine Nullstelle haben, zum Beispiel $x^2+1 \in \mathbf{R}[x]$. **Hauptsatz der Algebra** (Gauß): Jedes Polynom über **C** zerfällt in lineare Faktoren (also Faktoren vom Grad 1).

Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

7.2.4 Koeffizienten des charakteristischen Polynoms. Sei f eine lineare Abbildung von V in sich, und sei $M = (m_{ij})$ eine Darstellungsmatrix von f. Sei χ_f das charakteristische Polynom. Dann gilt:

(a) χ_f hat den Grad n: $\chi_f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

(b) Es gilt

$$a_n = (-1)^n, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1}(m_{11}+m_{22}+ \ldots +m_{nn}), \quad a_0 = \det(M).$$

Bemerkung. Man nennt $m_{11}+m_{22}+ \ldots +m_{nn}$ die **Spur** der Matrix M. Da das charakteristische Polynom unabhängig von der Darstellungsmatrix ist, sagt dieser Satz insbesondere, dass die Spur jeder Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung f gleich ist.

Beweis

Beweis. (a) Wir berechnen die Determinante von $M–xE$ nach der Leibnizschen Methode: Zu jeder Permutation wird ein Polynom berechnet; die Determinante ist die Summe dieser Polynome.
Da jedes zu einer Permutation gehörende Polynom aus jeder Zeile nur einen Faktor hat, hat dieses Polynom höchstens den Grad n.
Zur jeder Permutation verschieden von der Identität gehört ein Polynom vom Grad $< n$, aber zur Identität ein Polynom vom Grad n.
Daher hat die Determinante (Summe dieser Polynome) den Grad n.

(b) Da nur die Identität ein Polynom vom Grad n liefert, ist an der höchste Koeffizient des Polynoms $(m_{11} – x)(m_{22} – x)...(m_{nn} – x)$.
Dieser ist $(–1)^n$.

Beweis (Forts.)

Genauer gesagt gilt

$$\chi_M = (m_{11} – x)(m_{22} – x)...(m_{nn} – x) + r,$$

wobei der erste Summand zur identischen Permutation gehört, und r die Summe ist, die den Permutationen aus $\mathbf{S}_n\backslash\{id\}$ entspricht. In r treten nur Summanden auf, die höchstens $n–2$ Diagonalelemente enthalten. (Genau $n–1$ Diagonalelemente geht nicht.) Daher ist r ein Polynom vom Grad $n–2$.

Ausmultiplizieren des Polynoms $(m_{11} – x)...(m_{nn} – x)$ ergibt

$$(m_{11} – x)...(m_{nn} – x) = (–1)^n x^n + (–1)^{n–1}(m_{11} + ... + m_{nn})x^{n–1} + r_1,$$

wobei r_1 ein Polynom eines Grades $n–2$ ist.

Beweis (Forts.)

Zusammen folgt

$$\chi_M = (m_{11} - x)(m_{22} - x)...(m_{nn} - x) + r$$
$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(m_{11} + \ldots + m_{nn})x^{n-1} + r_2,$$

wobei r_2 ein Polynom vom Grad $n-2$ ist.

Daraus folgen alle Behauptungen.
Die Aussage über die Determinante von M ergibt sich, wenn man 0 in $\chi_f = \chi_M$ einsetzt:

$$\chi_M(0) = \det(M - 0E) = \det M.$$

© Beutelspacher
Juni 2006

Das charakteristische Polynom einer 2 ´ 2-Matrix

Mit dem Satz über die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms kann man das charakteristische Polynom einer 2×2-Matrix einfach bestimmen:

Koeffizient von x^2: Das ist $(-1)^2$, also 1.
Koeffizient von x: Das ist $-$Spur, also $-(m_{11}+m_{22})$.
Absolutglied: Das ist die Determinante, also $m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}$.
Kurz,

$$\chi_M = x^2 - (m_{11}+m_{22})x + m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}.$$

Beispiel: $? \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = x^2 - (2+7)x + 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = x^2 - 9x - 1.$

© Beutelspacher
Juni 2006

Dimensionen der Eigenräume

7.2.5 Hilfssatz über die Dimension eines Eigenraums.
Sei k eine Nullstelle mit Vielfachheit $v = v(f, k)$ des charakteristischen Polynoms χ_f einer linearen Abbildung f. Dann gilt

$$\dim \mathrm{Eig}(f, k) \leq v(f, k).$$

Beweis. Sei $m := \dim \mathrm{Eig}(f, k)$.
Wir betrachten eine Basis $\{v_1, \ldots, v_m\}$ von $\mathrm{Eig}(f, k)$ und ergänzen diese zu einer Basis B von V.

Dann hat die Darstellungsmatrix $M = {}_B M(f)_B$ von f bezüglich B folgende Gestalt:

Beweis

Es folgt

$$M = \begin{pmatrix} k & 0 & & 0 & \\ 0 & k & & \vdots & * \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & \ldots & 0 & k & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\chi_f = \chi_M = (k-x)^m q$$

mit einem geeigneten Polynom q.
Also ist die Vielfachheit von k mindestens so groß wie $m = \dim \mathrm{Eig}(f, k)$.

2. Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

2. Kriterium zur Diagonalisierbarkeit. Eine lineare Abbildung f ist genau dann diagonalisierbar, wenn
(a) χ_f über K vollständig in Linearfaktoren zerfällt, und
(b) für jeden Eigenwert k gilt $\dim(\mathrm{Eig}(f, k)) = v(f, k)$.
(Man sagt dazu auch: geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit.)

Beweis. (A) Sei f diagonalisierbar. Dann hat f nach dem 0. Kriterium eine Basis aus Eigenvektoren; also gibt es (mit Vielfachheiten gerechnet) genau n Eigenwerte. Daher zerfällt χ_f vollständig über K.

Beweis

Nach dem 1. Kriterium ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich n. Da auch die Summe aller Vielfachheiten gleich n ist, folgt mit dem Hilfssatz $\dim(\mathrm{Eig}(f, k)) = v(f, k)$ für alle k.

(B) Seien umgekehrt (a) und (b) erfüllt.
Aus (a) folgt, dass die Anzahl der Eigenwerte (mit Vielfachheiten gerechnet) gleich n ist.
Wegen (b) muss auch die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich n sein.
Nach dem 1. Kriterium ist f also diagonalisierbar.

Verfahren zur Überprüfung der Diagonalisierbarkeit

Verfahren zur Überprüfung der Diagonalisierbarkeit einer linearen Abbildung f bzw. einer Matrix.

Schritt 0. Man bestimmt eine Darstellungsmatrix $M = {}_B M(f)_B$.

Schritt 1. Man bestimmt das charakteristische Polynom von M.

Schritt 2. Man zerlegt, wenn möglich, das charakteristische Polynom in Linearfaktoren. (Theoretisch schwierig, in der Praxis der Linearen Algebra in der Regel einfach.)

Schritt 3. Man bestimmt die Dimension der Eigenräume. (Lösung von linearen Gleichungssystemen).

Beispiel

Wir betrachten die folgende reelle 3×3-Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Schritt:

$$?_{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}} = [-x(-1-x)(3-x)+4+2]-[x+4(2-x)-2(-1-x)]$$

$$-x^3+2x^2+4x-8=-(x-2)^2(x+2).$$

2. Schritt: Zerlegung von χ_M in Linearfaktoren (klar).

Beispiel (Forts.)

3. Schritt: Frage: Gilt dim(Eig(M, 2)) = 2?

Sei $v = (a, b, c)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 von M. Dann ist

$$Mv = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix},$$

also

$$2b - c = 2a,\ 2a - b + c = 2b,\ 2a - b + 3c = 2c.$$

Daraus folgt $b = 0$ und daher $Eig(M, 2) = \{(a, 0, -2a) \mid a \in \mathbf{R}\}$.

Da dieser Eigenraum nur die Dimension 1 hat,
ist M *nicht* diagonalisierbar.

© Beutelspacher
Juni 2006

7.3 Das Minimalpolynom

Erinnerung (Einsetzen einer linearen Abbildung in ein Polynom):

Sei $g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ ein Polynom aus K[x], und seien $f: V \to V$ eine lineare Abbildung und M eine $n \times n$-Matrix. Dann ist

$$g(f) = b_m f^m + b_{m-1} f^{m-1} + ... + b_1 f + b_0 id$$

und

$$g(M) = b_m M^m + b_{m-1} M^{m-1} + ... + b_1 M + b_0 E.$$

Wir untersuchen, für welche Polynome diese Ausdrücke Null werden, d.h. g(f) = 0 (Nullabbildung) bzw. g(M) = 0 (Nullmatrix).

© Beutelspacher
Juni 2006

Der Satz von Cayley und Hamilton

7.3.1 Satz von Cayley-Hamilton. Es gilt

$$\chi_f(f) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \chi_M(M) = 0.$$

Das heißt: Wenn man eine lineare Abbildung (eine Matrix) in ihr charakteristisches Polynom ein setzt, erhält man die Nullabbildung bzw. die Nullmatrix.

Beweis. (Schwierigster Beweis der linearen Algebra!)

Sei $\chi_f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Zu zeigen: $a_n f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0 = 0$ (Nullabbildung).

Genauer gesagt: Sei $v \in V$ beliebig. Zu zeigen ist:

$\chi_f(f)(v) = a_n f^n(v) + a_{n-1}f^{n-1}(v) + \ldots + a_1 f(v) + a_0 v = o$ (Nullvektor)

Dabei können wir o.B.d.A. $v \neq o$ voraussetzen.

Beweis: 1. Schritt

1. Schritt: Es gibt einen Unterraums U mit folgenden Eigenschaften:

- $v \in U$,
- $f(u) \in U$ für alle $u \in U$.

(Dann kann man f auch als lineare Abbildung von U in sich auffassen – und also auch das charakteristische Polynom χ_{fU} der Einschränkung f_U betrachten.)

$\chi_{fU}(f)(v) = o$.

Beweis des ersten Schrittes: Wir betrachten die Vektoren

$$u_0 := v,\ u_1 := f(v) = f(u_0),\ u_2 := f(f(v)) = f(u_1),\ u_3 := f(u_2),\ \ldots$$

Wegen $\dim(V) = n$ sind höchstens n dieser Vektoren linear unabh.

Schritt 1: Beweis

Es gibt also eine natürliche Zahl m, so dass

$$u_0, u_1, \ldots, u_{m-1} \text{ linear unabhängig,}$$
$$\text{aber } u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m \text{ linear abhängig ist.}$$

Dann gilt $u_m = k_0u_0 + k_1u_1 + \ldots + k_{m-1}u_{m-1}$ mit $k_i \in K$.

Wir definieren $U := \langle u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\rangle$. Dann ist U ein Unterraum der Dimension m von V, der $v = u_0$ enthält.

Es folgt: $f(u_i) \in U$ für $i = 1, 2, \ldots, m-1$.
[Denn: $f(u_{m-1}) = u_m = k_0u_0 + k_1u_1 + \ldots + k_{m-1}u_{m-1}$.]

Daraus folgt: $f(u) \in U$ für alle $u \in U$.

Das charakteristische Polynom von f_U

Die Darstellungsmatrix M_1 von f_U bezüglich der Basis $\{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ hat folgende Gestalt:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \ldots & 0 & k_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & k_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & k_{m-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & k_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Es folgt (ÜA):

$$\chi_{fU} = \chi_{M1} = (-1)^m[x^m - k_{m-1}x^{m-1} - k_{m-2}x^{m-2} - \ldots - k_1x - k_0].$$

1. Schritt: Beweisabschluss

Einsetzen von f:

$$\chi_{fU}(f) = (-1)^m[f^m - k_{m-1}f^{m-1} - k_{m-2}f^{m-2} - \ldots - k_1 f - k_0 id].$$

Wi wissen:

$$f^m(v) = u_m = k_0u_0 + k_1u_1 + \ldots + k_{m-1}u_{m-1} = u_m$$
$$= k_0 id(v) + k_1 f(v) + \ldots + k_{m-1}f^{m-1}(v).$$

Damit ergibt sich

$$\chi_{fU}(f)(v) = (-1)^m[f^m - k_{m-1}f^{m-1} - k_{m-2}f^{m-2} - \ldots - k_1 f - k_0 id](v)$$

$$= (-1)^m[f^m(v) - k_{m-1}f^{m-1}(v) - k_{m-2}f^{m-2}(v) - \ldots - k_1 f(v) - k_0 id(v)] = (-1)^m o = o.$$

2. Schritt

2. Schritt: $\chi_f(f) = 0$ (die Behauptung des Satzes).

Beweis des zweiten Schrittes: Wir wählen wir eine Basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m1}\}$ von U und ergänzen diese zu einer Basis B von V. Dann hat f bezüglich dieser Basis folgende Darstellungsmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & * \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

wobei M_1 die zu $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m1}\}$ gehörende Darstellungsmatrix von f_U ist.

Beweisabschluss

Für eine solche „Kästchenmatrix“ gilt (ÜA):

$$\chi_f = \chi_M = \chi_{M2}\chi_{M1} = \chi_{M2}\chi_{fU} .$$

Einsetzen von f:

$$\chi_f(f) = \chi_M(f) = \chi_{M2}\chi_{M1}(f) = \chi_{M2}(f)\chi_{fU}(f) .$$

Wenn wir dies auf den Vektor v anwenden, erhalten wir schließlich die folgende Gleichung von Vektoren:

$$\chi_f(f)(v) = [\chi_{M2}(f)\chi_{fU}(f)](v) = \chi_{M2}(f)[\chi_{fU}(f)(v)] = \chi_{M2}(f)[o] = o.$$

Das Ideal J(f)

Definition. Wir betrachten die Menge aller Polynome g aus K[x], für die g(f) die Nullabbildung ist:

$$J = J(f) := \{g \in K[x] \mid g(f) = 0\}.$$

Diese Menge („Annihilatorideal“) nimmt eine Schlüsselstellung ein, weil wir mit ihr das Minimalpolynom von f definieren werden.

7.3.2 Hilfssatz. (a) Das charakteristische Polynom von f ist in J(f) enthalten.
(b) J(f) ist ein Ideal von K[x].

Beweis

Beweis. (a) Ist genau die Aussage des Satzes von Cayley-Hamilton.

(b) Wir weisen die definierenden Eigenschaften eines Ideals nach.

Additivität: Seien $g, h \in J(f)$. Da das Einsetzen von f ein Homomorphismus ist, folgt

$$(g + h)(f) = g(f) + h(f) = 0 + 0 = 0.$$

Magnetische Anziehungseigenschaft: Sei $g \in J(f)$ und $h \in K[x]$ beliebig. Da das Einsetzen von f ein Homomorphismus ist, folgt

$$(gh)(f) = g(f) \cdot h(f) = 0 \cdot h(f) = 0.$$

Also ist $J(f)$ tatsächlich ein Ideal.

Satz vom Minimalpolynom

7.3.3 Satz über das Minimalpolynom. (a) Zu jeder linearen Abbildung f gibt es genau ein Polynom μ_f mit folgenden Eigenschaften:

– μ_f erzeugt $J(f)$; das heißt $J(f) = \{\mu_f \cdot g \mid g \in K[x]\}$,

– der höchste Koeffizient von μ_f ist 1 (man sagt auch: μ_f ist **normiert**).

Man nennt μ_f das **Minimalpolynom** von f.

(b) Das Minimalpolynom von f teilt das charakterist. Polynom von f.

Bemerkungen: 1. Insbesondere gilt: $\mu_f(f) = 0$. Das Minimalpolynom ist das Polynom $\neq 0$ kleinsten Grades mit dieser Eigenschaft.

2. Nur an dieser Stelle werden innerhalb der Linearen Algebra die Resultate über Ideale aus Kapitel 5 benutzt.

Beweis

Beweis. (a) *Existenz:* Da $K[x]$ ein Hauptidealring ist, ist $J(f)$ ein Hauptideal. Daher gibt es ein Polynom μ_f mit $J(f) = \{\mu_f \cdot g \mid g \in K[x]\}$. Indem wir μ_f mit einem geeigneten Körperelement multiplizieren, erreichen wir, dass der höchste Koeffizient von μ_f gleich 1 ist.

Eindeutigkeit: Seien μ und μ' zwei Polynome mit den im Satz beschriebenen Eigenschaften.
Da μ und μ' beide in $J(f)$ und normiert sind, ist $\mu–\mu'$ ein Polynom aus $J(f)$, dessen Grad kleiner als der von μ ist. Wegen der Minimalität des Grads von μ ist also $\mu–\mu'$ das Nullpolynom. D.h. ist $\mu' = \mu$.

(b) Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist χ_f in $J(f)$ enthalten. Da μ_f das Ideal $J(f)$ erzeugt, ist χ_f ein Vielfaches von μ_f.

Beispiele

(a) Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\chi_M = x^2$ und das Minimalpolynom $\mu_M = x$, da M die Nullmatrix ist.
Allgemein hat die Nullabbildung stets das Minimalpolynom x.

(b) Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\chi_M = x^2$ und auch das Minimalpolynom $\mu_M = x^2$; denn x kann nicht das Minimalpolynom sein.

(c) Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\chi_M = (1–x)^2$ und das Minimalpolynom $\mu_M = x–1$; denn $M–E$ ist die Nullmatrix. Allgemein gilt: Die Einheitsmatrix (bzw. identische Abbildung) hat stets das Minimalpolynom $x–1$.

Nullstellen des Minimalpolynoms

7.3.4 Satz über die Nullstellen des Minimalpolynoms. Für jede lineare Abbildung gilt: Die Nullstellen des Minimalpolynoms sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. (Die Nullstellen des Minimalpolynoms können aber eine kleinere Vielfachheit haben.)

Beweis. Zu zeigen: Jede Nullstelle von χ_f (d.h. Eigenwert von f) ist auch eine Nullstelle von μ_f.

Beweis

Sei

$$\mu_f = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Da $\mu_f(f) = 0$ ist, gilt also

$$0 = \mu_f(f) = f^m + a_{m-1}f^{m-1} + \ldots + a_1 f + a_0 \mathrm{id}.$$

Wir wenden beide Seiten auf einen Eigenvektor v zum Eigenwert k an:

$$o = \mu_f(f)(v) = f^m(v) + a_{m-1}f^{m-1}(v) + \ldots + a_1 f(v) + a_0 \mathrm{id}(v)$$
$$= k^m \cdot v + a_{m-1}k^{m-1} \cdot v + \ldots + a_1 k \cdot v + a_0 \cdot v = \mu_f(k)v.$$

Wegen $v \neq o$ folgt daraus $\mu_f(k) = 0$.

Wie bestimmt man das Mimimalpolynom?

Das Minimalpolynom erhält man nicht durch eine Formel, sondern durch folgendes Verfahren:

(a) „Obere Abschätzung“: μ_f teilt χ_f und ist normiert. Daher gibt es nur endlich viele Möglichkeiten.
Beispiel: $\chi_f = (x-2)^3(x+3)^2$. Die (nicht konstanten) Teiler sind $(x+3)$, $(x+3)^2$, $(x-2)$, $(x-2)^2$, $(x-2)^3$, $(x-2)(x+3)$, $(x-2)(x+3)^2$, $(x-2)^2(x+3)$, $(x-2)^2(x+3)$, $(x-2)^3(x+3)$, $(x-2)^3(x+3)^2$.
(b) „Untere Abschätzung“: μ_f und χ_f haben die gleichen Nullstellen. Damit fallen $(x+3)$, $(x+3)^2$, $(x-2)$, $(x-2)^2$ und $(x-2)^3$ weg.
(c) In die verbleibenden Polynome setzt man f ein und überprüft, ob sich die Nullabbildung ergibt.

© Beutelspacher
Juni 2006

3. Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

3. Kriterium. Eine lineare Abbildung f von V in sich ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom μ_f vollständig in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. (A) Zunächst sei f diagonalisierbar.
Seien $k_1, k_2, ..., k_m$ die verschiedenen Eigenwerte von f. Zu zeigen:

$$\mu_f = (x-k_1)\cdot(x-k_2)\cdot\ldots\cdot(x-k_m).$$

Da f diagonalisierbar ist, ist nach dem 1. Krit. die Vereinigung der Basen der Eigenräume eine Basis von V. Daher gilt für alle $v \in V$

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_m$$

mit eindeutig bestimmten Eigenvektoren v_i zu k_i $(i = 1, ..., m)$.

© Beutelspacher
Juni 2006

Beweis des ersten Teils

Sei $g = (x-k_1)(x-k_2)...(x-k_m)$. Zu zeigen: $g = \mu_f$.

Sei $g_i := g/(x-k_i)$, d.h. $g = g_i(x-k_i)$ für $i = 1, ..., m$.

Setze f in g ein und wende die so erhaltene Abbildung auf v_i an:

$$g(f)(v_i) = g_i(f)[f-k_i id](v_i) = g_i(f)[f(v_i)-k_i v_i] = g_i(f)[o] = o.$$

Jetzt wenden wir $g(f)$ auf den Vektor v an:

$$g(f)(v) = g(f)[v_1 + v_2 + ... + v_m] = g(f)[v_1] + g(f)[v_2] + ... + g(f)[v_m] = o.$$

Somit ist $g(f) = 0$, also $g \in J(f)$. Somit teilt μ_f das Polynom g.
Da $g = (x-k_1)(x-k_2)...(x-k_m)$ ist und da μ_f die Nullstellen $k_1, ..., k_m$ hat, folgt $\mu_f = (x-k_1)(x-k_2)...(x-k_m)$.

Der zweite Teil: Zwischenbehauptung

(B) Nun möge μ_f in verschiedene Linearfaktoren zerfallen:
$\mu_f = (x-k_1)(x-k_2)...(x-k_m)$ mit verschiedenen $k_1, ..., k_m \in K$.
Beweis durch Induktion nach n (= dim(V)).

Induktionsbasis: $n = 1$. Dann ist $\mu_f = x-k_1$. Also ist k_1 der einzige Eigenwert, und f ist diagonalisierbar.

Induktionsschritt: Sei $n > 1$, sei die Aussage richtig für alle $m < n$.

Zwischenbehauptung: $\text{Kern}(f-k_1 id)$ und $\text{Bild}(f-k_1 id)$ sind komplementär.

Beweis der Zwischenbehauptung I

Beweis der Zwischenbehauptung. Es genügt zu zeigen, dass V von diesen Unterräumen erzeugt wird. (Nach der Dimensionsformel ist die Summe der Dimensionen von Kern und Bild gleich n.)

Wir teilen $(x–k_2)\cdot\ldots\cdot(x–k_m)$ mit Rest durch $x–k_1$ und erhalten

$$(x–k_2)\cdot\ldots\cdot(x–k_m) = q(x–k_1) + r \quad \text{mit} \quad \text{Grad}(r) < 1.$$

Also ist $r \in K$. Es folgt $r \neq 0$, da $k_1 \neq k_2, \ldots, k_m$ ist. Einsetzen von f:

$$(f–k_2\text{id})\cdot\ldots\cdot(f–k_m\text{id}) – q(f)\cdot(f–k_1\text{id}) = r\cdot\text{id}.$$

Wir wenden diese lineare Abbildung auf ein beliebiges $v \in V$ an:

$$(f–k_2\text{id})\cdot\ldots\cdot(f–k_m\text{id})(v) – q(f)\cdot(f–k_1\text{id})(v) = r\cdot v.$$

Beweis der Zwischenbehauptung II

Also ist v eine Linearkombination von $(f–k_2\text{id})\cdot\ldots\cdot(f–k_m\text{id})(v)$ und $q(f)\cdot(f–k_1\text{id})(v)$. Wir zeigen, dass der erste Vektor in $\text{Kern}(f–k_1\text{id})$ und der zweite in $\text{Bild}(f–k_1\text{id})$ liegt.

Wir wenden $f–k_1\text{id}$ auf $(f–k_2\text{id})\cdot\ldots\cdot(f–k_m\text{id})(v)$ an:

$$(f–k_1\cdot\text{id})\cdot(f–k_2\cdot\text{id})\cdot\ldots\cdot(f–k_m\cdot\text{id}) = (x–k_1)\cdot(x–k_2)\cdot\ldots\cdot(x–k_m)(f) = \mu_f(f) = 0.$$

Also liegt dieser Vektor in $\text{Kern}(f–k_1\text{id})$.

Für den zweiten Vektor $q(f)\cdot(f–k_1\text{id})(v)$ gilt:

$$q(f)\cdot(f–k_1\text{id})(v) = (f–k_1\text{id})q(f)(v) \in \text{Bild}(f–k_1\text{id}).$$

Also wird V von $\text{Kern}(f–k_1\text{id})$ und $\text{Bild}(f–k_1\text{id})$ erzeugt.

Beweisabschluss I

Daraus folgt die Aussage des Satzes: Da k_1 ein Eigenwert ist, ist $\dim(\mathrm{Kern}(f-k_1\mathrm{id})) > 0$, also $\dim(\mathrm{Bild}(f-k_1\mathrm{id})) < n$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf $U := \mathrm{Bild}(f-k_1\mathrm{id})$ an.

Dazu müssen die Voraussetzungen des Satzes für U überprüft werden.

- Es gilt $f(U) \subseteq U$. [Sei $(f-k_1\mathrm{id})(v) = f(v) - k_1 v$ ein beliebiges Element aus U. Dann ist $f(f(v) - k_1 v) = f(f(v)) - k_1 f(v) = (f-k_1\mathrm{id})(f(v)) \in U$.]
- Daher induziert f eine lineare Abbildung f_U von U in sich.
- Das Minimalpolynom von f_U ist ein Teiler des Minimalpolynoms von f. (Denn es ist $\mu_f(f_U) = 0$, also $\mu_f \in J(f_U)$.)

Beweisabschluss II

Also zerfällt das Minimalpolynom von f_U in paarweise verschiedene Linearfaktoren. Nach Induktion ist also f_U diagonalisierbar.

Daher gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_s$ von U, die aus Eigenvektoren von f_U besteht.
Sei $v_{s+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f-k_1\mathrm{id}) = \mathrm{Eig}(f, k_1)$. Dann sind auch $v_{s+1}, \ldots, v_n$ Eigenvektoren von f.

Da U und $\mathrm{Kern}(f-k_1\mathrm{id})$ komplementär sind, ist $v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V.
Da diese Basis aus Eigenvektoren von f besteht, ist f nach dem 0. Kriterium diagonalisierbar.

Test auf Diagonalisierbarkeit

Test auf Diagonalisierbarkeit einer linearen Abbildung f bzw. einer Matrix M. Der Test erfolgt in drei Schritten.

1. Schritt: Zerlege das charakteristische Polynom in Linearfaktoren. Wenn dies nicht möglich ist, ist die Abbildung nicht diagonalisierbar.

2. Schritt: Bestimme die Eigenwerte von f; seien diese $k_1, k_2, ..., k_m$.

3. Schritt: Überprüfe, ob $(f–k_1id)\cdot(f–k_2id)\cdot\ldots\cdot(x–k_mid) = 0$ ist, bzw. ob $(M–k_1E)\cdot(M–k_2E)\cdot\ldots\cdot(M–k_mE) = 0$ ist.
Wenn ja, dann ist f bzw. M diagonalisierbar, wenn nein, nicht.

Man erhält eine Diagonalmatrix, indem man die Eigenwerte mit den entsprechenden Vielfachheiten auf die Diagonale schreibt.

Beispiel

Sei f eine lineare Abbildung eines reellen Vektorraums in sich, die der Gleichung $f^2 = 3f$ genügt. Kann man f bestimmen?

M.a.W.: Gesucht sind diejenigen f mit $f^2 – 3f = 0$.

M.a.W.: Gesucht sind diejenigen f, die, eingesetzt in das Polynom $x^2 – 3x$ die Nullabbildung ergeben.

M.a.W.: Gesucht sind diejenigen f mit $x^2 – 3x \in J(f)$.

M.a.W.: Gesucht sind diejenigen f mit μ_f teilt $x^2 – 3x = x(x – 3)$.

Dafür gibt es drei Möglichkeiten: $\mu_f = x$, $\mu_f = x–3$ und $\mu_f = x(x–3)$.

In jedem Fall ist f diagonalisierbar. Die Vielfachheiten bestimmt man über das charakteristische Polynom.

Kapitel 8
Skalarprodukte

Inhalt

8.1 Ein Beispiel

$\|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos(\ )$

8.2 Bilinearformen

$< , > : V \ V \quad K$

8.3 Skalarprodukte

$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

8.4 Orthogonale Abbildungen

8.5 ... Und eine zweite symmetrische Bilinearform?

Ziele

Wir betrachten also Abbildungen von V V in K; solche Abbildungen nennt man traditionell **Formen**.

Eine geometrische Betrachtungsweise ist der Winkel, den zwei Vektoren einschließen; besonders wichtig ist die Relation des Senkrechtstehens.

Schließlich werden wir lineare Abbildungen betrachten, die die Formen respektieren (d.h. z.B. senkrechte Vektoren wieder auf senkrechte Vektoren abbilden).

© Beutelspacher
Juli 2006

8.1 Ein Beispiel

Seien $v_1 = (x_1, y_1)$ und $v_2 = (x_2, y_2)$ Vektoren der reellen Ebene. Man kann das skalare Produkt $\langle v_1, v_2 \rangle$ der Vektoren v_1 und v_2 auf zwei Weisen beschreiben.
Wir werden die Äquivalenz der beiden Beschreibungen nachzuweisen.

1. Darstellung („algebraisch“) Das skalare Produkt ist

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

2. Darstellung („geometrisch“). Das skalare Produkt ist

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos(\ ),$$

wobei der von v_1 und v_2 eingeschlossene Winkel ist.

© Beutelspacher
Juli 2006

Beispiel (Forts.)

Wir zeigen, dass beide Beschreibungen den gleichen Wert liefern.

Seien $v_1 = (x_1, y_1)$ und $v_2 = (x_2, y_2)$ zwei Vektoren der Länge 1.

Das bedeutet $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1$ und $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 1$.

Sei der von den Vektoren v_1 und v_2 eingeschlossene Winkel.

Spezialfall: Wenn $v_1 = v_2$ ist, so gilt

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1^2 + y_1^2 = \|v_1\| \times \|v_2\| \times \cos(0°),$$

da $\cos(0°) = 1$ ist.

© Beutelspacher
Juli 2006
Seite 5

Beispiel (Forts.)

Nun sei v_1 v_2. Mit den Bezeichnungen der Zeichnung gilt dann $\cos(\ ) = x$. Zu zeigen: $x = x_1x_2+y_1y_2$.

Wir wenden zweimal den Satz des Pythagoras an:

$$x^2 + h^2 = 1 \text{ und } (1-x)^2 + h^2 = d^2.$$

Daraus ergibt sich $2 - 2x = d^2$.

© Beutelspacher
Juli 2006
Seite 6

Beispiel (Forts.)

Wir wissen aber auch

$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$

$= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 = 1 + 1 - 2x_1x_2 - 2y_1y$

Zusammen folgt

$$2x = 2 - d^2 = 2 - 2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2 = 2x_1x_2 + 2y_1y_2,$$

also

$$\cos(\ ) = x = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Somit sind beide „Definitionen“ Beschreibungen desselben Sachverhalts.

© Beutelspacher
Juli 2006
Seite 7

8.2 Bilinearformen

Sei stets V ein K-Vektorraum endlicher Dimension n. Wir betrachten Abbildungen, die zwei Vektoren ein Körperelement zuordnen, also Abbildungen von $V \times V$ in K. Das Bild des Paars (v, w) von Vektoren bezeichnen wir mit $\langle v, w \rangle$.

Definition. Eine **Bilinearform** von V ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to K,$$

die **bilinear**, d.h. in beiden Komponenten linear ist. Das bedeutet, dass für alle $v, v', w, w' \in V$ und alle $k \in K$ gilt:

$$\langle v+v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle, \quad \langle k\cdot v, w\rangle = k\cdot\langle v, w\rangle \text{ und}$$

$$\langle v, w+w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle, \quad \langle v, kw\rangle = k\cdot\langle v,w\rangle.$$

© Beutelspacher
Juli 2006
Seite 8

Beispiel

Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V. Ferner sei $A = (a_{ij})$ eine n n-Matrix mit Werten aus K.
Wir definieren $< , >$ zunächst auf den Basisvektoren

$$<v_i, v_j> := a_{ij}$$

und setzen diese Vorschrift „linear fort“. Das bedeutet:

$$< v, w > = \sum_{i,j=1}^{n} k_i a_{ij} h_j$$

für beliebige Vektoren $v = k_1v_1 + ... + k_nv_n$, $w = h_1v_1 + ... h_nv_n$ aus V.

Kurz: $<v, w> = vAw^T$.

Konstruktion einer Bilinearform

8.2.1 Konstruktion von Bilinearformen. Durch die Vorschrift

$$< v, w > = \sum_{i,j=1}^{n} k_i a_{ij} h_j$$

wird eine Bilinearform auf V erklärt, die (bezüglich der Basis B) **zu** A **gehörige** Bilinearform.

Beweis. Wir zeigen die Linearität in der ersten Komponente. Seien $v = k_1v_1 + ... + k_nv_n$, $v' = k_1'v_1 + ... + k_n'v_n$ und $w = h_1v_1 + ... + h_nv_n$.

Beweis

Dann gilt

$$< v + v', w > = \sum_{i,j=1}^{n} (k_i + k_i')a_{ij}h_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} k_i a_{ij} h_j + \sum_{i,j=1}^{n} k_i' a_{ij} h_j = < v, w > + < v', w > .$$

Also ist $< , >$ in der ersten Komponente additiv. Ebenso leicht kann man zeigen, dass $< , >$ in der ersten Komponente homogen ist.

Also ist $< , >$ in der ersten Komponente linear.

Standardbilinearform

Definition. Wenn $< , >$ eine Bilinearform des n-dimensionalen Vektorraums V ist, so heißt die Matrix $A = (<v_i, v_j>)_{1 \le i,j \le n}$ die zu $< , >$ gehörige **Gramsche Matrix** (**Strukturmatrix**). (Jórgen Pedersen Gram, 1850 - 1916)

Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V. Die **Standardbilinearform** ist wie folgt definiert:

$$<v, w> := f(v, w) := k_1h_1 + k_2h_2 + ... + k_nh_n .$$

Mit anderen Worten: Die Gramsche Matrix der Standardbilinearform ist die Einheitsmatrix. Wir sprechen auch vom **Standardskalar-produkt**.

Orthogonal, nichtausgeartet

Definition. Sei $< , >$ eine Bilinearform auf V. Wir sagen, dass zwei Vektoren v, w aus V **senkrecht aufeinander** stehen (**orthogonal** zueinander sind), wenn $\langle v, w \rangle = 0$ ist. Wir schreiben $v \quad w$.

Der Nullvektor seht auf allen anderen Vektoren senkrecht (ÜA).

Wir nennen die Bilinearform $< , >$ **nichtausgeartet**, falls der Nullvektor der einzige Vektor ist, der auf jedem Vektor senkrecht steht. Das bedeutet: $< , >$ ist nichtausgeartet, falls gilt:

$$\langle v_0, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \quad V \Rightarrow v_0 = o.$$

© Beutelspacher
Juli 2006

Rang der Gramschen Matrix

8.2.2 Rang der Gramschen Matrix. Sei $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ eine Basis des Vektorraums V, und sei $A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \quad i,j \quad n}$ die Gramsche Matrix einer Bilinearform $< , >$ von V.
Dann gilt: Genau dann hat A den Rang n (also Determinante 0), wenn die Bilinearform $< , >$ nichtausgeartet ist.

Beweis. (A) Wir setzen voraus, dass A einen Rang $< n$ hat.
Zu zeigen: $< , >$ ist ausgeartet.
Es genügt, einen Vektor $x \quad o$ anzugeben, der auf allen Vektoren der Basis $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ senkrecht steht.

© Beutelspacher
Juli 2006

Beweis

Da Rang(A) < n ist, sind die Zeilen von A linear abhängig. Also:

$k_1\langle v_1, v_1\rangle + k_2\langle v_2, v_1\rangle + \ldots + k_n\langle v_n, v_1\rangle = 0,$

$k_1\langle v_1, v_2\rangle + k_2\langle v_2, v_2\rangle + \ldots + k_n\langle v_n, v_2\rangle = 0,$

...

$k_1\langle v_1, v_n\rangle + k_2\langle v_2, v_n\rangle + \ldots + k_n\langle v_n, v_n\rangle = 0.$

Behauptung: Der Vektor $x := k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$ ist o und steht auf jedem v_j senkrecht:

$\langle x, v_j\rangle = \langle k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n, v_j\rangle =$
$k_1\langle v_1, v_j\rangle + k_2\langle v_2, v_j\rangle + \ldots + k_n\langle v_n, v_j\rangle = 0$

Also ist $\langle\ ,\ \rangle$ ausgeartet.

© Beutelspacher
Juli 2006

Beweis der Umkehrung

(B) Wir setzen voraus, dass $\langle\ ,\ \rangle$ ausgeartet ist.
Dann gibt es einen von Null verschiedenen Vektor x, der auf $v_1, v_2, \ldots, v_n$ senkrecht steht. Sei $x = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$.
Da x o ist, ist mindestens ein k_i 0.
Somit gilt für alle j $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$0 = \langle x, v_j\rangle = \langle k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n, v_j\rangle =$
$k_1\langle v_1, v_j\rangle + k_2\langle v_2, v_j\rangle + \ldots + k_n\langle v_n, v_j\rangle = 0$

Dies bedeutet, dass die Zeilen der Gramschen Matrix A linear abhängig sind; somit ist der Rang von A kleiner als n.

© Beutelspacher
Juli 2006

Bilinearformen und Linearformen

8.2.3 Bilinearformen kommen von Linearformen. Sei $< , >$ eine Bilinearform auf V. Sei v_0 ein beliebiger Vektor. Definiere die Abbildung f_{v0} von V nach K durch

$$f_{v0}(w) = <v_0, w> \quad \text{für alle } w \quad V.$$

Dann ist f_{v0} eine „**Linearform**“, d.h. eine lineare Abbildung von V nach K. Wenn $< , >$ nicht ausgeartet ist, dann ist f_{v0} genau dann die Nullabbildung, wenn $v_0 = o$ ist.

Entsprechend ist die Abbildung g_{w0} von V nach K, die durch

$$g_{w0}(v) = <v, w_0> \quad \text{für alle } v \quad V$$

definiert ist, eine lineare Abbildung, die (für den Fall, dass $< , >$ nichtausgeartet ist) nur dann die Nullabbildung ist, wenn $w_0 = o$ ist.

© Beutelspacher
Juli 2006

Beweis

Beweis. Additivität: Seien w, w' V. Dann gilt

$$f_{v0}(w+w') = <v_0, w+w'> = <v_0,w> + <v_0, w'> = f_{v0}(w) + f_{v0}(w').$$

Homogenität: Für alle k K gilt

$$f_{v0}(kw) = <v_0, kw> = k <v_0, w> = kf_{v0}(w).$$

Die Abbildung f_{v0} ist genau dann die Nullabbildung, wenn $<v_0, w> = 0$ ist für alle w V.
Da $< , >$ nichtausgeartet ist, kann dies nur dann der Fall sein, wenn v_0 der Nullvektor ist.

Ähnlich zeigt man die Behauptungen für g_{w0} (ÜA).

© Beutelspacher
Juli 2006

Bilinearformen unterscheiden sich nur durch eine lin. Abb.

8.2.4 Verschiedene Bilinearformen von V („Wer eine kennt, kennt alle“). Sei $< , >$ eine nichtausgeartete Bilinearform von V.

(a) Sei f eine lineare Abbildung von V in sich. Dann wird durch

$$[v, w] := <f(v), w>$$

eine Bilinearform von V definiert.

(b) Sei $[,]$ eine zweite Bilinearform von V. Dann gibt es eine lineare Abbildung von V in sich, so dass

$$[v, w] = < (v), w>$$

für alle v, w V gilt. Ferner gilt: Genau dann ist bijektiv, wenn die Bilinearform $[,]$ nichtausgeartet ist.

© Beutelspacher
Juli 2006

Beweis

Beweis. (a) ist einfach: ÜA.

(b) Wir wissen: Es gibt eine lineare Abbildung F von V nach V^* mit $<v, w> = (F(v))(w)$ für alle v, w V. Da $< , >$ nichtausgeartet ist, ist F bijektiv, also invertierbar.
Ebenso gibt es für die Bilinearform $[,]$ eine lineare Abbildung F^* von V nach V^* mit $(F^*(v))(w) = [v, w]$ für alle v, w V.

Die Abbildung $:= F^{-1}F^*$ ist eine (lineare) Abbildung von V in sich, die genau dann bijektiv ist, wenn F^* bijektiv ist, also genau dann, wenn $[,]$ nichtausgeartet ist.
Bleibt zu zeigen: $[v, w] = < (v), w>$ für alle v, w:

$$< (v), w> = (F((v)))(w) = (F(F^{-1}F^*(v)))(w) = (F^*(v))(w) = [v, w].$$

© Beutelspacher
Juli 2006

X

Sei stets $< , >$ eine Bilinearform auf dem Vektorraum V.

Definition. Die Menge aller zu einem Vektor v orthogonalen Vektoren bezeichnet man mit v . Allgemeiner definieren wir für eine beliebige Teilmenge X von V

$$X := \{v \quad V \mid <x, v> = 0 \text{ für alle } x \quad X\}.$$

Definition. Wir nennen eine Bilinearform $< , >$ von V **symmetrisch**, wenn für alle Vektoren $v, w \quad V$ gilt

$$<v, w> = <w, v>.$$

Orthogonale Unterräume

8.2.5 Satz über orthogonale Unterräume. Sei $< , >$ eine Bilinearform. Seien X und Y Teilmengen von V. Dann gelten:

(a) Stets ist X ein Unterraum von V; ferner ist $v = (kv)$ für jedes von Null verschiedene Körperelement k.

(b) Wenn $X \quad Y$ gilt, so ist $Y \quad X$.

(c) Es gilt $X = <X>$.

(d) Wenn $< , >$ symmetrisch ist, so gilt $X \quad X$.

(e) Wenn $< , >$ symmetrisch ist, so gilt $X = X$.

Beweis (a), (b)

Beweis. (a) Unterraumkriterium. (i) Es ist $o \quad X$ (ÜA).

(ii) Seien $v, w \quad X$. Dann gilt für alle $x \quad X$:

$$<x, v+w> = <x, v> + <x, w> = 0 + 0 = 0,$$

also $v+w \quad X$.

(iii) Sei $v \quad X$ und $k \quad K$. Dann folgt $kv \quad X$ (ähnlich)

Wegen $<v, w> = 0 \qquad <kv, w> = k<v, w> = 0$ gilt auch $v \quad = (kv)$.

(b) Sei $X \quad Y$. Dann steht jeder Vektor v, der zu jedem $y \quad Y$ orthogonal ist, auch auf jedem $x \quad X$ senkrecht. M.a.W.:

$$Y \quad = \{v \quad V \mid <y, v> = 0 \text{ für alle } y \quad Y\}$$
$$\{v \quad V \mid <x, v> = 0 \text{ für alle } x \quad X\} = X .$$

© Beutelspacher
Juli 2006

Beweis (c), (d), (e)

(c) Wegen $X \quad <X> \quad$ folgt mit (b) $<X> \quad X$.

Aber jeder Vektor, der senkrecht auf jedem Vektor x des Erzeugendensystems X steht, ist auch in $<X>$ enthalten. D.h. $X \quad <X>$.

(d) Sei $x \quad X$. Zu zeigen: $x \quad X$. Wegen $x \quad X$ gilt für alle $v \quad X$: $<x, v> = 0$. Da $< , >$ symmetrisch ist, ist also auch $<v, x> = 0$ für alle $v \quad X$. Nach Definition heißt dies $x \quad (X \ ) \quad = X$.

(e) Nach (d) ist $X \quad X$, also nach (b) $X \qquad X$.

Setzt man $Y := X$, so folgt, wenn man abermals (d) anwendet

$$X \quad = Y \quad Y \quad = X \qquad X .$$

Zusammen ergibt sich $X \quad = X$.

© Beutelspacher
Juli 2006

Dimensionsformel für Bilinearformen

8.2.6 Dimensionsformel für Bilinearformen. Sei $< , >$ eine Bilinearform eines n-dimensionalen Vektorraums V.
Wenn $< , >$ nichtausgeartet ist, so gilt für alle Unterräume U von V

$$\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = n.$$

Beweis. Wir wählen eine Basis $\{v_1, ..., v_m\}$ von U und ergänzen diese zu einer Basis $\{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ von V.
Zu zeigen: $\dim(U^{\perp}) = n-m$.

Der Unterraum $U^{\perp}$ besteht genau aus den Vektoren

$$x = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \quad \text{mit} \quad < \sum_{i=1}^{n} k_i v_i, v_j > = 0 \quad \text{für } j = 1,2,...,m.$$

© Beutelspacher
Juli 2006

Beweis

Das bedeutet

$$k_1<v_1, v_j> + k_2<v_2, v_j> + ... + k_n<v_n, v_j> = 0 \quad \text{für } j = 1, ..., m.$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $k_1, k_2, ..., k_n$. Um die Dimension des Lösungsraums zu bestimmen, müssen wir den Rang der Matrix A des Gleichungssystems kennen.
Da $< , >$ nichtausgeartet ist, hat die Gramsche Matrix den Rang n. Also sind die m Zeilen der Matrix des Gleichungssystems linear unabhängig. Somit hat die Matrix den Rang m.

Daher hat der Lösungsraum $U^{\perp}$ die Dimension $n-\text{Rang}(A) = n-m$.

© Beutelspacher
Juli 2006

U und U

8.2.7 Korollar. Sei $< , >$ eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform des Vektorraums V. Dann gilt für jeden Unterraum U von V.

$$U \quad = U.$$

Beweis. Sei $\dim(V) = n$. Wir wenden die Dimensionsformel für Bilinearformen zweimal an und erhalten

$$\dim(U \quad) = n - \dim(U \quad) = n - (n - \dim(U)) = \dim(U).$$

Aufgrund des Satzes über orthogonale Unterräume ist $U \quad U$. Zusammen folgt die Behauptung.

Bemerkung: Bei einer nicht ausg. sym. Bilinearform muss man also nur die Unterräume U und U (und nicht $U \quad , U \quad , \ldots$) betrachten.

8.3 Skalarprodukte

8.3.1 Konstruktion von symmetrischen Bilinearformen. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Sei $A = (a_{ij})$ eine n n-Matrix mit Einträgen aus K. Dann wird durch

$$\langle v_i, v_j \rangle := a_{ij}$$

genau dann eine symmetrische Bilinearform definiert, wenn A eine symmetrische Matrix ist.

Beweis. Aufgrund des Satzes über die Konstruktion von Bilinearformen ist $< , >$ jedenfalls eine Bilinearform. Bleibt zu zeigen: $< , >$ ist genau dann symmetrisch ist, wenn A symmetrisch ist.

Beweis

Zunächst sei A eine symmetrische Matrix. Dann gilt für je zwei Vektoren $v = k_1v_1 + ... + k_nv_n$ und $w = h_1v_1 + ... + h_nv_n$ aus V:

$$< v, w > = \sum_{i,j=1}^{n} k_i h_j < v_i, v_j > = \sum_{i,j=1}^{n} h_j k_i < v_j, v_i > = < w, v > .$$

Also ist $< , >$ symmetrisch.

Sei umgekehrt $< , >$ eine symmetrische Bilinearform. Dann gilt insbesondere für je zwei Vektoren v_i, v_j einer Basis: $<v_i, v_j> = <v_j, v_i>$.

Somit ist jede Darstellungsmatrix von $< , >$ symmetrisch.

Skalarprodukte

Definition. Sei jetzt V ein *reeller* Vektorraum. Eine Bilinearform $< , >$ von V heißt **positiv definit**, wenn für alle v V gilt

$<v, v>$ 0 und $<v, v> > 0$ für v o.

Ein **Skalarprodukt** eines reellen Vektorraums V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

Ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt wird ein **euklidischer Vektorraum** genannt.

Bemerkung. Ein Skalarprodukt $< , >$ ist eine nichtausgeartete Bilinearform: Da $< , >$ positiv definit ist, steht kein Vektor v o auf sich selbst senkrecht; also ist v nicht zu allen Vektoren orthogonal.

Strukturmatrix eines Skalarprodukts

8.3.1 Konstruktion von Skalarprodukten. Sei $< , >$ eine symmetrische Bilinearform des reellen n-dimensionalen Vektorraums V, und sei A eine Strukturmatrix von $< , >$. Dann gilt: Genau dann ist $< , >$ ein Skalarprodukt, wenn für jedes k $\in$ {1, 2, ..., n} die Matrix, die aus den ersten k Elementen in den ersten k Zeilen von A besteht, eine Determinante größer Null hat.

Beispiele von Matrizen, die Skalarprodukte definieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/10 \\ 1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

© Beutelspacher
Juli 2006

Beweis

Beweis im Spezialfall n = 2: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Zu zeigen: Die symmetrische Bilinearform mit Gram-Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ ist.
Sei $\{v_1, v_2\}$ die zu $< , >$ und A gehörige Basis.

(A) Zunächst sei $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$. Sei $v = k_1v_1 + k_2v_2$ ein beliebiger Vektor aus V. Dann gilt:

$<v, v> = <k_1v_1 + k_2v_2, k_1v_1 + k_2v_2>$

$= k_1^2<v_1, v_1> + 2k_1k_2<v_1, v_2> + k_2^2<v_2, v_2> = k_1^2a + 2k_1k_2b + k_2^2c$

$> k_1^2a + 2k_1k_2b + k_2^2b^2/a = [k_1^2a^2 + 2k_1k_2ab + k_2^2b^2]/a = [k_1a + k_2b]^2/a \geq 0.$

© Beutelspacher
Juli 2006

Beweis (Forts.)

(B) Sei umgekehrt $\langle v, v\rangle > 0$ für jeden Vektor $v \neq o$ aus V.
Da insbesondere $\langle v_1, v_1\rangle > 0$ ist, gilt $a = \langle v_1, v_1\rangle > 0$.

Um $ac - b^2 > 0$ zu zeigen, muss man einen Vektor v finden mit $\langle v, v\rangle = ac - b^2$ ist.

Sei $w := bv_1 - av_2 \neq o$. Dann ist

$\langle w, w\rangle = \langle bv_1 - av_2,\ bv_1 - av_2\rangle$

$= b^2\langle v_1, v_1\rangle - 2ab\langle v_1, v_2\rangle + a^2\langle v_2, v_2\rangle$

$= b^2a - 2abb + a^2c = a(ac - b^2)$.

Wenn wir w mit $1/a$ multiplizieren, erhalten wir einen Vektor v mit $\langle v, v\rangle = ac - b^2$. Wegen $\langle v, v\rangle > 0$ ist auch $ac - b^2 > 0$.

Standardskalarprodukt

8.3.2 Satz über das Standardskalarprodukt. Die Standardbilinearform eines reellen Vektorraums ist ein Skalarprodukt.

Beweis. Die Standardbilinearform hat als Strukturmatrix die Einheitsmatrix. Daher ist die Determinante jeder „linken oberen“ Matrix gleich 1.

Orthogonale Komplemente

8.3.3. Satz vom orthogonalen Komplement. Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt < , >. Dann ist für jeden Unterraum U von V der Unterraum U ein zu U komplementärer Unterraum. Man nennt U auch das **orthogonale Komplement** von U.

Beweis. Zu zeigen: U und U schneiden sich nur im Nullvektor:
Sei v U U . Wegen v in U steht v auf jedem Vektor aus U senkrecht, also insbesondere auf v U. Also gilt <v, v> = 0.
Da < , > positiv definit ist, ist v = o.
Mit den Dimensionsformeln ergibt sich also:

dim(<U, U >) = dim(U) + dim(U) – 0 = dim(V).

Also sind U und U tatsächlich komplementär.

Norm und euklidische Norm

Definition. Eine **Norm** des euklidischen Vektorraums V ist eine Abbildung II II von V in **R** mit folgenden Eigenschaften:

(N1) IIkvII = IkI · IIvII,

(N2) IIv + wII IIvII + IIwII (**Dreiecksungleichung**),

(N3) IIvII = 0 v = o.

In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir die „euklidische Norm“ definieren:

$$\|v\| := \sqrt{< v, v >} \quad \text{für alle } v \quad V.$$

Achtung! Es ist noch zu zeigen, dass die „eukl. Norm“ eine Norm ist.

Ungleichung von Cauchy-Schwarz

8.3.4 Ungleichung von Cauchy und Schwarz. Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt für alle v, w V

$$|\langle v, w\rangle| \quad \|v\| \cdot \|w\| .$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis. Wenn w = o ist, so sind beide Seiten = 0; daher gilt die Ungleichung mit Gleichheit. Sei also w o. Für jedes k **R** gilt

$$\begin{aligned} 0 \quad & \langle v-kw, v-kw\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - k\langle v,w\rangle - k\langle w,v\rangle + kk\langle w, w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - 2k\langle v,w\rangle + k^2\langle w, w\rangle. \end{aligned}$$

Wegen w o ist $\langle w, w\rangle$ 0. Mit $k := \langle v,w\rangle/\langle w, w\rangle$ folgt:

© Beutelspacher
Juli 2006
Seite 37

Beweis

$$0 \quad \langle v, v\rangle \quad 2\cdot\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\cdot\langle v, w\rangle + \left(\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\right)^2\cdot\langle w, w\rangle .$$

Wenn man diese Ungleichung mit $\langle w, w\rangle$ multipliziert, ergibt sich

$$0 \quad \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - 2\cdot\langle v, w\rangle^2 + \langle v, w\rangle^2 = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2,$$

das heißt

$$\langle v, w\rangle^2 \quad \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle = \|v\|^2\cdot\|w\|^2.$$

Daraus folgt die Ungleichung.

Gleichheit gilt genau dann, wenn w = o oder v–kw = o ist, also genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

© Beutelspacher
Juli 2006
Seite 38

Satz über die Euklidische Norm

8.3.5 Euklidische Norm. Sei $< , >$ ein Skalarprodukt des reellen Vektorraums V. Dann wird durch $\|v\| := \sqrt{< v, v >}$ für alle $v \in V$ eine Norm von V definiert.

Beweis. (N1)

$$\|kv\| = \sqrt{< kv, kv >} = \sqrt{k \cdot k \cdot < v, v >} = \sqrt{k \cdot k} \cdot \sqrt{< v, v >} = |k| \cdot \|v\| .$$

(N2) folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\|v+w\|^2 = <v+w, v+w> = <v, v> + <v, w> + <w, v> + <w, w>$$
$$= \|v\|^2 + 2<v, w> + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 .$$

(N3) Falls $v = o$, ist $<v, v> = 0$, also $\|v\| = 0$. Im Fall $\|v\| = 0$ ist $\sqrt{< v, v >} = 0$, also $<v, v> = 0$ und somit $v = o$, da $< , >$ pos. def. ist.

© Beutelspacher
Juli 2006
Seite 39

Orthonormalbasen

Definition. Wir nennen eine Menge $\{v_1, ..., v_m\}$ von Vektoren von V **orthogonal**, wenn $v_i \perp v_j$ gilt für $i \neq j$. Eine orthogonale Menge heißt **orthonormal**, wenn zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, ..., m\}$ gilt. Eine orthonormale Basis wird eine **Orthonormalbasis** genannt.

Beispiel: Im Vektorraum $V = \mathbf{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist die Basis aus den Einheitsvektoren e_i eine Orthonormalbasis.

Bedeutung der Orthonormalbasen: Die Strukturmatrix von $< , >$ bezüglich einer Orthonormalbasis $\{v_1, ..., v_n\}$ hat auf der Diagonalen nur Einsen (wegen $<v_i, v_i> = 1$) und außerhalb der Diagonalen nur Nullen (wegen $<v_i, v_j> = 0$ für $i \neq j$) Mit anderen Worten: Bezüglich dieser Basis ist $< , >$ das Standardskalarprodukt!

© Beutelspacher
Juli 2006
Seite 40

Aus orthogonal mach orthonormal!

8.3.6 Hilfssatz. Sei $\{v_1, ..., v_m\}$ eine Menge von Vektoren von $V\backslash\{o\}$. Wenn $\{v_1, ..., v_m\}$ orthogonal ist, so gilt:
(a) Die Menge $\{w_1 := v_1/\|v_i\|, ..., w_m := v_m/\|v_m\|\}$ ist orthonormal.
(b) Die Menge $\{v_1, ..., v_m\}$ ist linear unabhängig.

Beweis. (a) Es gilt $\langle w_i, w_j\rangle = k_i \cdot k_j \cdot \langle v_i, v_j\rangle = k_i k_j \cdot 0 = 0$. Also ist auch $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ orthogonal. Da w_i die Norm $\| v_1/\|v_i\| \| = \|v_1\|/\|v_i\|$ hat, ist die Menge $\{w_1, ..., w_m\}$ orthonormal.

(b) Sei $k_1v_1 + ... + k_mv_m = o$ mit k_i **R**. Trick: Skalarprodukt mit v_i:

$$0 = \langle v_i, k_1v_1 + ... + k_mv_m\rangle = k_i\langle v_i, v_i\rangle.$$

Aus v_i o folgt $\langle v_i, v\rangle$ 0; also ist $k_i = 0$.

Orthonormalisierungssatz von E. Schmidt

8.3.7 Satz von E. Schmidt (1876 - 1959). Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$. Dann hat V eine Orthonormalbasis.

Beweis. Sei $\dim(V) = n$. Wir zeigen: *Für jedes* m {1, 2, ..., n} *kann jede orthonormale Menge* B_{m-1} *aus* m–1 *Elementen zu einer orthonormalen Menge* B_m *mit* m *Elementen erweitert werden.*
Klar: B_n ist eine Orthonormalbasis von V.

Induktionsbasis $m = 1$: Da $B_0 = \{\}$, ist nur zu zeigen, dass es eine orthonormale Menge mit einem Element gibt: Sei v_1 o, und sei $w_1 := v_1/\|v_i\|$. Dann ist $\{w_1\}$ eine orthonormale Menge.

Erster Induktionsschritt: $B_1 = \{w_1\} \rightarrow B_2 = \{w_1, w_2\}$.
Sei v_2 ein Vektor, der linear unabhängig von w_1 ist.

Beweis

Gesucht: Ein Vektor $x := kw_1 + v_2$, der senkrecht auf w_1 steht. Wir formen dies äquivalent um:

$x := kw_1 + v_2$ steht senkrecht auf w_1

$0 = \langle x, w_1 \rangle = \langle kw_1 + v_2, w_1 \rangle$

$0 = k\langle w_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle = k + \langle v_2, w_1 \rangle$

$k = -\langle v_2, w_1 \rangle$.

Mit diesem Wert ist $x = kw_1 + v_2$ ein Vektor, der orthogonal zu w_1 ist. Wenn wir jetzt noch $w_2 := x/\|x\|$ setzen, erhalten wir eine orthonormale Menge $\{w_1, w_2\}$.

Beweis (Forts.)

Nächster Fall: Sei $\{w_1, w_2\}$ eine orthonormale Menge, die noch nicht den ganzen Vektorraum V erzeugt. Dann gibt es einen Vektor v_3, so dass die Menge $\{w_1, w_2, v_3\}$ linear unabhängig ist.

Wir setzen $x := k_1w_1 + k_2w_2 + v_3$ und bestimmen k_1 und k_2 so, dass x orthogonal zu w_1 und w_2 ist. Das bedeutet

$0 = \langle w_1, k_1w_1 + k_2w_2 + v_3 \rangle = k_1\langle w_1, w_1 \rangle + \langle w_1, v_3 \rangle = k_1 + \langle w_1, v_3 \rangle$.

Also ist $k_1 = -\langle w_1, v_3 \rangle$. Entsprechend folgt $k_2 = -\langle w_2, v_3 \rangle$.

Mit dieser Wahl von k_1 und k_2 haben wir einen Vektor x konstruiert, der orthogonal zu w_1 und w_2 ist. Wenn wir durch die Norm von x dividieren, erhalten wir eine orthonormale Menge $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Beweis (Abschluss)

Methode: (a) Wähle einen Vektor, der linear unabhängig zu den bisher konstruierten ist.
(b) Konstruiere aus diesem zusammen mit den bisher konstruierten einen Vektor, der orthogonal zu allen bisherigen ist.

Allgemeiner Fall: ÜA.

8.3.8 Korollar. Jede orthonormale Menge von Vektoren eines euklidischen Vektorraums, insbesondere jeder Vektor v mit $\|v\| = 1$ kann zu einer Orthonormalbasis ergänzt werden.

© Beutelspacher
Juli 2006

Analytische Geometrie und Linearen Algebra II

Übungen

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

20.04.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 1

Präsenzaufgaben für den 25.04.2006

A Richtig oder falsch? Sei f eine lineare Abbildung eines Vektorraums V in einen Vektorraum W. Dann gilt:

- ☐ $f(o) = o$.
- ☐ $f(1) = 1$.
- ☐ $f(-v) = -v$ für alle $v \in V$.
- ☐ $f(-v) = -f \cdot v$ für alle $v \in V$.
- ☐ $f(kv) = f(k) + f(v)$ für alle $k \in K$ und alle $v \in V$.
- ☐ $f(k \cdot v) = f(k) \cdot f(v)$ für alle $k \in K$ und alle $v \in V$.
- ☐ $\text{Bild}(f) = W$.

B Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die folgendermaßen definierte Abbildung:
$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, y + z, -x + 3y + 4z)$.
Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie $\text{Bild}(f)$ und $\text{Kern}(f)$.
Hinweis: $\text{Kern}(f) := \{v \in \mathbb{R}^3 | f(v) = o\}$.

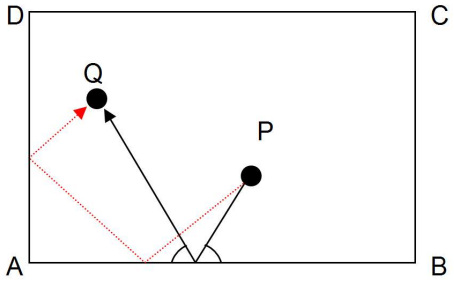
C Billardkugeln werden - wenn sie entsprechend angestoßen werden - an den Banden nach „Einfallswinkel≅Ausfallswinkel" reflektiert.

Eine Kugel P soll so gestoßen werden, dass sie

(a) nach der Reflexion an der Bande $\overline{AB}$ die Kugel Q trifft.

(b) nach Reflexionen an den Banden $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ die Kugel Q trifft.

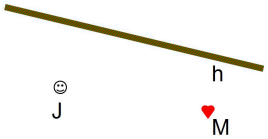
Konstruieren Sie den Weg der Kugel P.



Hausaufgaben - Abgabe: 27.04.2006

1. Ein Jüngling J liebt ein Mädchen M und möchte sie so schnell wie möglich besuchen, aber nicht, ohne ihr eine Rose zu verehren.

Die Rosen wachsen in einer langen, geraden Hecke h, wo an jeder Stelle eine Rose zu finden ist. Welches ist der kürzeste Weg, den der Jüngling nehmen kann?



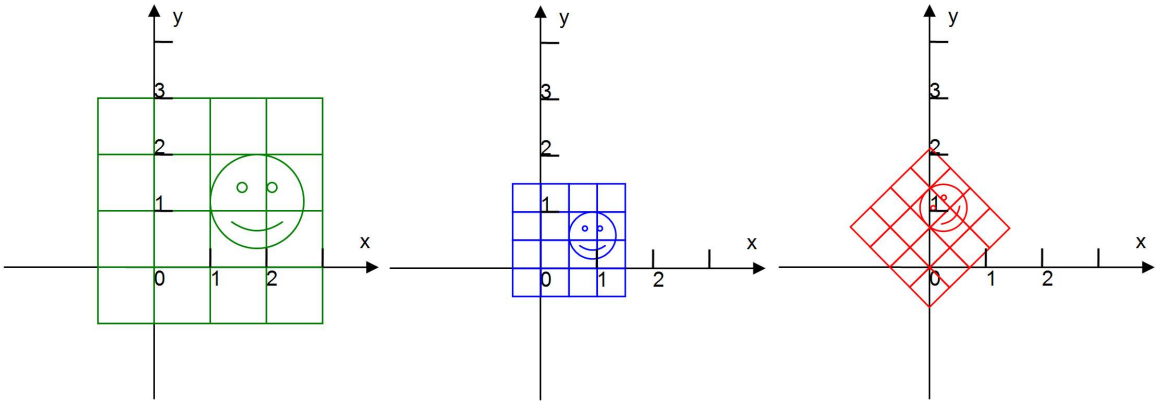
(a) Konstruieren Sie diesen Weg und begründen Sie die Konstruktion.

(b) Es seien $J = (1, 2)$, $M = (15, -3)$ und $h = \left\{ \binom{5}{4} + k \cdot \binom{2}{-1} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$.
Überlegen Sie sich, wie Sie die Konstruktion aus Aufgabenteil (a) rechnerisch nachvollziehen können und berechnen Sie die Stelle, an der der Jüngling die Rose pflückt.

2. Betrachten Sie die folgenden Bilder und geben Sie den Typ der Abbildung und die zugehörige Abbildungsvorschrift (mit Rechnung!) an, die ...

(a) Bild 1 auf Bild 2
(b) Bild 2 auf Bild 1
(c) Bild 2 auf Bild 3
(d) Bild 3 auf Bild 2
(e) Bild 1 auf Bild 3
(f) Bild 3 auf Bild 2

abbildet.



Zum Knobeln

In wie viele Teile kann man eine Pizza mit drei geraden Schnitten maximal zerschneiden? Und mit vier Schnitten? ...

All Men Are Bald

Here is a proof by mathematical induction that all men are bald. You know this is false, so read the proof carefully to see if you can find its error:

Let's agree at the start that any man with absolutely no hair on his head is bald. Let's also agree that a man with just one hair is also bald. Furthermore, a man with just one more hair than a bald man is also bald because one hair cannot make a difference to our idea of baldness.

In other words, if any man with n hairs on his head is bald, so is any other man with $n + 1$ hairs.

Now the usual argument by mathematical induction proves that all men are bald.

Where is the error in this argument?

One Equals Zero and Other Mathematical Surprises ©1998 by Key Curriculum Press

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

27.04.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 2

Präsenzaufgaben für den 02.05.2006

A Richtig oder falsch? Sei f eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

- ☐ $n \leq m$,
- ☐ $m \leq n$,
- ☐ $m = n$.
- ☐ Nur der Nullvektor wird auf den Nullvektor abgebildet.
- ☐ Es gibt genau drei lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Es gibt unendlich viele lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Es gibt unendlich viele Isomorphismen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

B Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv? Welche sind surjektiv? Welche sind bijektiv?
Wie könnte man ggf. den Definitions- bzw. Wertebereich einschränken, um die Abbildung bijektiv zu machen?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5x^2 + 4$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5x + 4$.

C (a) Geben Sie eine Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(b) Geben Sie eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Hausaufgaben - Abgabe: 04.05.2006

1. Sei f die folgende Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$:

$$f : (x, y, z) \mapsto (-5x - 18y, 4x + y + 16z, -2x - 7z).$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen ${}_BM_C(f)$ und ${}_CM_B(f)$ mit $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$ und $C = \{(3, -1, 0), (-1, -1, 1), (-3, 2, -1)\}$.

2. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und seien die Vektoren $w_i \in W$ definiert durch $w_i := f(v_i)$. Zeigen Sie:

(a) Wenn f injektiv ist, so sind die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig.

(b) Wenn f surjektiv ist, so ist $\{w_1, \ldots, w_n\}$ ein Erzeugendensystem von W.

Zum Knobeln

Sie haben neun Münzen, die äußerlich ununterscheidbar sind. Acht sind gleich schwer, eine ist leichter als die anderen. Sie sollen mit nur zwei Wägungen einer Balkenwaage herausfinden, welches die leichtere Münze ist.

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

04.05.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 3

Präsenzaufgaben für den 09.05.2006

A Es sei K ein Körper und V, W Vektorräume über K. Es seien $f : V \to W$ und $g : W \to V$ lineare Abbildungen mit $g \circ f = id_V$.
Zeigen Sie, dass f injektiv und g surjektiv ist.

B Es seien f und g Endomorphismen von $\mathbb{R}^3$, die wie folgt auf den Basisvektoren $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ und $e_3 = (0, 0, 1)$ definiert sind:

$$f(e_1) = (1, 2, 1), \qquad f(e_2) = (2, 1, 1), \qquad f(e_3) = (2, 2, 1),$$

$$g(e_1) = (-1, 0, 1), \qquad g(e_2) = (0, -1, 1), \qquad g(e_3) = (2, 2, -3).$$

Zeigen Sie, dass $g = f^{-1}$ gilt.

Hausaufgaben - Abgabe: 11.05.2006

1. Zeigen Sie, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist.

2. *Zum Beweis auf Folie 45:*
Es sei $B = \{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis des Vektorraums V und $C = \{w_1, \dots w_n\}$ eine Basis des Vektorraums W.
Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix $A =_B M_C(f)$.
Zeigen Sie: Die Abbildung $s_j \mapsto f(v_j)$ (für $1 \leq j \leq n$) von den Spalten von A auf die Bilder der Basisvektoren definiert einen Isomorphismus $g : \langle s_1, \dots, s_n \rangle \to \text{Bild}(f)$.

Zum Knobeln

Sie haben 10 Säcke, von denen jeder entweder mit Goldmünzen à 10 g oder mit äußerlich nicht unterscheidbaren Imitationen gefüllt ist, wobei eine „falsche" Münze $9,9$ g wiegt.
Nehmen Sie geeignete Anzahlen von Münzen aus den Säcken und stellen Sie unter einmaliger Verwendung einer *digitalen* Waage fest, welche Säcke mit echten und welche mit falschen Münzen gefüllt sind?

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

11.05.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 4

Präsenzaufgaben für den 16.05.2006

A Welches der folgenden Ausdrücke ist ein Polynom aus $\mathbb{R}[x]$?

- ☐ $x^{10000000000000000000000000}$
- ☐ $x + 5y$
- ☐ $x + x^{-1}$
- ☐ $x^2 - x - 1 = 0$
- ☐ $y = x^2$
- ☐ $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
- ☐ 2006
- ☐ $-3,14$
- ☐ $-3,14x$
- ☐ $x^{3,14}$
- ☐ $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$
- ☐ $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

B Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

C Zeigen Sie, dass jede Matrix der Form $k \cdot E_n$ mit jeder $n \times n$-Matrix vertauschbar ist.

Hausaufgaben - Abgabe: 18.05.2006

1. Sei R ein kommutativer Ring, der $\mathbb{Z}_2$ als Unterring enthält.
Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in R$ gilt: $(x + y)^2 = x^2 + y^2$.

2. Zeigen Sie, dass $K^{n \times n}$ mit der Matrizenmultiplikation und -addition ein Ring ist.

Zum Knobeln

Vor ihnen liegen fünf Münzen. Zwei zeigen Kopf, bei den anderen dreien ist Zahl oben.
Ein Zug besteht darin, zwei Münzen simultan umzudrehen.
Können Sie erreichen, dass nach einer gewissen Anzahl von Zügen alle Münzen mit dem Kopf nach oben liegen / alle mit der Zahl nach oben liegen?

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

18.05.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 5

Präsenzaufgaben für den 23.05.2006

A Seien $f, g \in K[x]$. Ein Polynom $h \in K[x]$ heißt größter gemeinsamer Teiler von f und g, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- h ist normiert (das heißt, der größte Koeffizient ist gleich 1).
- h ist sowohl ein Teiler von f als auch ein Teiler von g.
- Wenn ein Polynom t sowohl f als auch g teilt, so teilt t auch das Polynom h.

(a) Zeigen Sie, dass $x^2 - 1$ der größte gemeinsame Teiler der Polynome $x^4 - 26x^2 + 25$ und $x^3 - 2x^2 - x + 2$ ist.

(b) Entwickeln Sie mit Hilfe der Polynomdivision einen Algorithmus („euklidischer Algorithmus") zur Berechnung eines größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome.

B Bestimmen Sie Polynome $q, r \in \mathbb{R}[x]$ so, dass $x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x + 1) \cdot q + r$ mit $\text{Grad}(r) < 3$ gilt.

C Bestimmen Sie alle Nullstellen des reellen Polynoms $x^3 - 19x + 30$.

Hausaufgaben - Abgabe: Montag, den 29.05.2006

1. Für eine reelle Zahl r sei $\mathbb{Z}[r] := \{a \cdot r + b | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

(b) Ist $\mathbb{Z}[r]$ für jedes $r \in \mathbb{R}$ ein Ring?

2. Sei r eine reelle Zahl.

(a) Zeigen Sie: Die Menge $\{f \in \mathbb{Q}[x] | f(r) = 0\}$ ist ein Ideal von $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Geben Sie für $r = \sqrt{2}$ und für $r = \sqrt{2} + 1$ ein erzeugendes Element dieses Ideals an.

Zum Knobeln

Aus einem Dominospiel (28 Steine) wird ein Dominostein, der zwei verschiedene Augenzahlen hat, heimlich entfernt.
Dann werden die restlichen 27 Steine in einer Reihe ausgelegt, so dass jeweils zwei gleiche Zahlen aneinanderstoßen.
Welche Zahlen liegen an den Enden der Reihe?

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

22.05.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 6

Präsenzaufgaben für den 30.05.2006

A Richtig oder falsch?

(a) Jede Permutation ist zyklisch.
(b) Jede Permutation lässt sich als Produkt disjunkter Zyklen schreiben.
(c) Jede Permutation lässt sich als Produkt nicht-disjunkter Zyklen schreiben.
(d) Jede Permutation lässt sich als Produkt von Zyklen der Länge 5 schreiben.
(e) Jede Permutation ist eine Hintereinanderausführung von Fehlständen.
(f) Das Produkt zweier gerader Permutationen ist gerade.
(g) Das Produkt zweier ungerader Permutationen ist gerade.
(h) Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Permutationen ist gerade.
(i) Wenn n gerade ist, ist jede Permutation aus S_n gerade.

B Wie viele Permutationen gibt es...

(a) ... aus S_3, die durch einen Zyklus der Länge 3 beschrieben werden?
(b) ... aus S_4, die durch einen Zyklus der Länge 4 beschrieben werden?
(c) ... aus S_n, die durch einen Zyklus der Länge n beschrieben werden (mit Beweis)?

Hausaufgaben - Abgabe: Donnerstag, den 01.06.2006

1. Bestimmen Sie ein Polynom, welches das von $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ und $x^3 + x + 1$ erzeugte Ideal von $GF(2)[x]$ erzeugt.

2. (a) Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Produkt von disjunkten Zyklen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie $S_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$, das heißt, dass jede Permutation aus S_n als Produkt von Transpositionen aus der Menge $\{(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)\}$ geschrieben werden kann.

Zum Knobeln

Drei Erwachsene und drei Kinder wollen einen Fluss mit einem Ruderboot überqueren. Das Boot ist so klein, dass es nur einen Erwachsenen oder zwei Kinder fasst.

- Wie viele Überfahrten sind nötig, um alle ans andere Ufer zu bringen?
- Und wie viele, wenn vier Erwachsene und vier Kinder hinüber wollen?

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

08.05.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 7

Präsenzaufgaben für den 13.06.2006

A Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

B Hat das Produkt zweier reeller $n \times n$-Matrizen mit positiver Determinante ebenfalls eine positive Determinante?

Hausaufgaben - Abgabe: Montag, den 19.06.2006

1. Es sei M eine $n \times n$-Matrix, die sich in folgender „Kästchenform" schreiben lässt:
$M = \begin{pmatrix} M_1 & A \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$, wobei M_1 eine $n_1 \times n_1$-Matrix und M_2 eine $n_2 \times n_2$-Matrix ist.
Zeigen Sie, dass für die Determinante von M gilt: $\det(M) = \det(M_1) \cdot \det(M_2)$.
Hinweis: Bringen Sie die Matrix/Matrizen in Dreiecksgestalt.

2. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren eine Folge (Δ_n) von reellen Zahlen durch die Vorschrift:

$$\Delta_n := \det \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & a & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & a & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & a & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ für } n \geq 2,\ \Delta_0 := 1,\ \Delta_1 := a.$$

(a) Können Sie für $n \geq 2$ das $n-$te Glied Δ_n der Folge (also die Determinante der obigen $n \times n$-Matrix) rekursiv durch Δ_{n-1} und Δ_{n-2} ausdrücken?

(b) Berechnen Sie für $a = 2$ die Folgenglieder Δ_n für $n = 2, 3, 4$.

(c) Geben Sie eine allgemeine explizite Formel für Δ_n im Fall $a = 2$ an.

Zum Knobeln

Es war einmal ein Despot, der ein Gefängnis besaß, in das er bis zu 2000 Menschen in Einzelhaft sperren konnte. Als das Gefängnis voll belegt war, kam er auf die Idee ein paar Gefangene zu begnadigen; aber welche? Er wies den Kerkermeister an, diese Amnestie wie folgt durchzuführen:
Der Kerkermeister solle mehrfach an allen Zellentüren vorbeigehen und beim ersten Durchgang jede Zelle lautlos entriegeln. Beim zweiten Durchgang jede zweite Tür wieder verriegeln (also die Türen 2, 4, 6, ...). Dann beim dritten Durchgang solle er an jeder dritten Tür den Riegel umlegen (also öffnen oder schließen - je nach dem), beim vierten Durchgang jeden vierten Riegel usw., bis er beim 2000. Durchgang nur noch den 2000. Riegel umlegen muss.
Er solle dies deshalb so leise tun, damit keiner der Gefangenen die vorübergehende Öffnung der eigenen Zelle bemerke - der Kerkermeister würde mit seinem Leben dafür haften.

Nun hatte der Kerkermeister viel Arbeit vor sich! Das Betätigen des Verschlussmechanismus ist aber so laut, dass er sich sicher war, dass er sein Leben damit verwirken würde.
So würde er die Zellen der zu amnestierenden Gefangenen zunächst herausfinden und dann entriegeln müssen. Wie viele Gefangene konnten letztlich von der Amnestie profitieren?

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

12.05.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 8

Präsenzaufgaben für den 13.06.2006

C Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-1) & 1 \end{pmatrix}.$$

D Cramersche Regel:

Es sei $Ax = b$ ein lineares $n \times n$ Gleichungssystem und A_i (für $1 \leq i \leq n$) die Matrix, die entsteht, wenn man die $i-$te Spalte von A durch b ersetzt.
Machen Sie sich für $n = 2$ klar, dass man die Lösungen x_i des Gleichungssystems finden kann, indem man $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ berechnet.

Hausaufgaben - Abgabe: Donnerstag, den 22.06.2006

1. Zeigen Sie, dass die im Beweis der Entwicklung nach der ersten Zeile auftauchende Funktion Δ auch homogen in jeder Zeile ist.

2. Betrachten Sie die folgende Matrix M aus $K^{n\times n}$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(M)$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Können Sie eine allgemeine Formel für $\det(M)$ angeben? (mit Begründung)
Hinweis: Dreiecksmatrix!

Zum Knobeln

Wie lauten die letzten 4 Ziffern von 7^{7777}?

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

22.06.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 9

Präsenzaufgaben für den 27.06.2006

A Richtig oder falsch?
Sei f eine lineare Abbildung eines $n-$dimensionalen $K-$Vektorraums in sich.

- ☐ Das Nullelement von K kann ein Eigenwert von f sein.
- ☐ Der Nullvektor kann ein Eigenvektor von f sein.
- ☐ Der Nullvektor kann ein Eigenwert von f sein.
- ☐ Der Nullvektor ist der triviale Eigenvektor.
- ☐ Die lineare Abbildung f hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.
- ☐ Die lineare Abbildung f kann $n+1$ Eigenwerte haben.
- ☐ Jede lineare Abbildung hat einen Eigenwert.
- ☐ Jede lineare Abbildung hat einen Eigenvektor.
- ☐ 0 ist der triviale Eigenwert.
- ☐ Hat f die 0 als Eigenwert, so ist f die Nullabbildung.

B Sei f eine lineare Abbildung eines $K-$Vektorraums in sich, für die es einen Vektor $v \neq o$ gibt mit $f(-v) = kv$. Dann ist

- ☐ $-v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert k,
- ☐ $+v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-k$,
- ☐ $-v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-k$,
- ☐ $+v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert k,
- ☐ $k = 0$.

Hausaufgaben - Abgabe: Donnerstag, den 29.06.2006

1. (a) Sei f eine invertierbare lineare Abbildung. Angenommen, f hat den Eigenwert k. Dann hat auch f^{-1} einen Eigenwert, nämlich ...

(b) Sei f eine lineare Abbildung eines Vektorraums in sich mit $f^2 = f$. Zeigen Sie, dass 0 und 1 die einzigen möglichen Eigenwerte von f sind.
Hinweis: Berechnen Sie $f^2(v)$.

2. (a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der folgenden reellen Matrix: $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \end{pmatrix}$.
Ermitteln Sie zu einem Eigenwert Ihrer Wahl den zugehörigen Eigenraum.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der linearen Abbildung f eines 3-dimensionalen reellen Vektorraums mit Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit:
$f(v_1) := \frac{5}{2}v_1 + 2v_2 + \frac{1}{2}v_3$
$f(v_2) := 5v_1 + 4v_2 - 2v_3$
$f(v_3) := -\frac{7}{2}v_1 - 2v_2 - \frac{3}{2}v_3$.
Ermitteln Sie zu einem Eigenwert Ihrer Wahl einen zugehörigen Eigenvektor.

Zum Knobeln

Eine natürliche Zahl bestehe in ihrer Dezimaldarstellung nur aus den Ziffern 4 und 0, und zwar genau 600 mal die Ziffer 4. Die Anzahl der Nullen ist nicht bekannt. Kann die Zahl eine Quadratzahl sein? Geben Sie eine solche Zahl an oder zeigen Sie, dass dies nicht möglich ist.

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

29.06.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 10

Präsenzaufgaben für den 04.06.2006

A Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$.

B Richtig oder falsch?

- ☐ Das charakteristische Polynom zerfällt stets in Linearfaktoren.
- ☐ Jede komplexe $n \times n-$Matrix ist diagonalisierbar.
- ☐ Jede reelle $n \times n-$Matrix, deren charakteristisches Polynom zerfällt, ist diagonalisierbar.
- ☐ Jede $2 \times 2-$Matrix über $GF(2)$ ist diagonalisierbar.
- ☐ Jede komplexe $n \times n-$Matrix hat mindestens n verschiedene Eigenwerte.
- ☐ Es gibt Körper, über denen manche Polynome in Linearfaktoren zerfallen und manche nicht.
- ☐ Über jedem Körper gibt es Polynome vom Grad 1000, die in Linearfaktoren zerfallen.

C Richtig oder falsch?

- ☐ Das Minimalpolynom ist dadurch festgelegt, dass es das charakteristische Polynom teilt.
- ☐ Das charakteristische Polynom teilt das Minimalpolynom.
- ☐ Das Minimalpolynom teilt alle Polynome.
- ☐ Wenn ein Polynom das charakteristische Polynom teilt, ist es das Minimalpolynom.
- ☐ Das Minimalpolynom einer linearen Abbildung kann das Nullpolynom sein.
- ☐ Das Minimalpolynom einer linearen Abbildung kann ein konstantes Polynom sein.
- ☐ Das vom charakteristischen Polynom erzeugte Ideal von K[x] ist in dem vom Minimalpolynom erzeugten Ideal enthalten.
- ☐ Jede Nullstelle des Minimalpolynoms hat Vielfachheit 1.

Hausaufgaben - Abgabe: Donnerstag, den 06.06.2006

1. (a) Geben Sie eine reelle $2 \times 2-$Matrix an, die keine Eigenwerte hat.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

(c) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um eine $3 \times 3-$Matrix über $GF(3)$ zu finden, die keine Eigenwerte hat.

2. Betrachten Sie die reelle Matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

(a) Ist M diagonalisierbar? Warum/warum nicht? Geben Sie ggf. die Diagonalform an.

(b) Bestimmen Sie die Basis B' bezüglich derer ${}_{B'}M_{B'}$ Diagonalgestalt hat.

Zum Knobeln

Es gibt 362880 verschiedene Zahlen, in denen die Ziffern 1 bis 9 jeweils genau einmal vorkommen - wie zum Beispiel in der Zahl: 192654387.
Wie hoch ist dabei der Anteil an Primzahlen (in Prozent)?

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

06.07.2006

Übungen zur AGLA II, Blatt 11

Präsenzaufgaben für den 11.06.2006 und 18.06.2006

A (a) Zeigen Sie:
Wenn die Matrix M den Eigenwert k hat, dann hat M^2 den Eigenwert k^2.

(b) Gilt auch die Umkehrung von (a)? Betrachten Sie eine geeignete 2×2-Matrix.

B Zeigen Sie: Eine $n \times n$-Matrix, in der die Summe der Elemente einer jeden Zeile konstant ist („konstante Zeilensumme"), hat mindestens einen Eigenwert. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor an.

C Sei $< v, v >$ eine Bilinearform des Vektorraums V. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ gilt: $< o, v >= 0$ und $< v, o >= 0$.
Mit anderen Worten: Der Nullvektor steht auf jedem Vektor senkrecht.

D Betrachten Sie die Vorschrift $< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >:= x_1 y_2 - y_1 x_2$

(a) Zeigen Sie dass durch die Vorschrift eine Bilinearform von $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass $<,>$ nichtausgeartet ist, dass aber für jeden Vektor $v \in V$ gilt: $< v, v >= 0$.

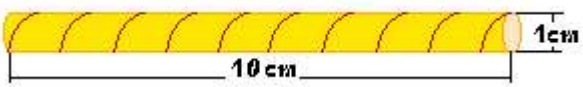
E Es sei V ein Vektorraum über K und $k \in K$.
Finden Sie den Fehler in dem Beweis der *falschen* Behauptung: „Jeder Vektor $v \in V, v \neq o$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{k}{||v||}$.

„*Beweis*":

$$
\begin{aligned}
& v^T A v = k \\
\Leftrightarrow\ & v v^T A v = v k \\
\Leftrightarrow\ & v v^T A v = k v \\
\Leftrightarrow\ & < v, v > A v = k v \\
\Leftrightarrow\ & ||v|| A v = k v \\
\underset{v \neq o}{\Leftrightarrow}\ & A v = \tfrac{k}{||v||} v.
\end{aligned}
$$

Zum Knobeln

Man hat einen runden Stab von 1 cm Durchmesser und 10 cm Länge. Auf diesen wickelt man genau 10 Windungen eines dünnen Drahtes und zwar so, dass man an einem Ende des Stabes anfängt und mit gleichmäßigem Abstand so wickelt, dass man am anderen Ende aufhört (siehe Abb.). Wie lang muss der Draht sein?



Analytische Geometrie und Linearen Algebra II

Praktikum

Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006

Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 1 Lineare Abbildungen und Matrizen

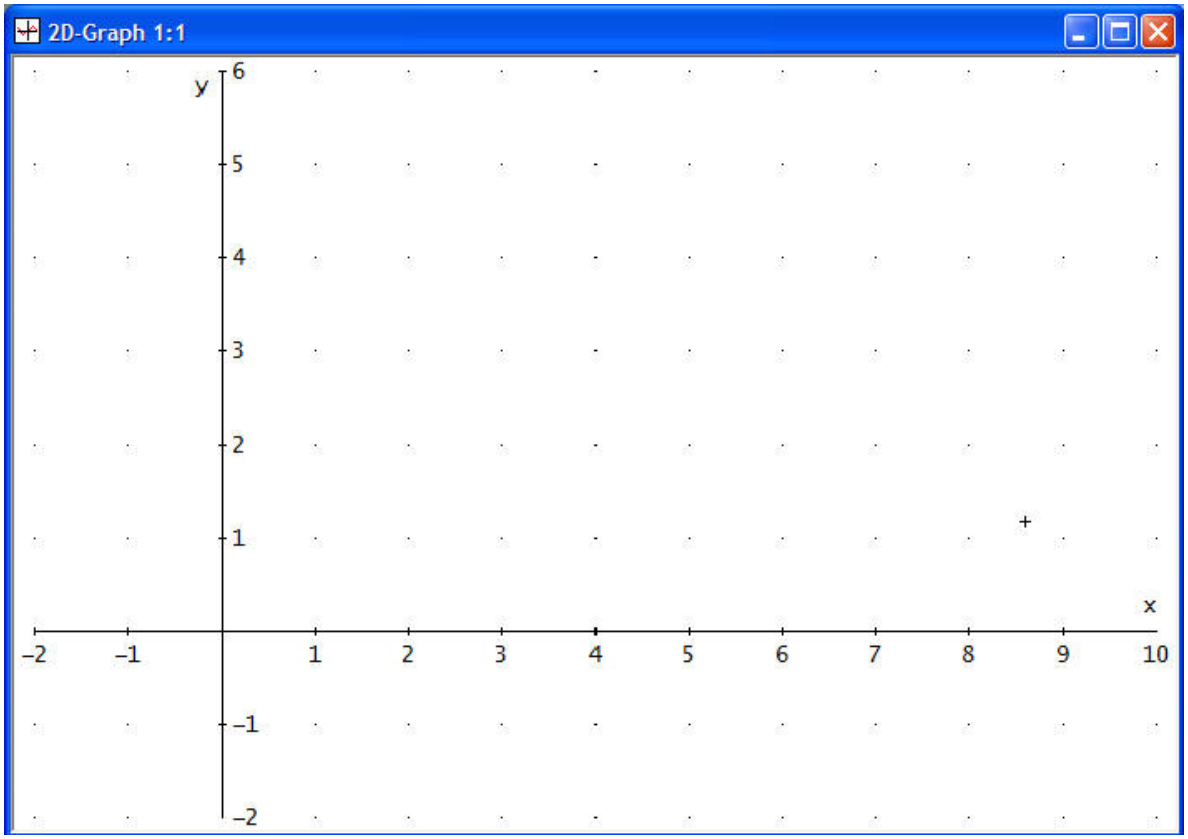
Wir beginnen unsere Arbeit in der Ebene, d.h. wir arbeiten mit Derive zunächst nur mit dem **2D-Grafikfenster**.

Punkte bzw. **Vektoren** (Orts- und Verschiebungsvektoren) werden weiterhin als Zeilen dargestellt.

Im 2D-Grafik-Fenster lässt sich über "Einstellen" "Zeichenbereich" der Bildausschnitt festlegen (es gibt zwei Möglichkeiten):

oder

Über "Einstellungen" "Verzerrungsverhältnis" "Rücksetzen" werden gleiche Maßstäbe auf beiden Achsen erzeugt.



Nun können mit Hilfe von Matrizen Abbildungen der Ebene auf sich (d.h. zu jedem Punkt wird ein Bildpunkt ermittelt) beschrieben werden, indem jeder Punkt der Ebene mit der Matrix multipliziert wird.
Diese Abbildungen haben schöne Eigenschaften, die wir kennen lernen wollen. Um sich die Abbildungen besser zu veranschaulichen, nehmen wir nicht einzelne Punkte, sondern wir nehmen **Punktfolgen**, die einfache Figuren beschreiben.

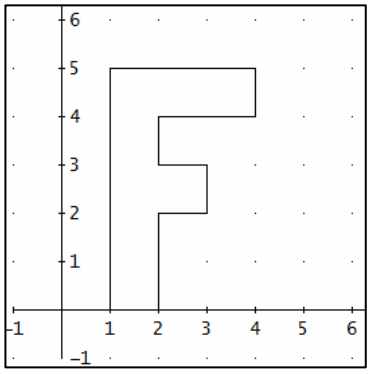
$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[3,\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [7,\ 2]$$

Zum Beispiel definieren wir uns ein Dreieck:

$$dreieck := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 4 \\ 5 & 10 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Durch eine einzige Matrizenmultiplikation lassen sich sämtliche Bildpunkte berechnen und so das Bild des Dreiecks unmittelbar zeichnen.



Aufgabe 1:

a) Stelle das Dreieck und sein Bild im 2D-Grafikfenster dar.
b) Definiere die Punktfolge des Buchstabens ***daseff,*** stelle ihn im 2D-Grafikfenster dar, multipliziere die Punktfolge mit der Matrix A und stelle das Bild im gleichen Grafikfenster dar.
c) „Erfinde“ weitere Abbildungsmatrizen und stelle ***daseff*** und sein Bild in einem Grafikfenster dar. (Experimentieren ist erwünscht)

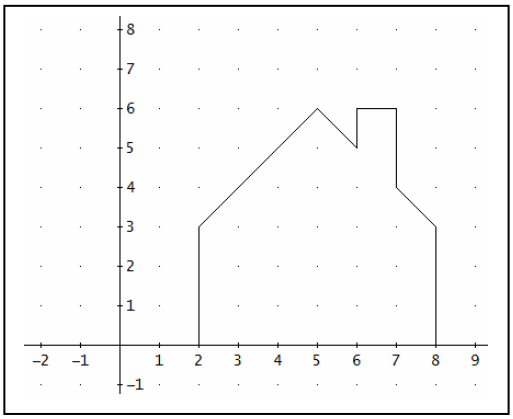
Wir wollen nun die Zusammenhänge zwischen geometrischen Abbildungen und den zugehörigen Matrizen untersuchen und näher kennen lernen.

In einem ersten Schritt benutzen wir Matrizen der Form: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

Welche elementargeometrischen Abbildungen werden durch diese Matrizen beschrieben?

Aufgabe 2:

a) Zeichne das abgebildete Haus (Beginne mit dem Punkt [2,0] und nimm nach dem Punkt [8,0] als letzten Punkt den Ursprung [0,0])
b) Multipliziere das ***Haus*** mit der Matrix und nimm für a und b verschiedene Werte. (Schieberegler verwenden)
Für welche Werte von a und b lassen sich bekannte Abbildungen (Spiegelungen, Streckungen, Drehungen, …) erkennen? Fasse deine Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.



Wir wollen den mathematischen Hintergrund unserer Abbildungen noch etwas vertiefen.

Aufgabe 3:

Wähle eine beliebige Abbildung bzw. die zugehörige Matrix und überlege:
- Wohin wird der Nullpunkt abgebildet?
- Was haben die Bilder der Einheitsvektoren mit der Matrix zu tun?

Beobachtung: In den Zeilen der Matrix stehen _____

Folgerung:	Wenn wir die Bilder der _____ kennen, kennen wir auch die zu einer Abbildung gehörige Matrix!

Welche Matrizen gehören zu den dir bekannten elementargeometrischen Abbildungen?

Aufgabe 4:

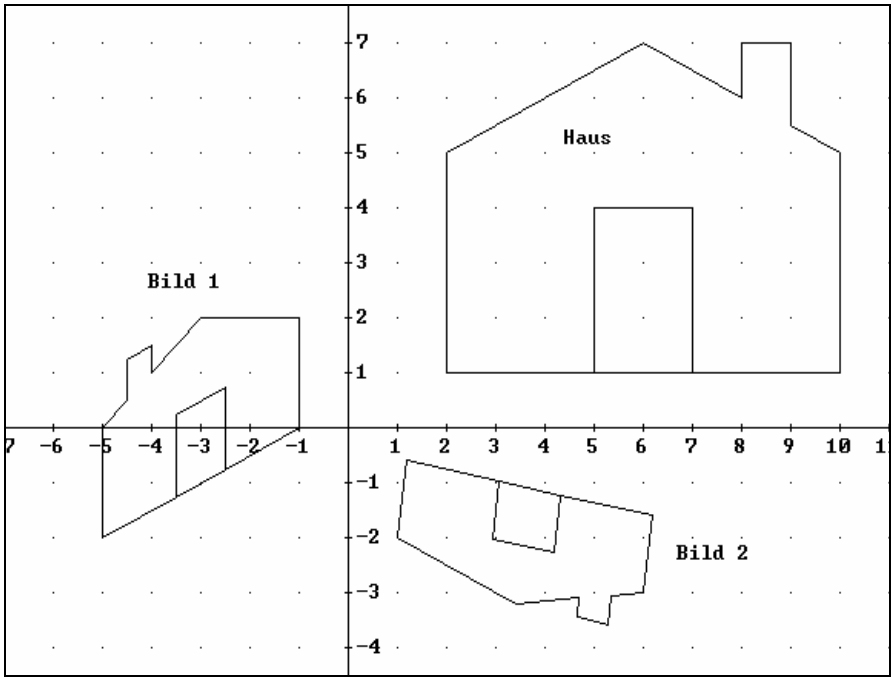
Ordne in einer Tabelle den bekannten Abbildungen (Streckung, Spiegelung an beiden Achsen, Drehung, Punktspiegelung, ...) die entsprechenden Matrizen zu und überprüfe das an dem oben abgebildeten Haus.

„Hilfe, welche Matrix steckt dahinter?“

Aufgabe 5:

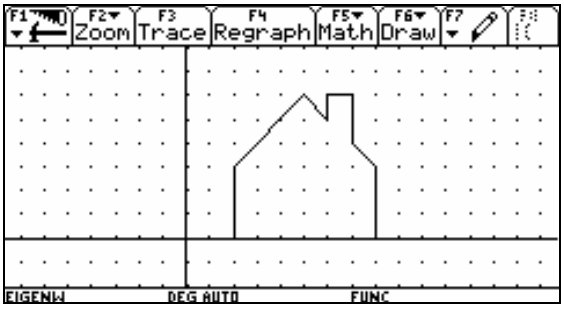
Das Haus ist mit zwei verschiedenen Matrizen abgebildet worden.
Bestimme die Matrix $\mathbf{A_1}$,die das **Bild 1,** und $\mathbf{A_2}$, die **Bild 2** erzeugt.)

(Suche Punkte und ihre Bildpunkte, die ganzzahlige Koordinaten haben)



Aufgabe 6:

Spiegele das Haus unten zunächst **zeichnerisch** an der Geraden y = 0.5·x in deinem Heft.



Bestimme dann die zugehörige Abbildungsmatrix und zeichne das Haus und sein Bild mit Derive.

Kannst du das auch bei der Geraden y = m·x ?

Aufgabe 7: Hintereinanderausführung von Abbildungen

- Führe zunächst eine Abbildung mit der Matrix $A = \begin{matrix} 0.5 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix}$ durch und anschließend (mit dem Bild) die mit der Matrix $B = \begin{matrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{matrix}$. Durch welche Matrix C lässt sich die Ersatzabbildung beschreiben?

- Spiegele das Haus an der Geraden mit der Gleichung y = 3¶x und anschließend das Bild an der Geraden mit der Gleichung y = -x. Durch welche Matrix wird die Ersatzabbildung beschrieben? Welche Vermutung hast du hinsichtlich der Art der Ersatzabbildung?

Welchen Zusammenhang siehst du jeweils zwischen den drei Abbildungsmatrizen? Begründe mit den Rechenregeln für Matrizen, dass die Hintereinanderausführung von Abbildungen beschrieben wird durch das Produkt der Abbildungsmatrizen.

Schöne Grafiken herstellen

Mit dem VECTOR-Befehl lassen sich schöne Bilder herstellen (wenn wir den mathematischen Hintergrund verstanden haben)

```
#2:   Dreieck := [ 4  0 ]
                 [ 6  0 ]
                 [ 4  1 ]
                 [ 4  0 ]

                          k [  COS(k·10°)   SIN(k·10°) ]
#3:   A(k) := 0.98 ·        [                          ]
                          [ - SIN(k·10°)   COS(k·10°) ]

#4:   VECTOR(Dreieck·A(k), k, 0, 144, 1)
```

Ausdruck

Laufvariable

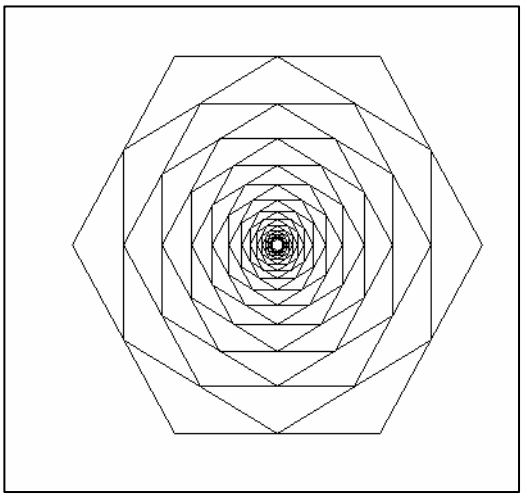
Anfangswert

Endwert

Schrittweite

Hausaufgabe:

Erzeuge dieses Bild im 2D-Grafikfenster. Dokumentiere deine Lösung in der Derive-Datei ausführlich.



Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006
Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

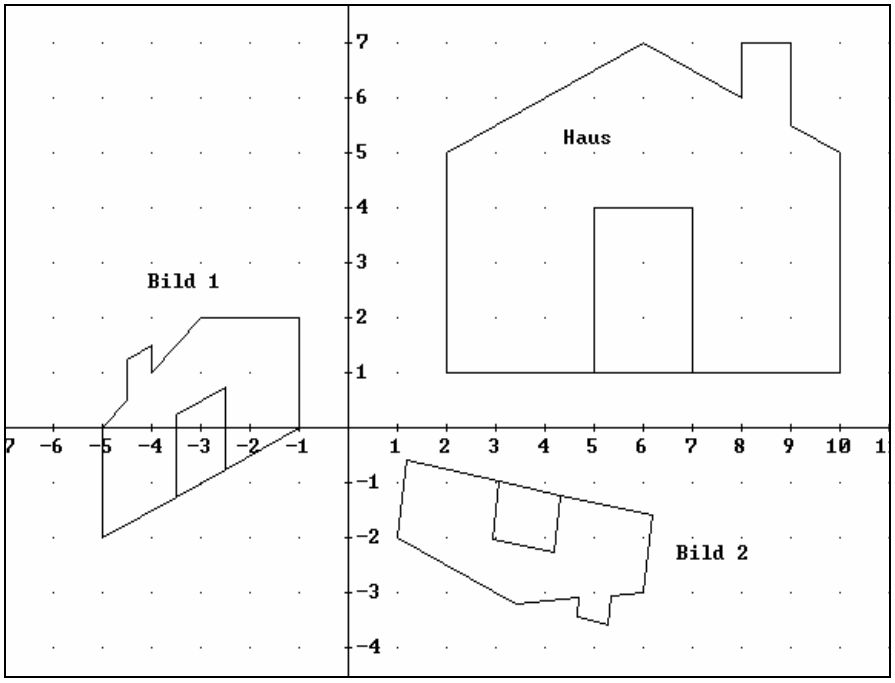
Blatt 2 Lineare Abbildungen und Matrizen

„Hilfe, welche Matrix steckt dahinter?“

Aufgabe 5:

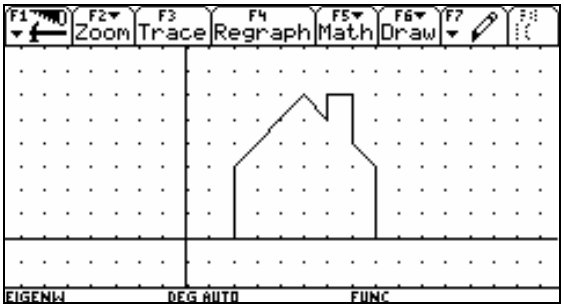
Das Haus ist mit zwei verschiedenen Matrizen abgebildet worden.
Bestimme die Matrix $\mathbf{A_1}$,die das **Bild 1,** und $\mathbf{A_2}$, die **Bild 2** erzeugt.)

(Suche Punkte und ihre Bildpunkte, die ganzzahlige Koordinaten haben)



Aufgabe 6:

Spiegele das Haus unten zunächst **zeichnerisch** an der Geraden y = 0.5·x in deinem Heft.



Bestimme dann die zugehörige Abbildungsmatrix und zeichne das Haus und sein Bild mit Derive.

Kannst du das auch bei der Geraden y = m·x ?

Aufgabe 7: **Hintereinanderausführung von Abbildungen**

- Führe zunächst eine Abbildung mit der Matrix $A = \begin{matrix} 0.5 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix}$ durch und anschließend (mit dem Bild) die mit der Matrix $B = \begin{matrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{matrix}$. Durch welche Matrix C lässt sich die Ersatzabbildung beschreiben?

- Spiegele das Haus an der Geraden mit der Gleichung y = 3¶x und anschließend das Bild an der Geraden mit der Gleichung y = -x. Durch welche Matrix wird die Ersatzabbildung beschrieben? Welche Vermutung hast du hinsichtlich der Art der Ersatzabbildung?

Welchen Zusammenhang siehst du jeweils zwischen den drei Abbildungsmatrizen? Begründe mit den Rechenregeln für Matrizen, dass **die Hintereinanderausführung von Abbildungen beschrieben wird durch das Produkt der Abbildungsmatrizen**.

Eine wichtige Abbildung:

Die Drehung um den Winkel α :

$$Dreh(\alpha) := \begin{bmatrix} COS(\alpha) & SIN(\alpha) \\ -SIN(\alpha) & COS(\alpha) \end{bmatrix}$$

Aber Vorsicht!

$$SIN(30) = -0.9880316240$$

$$\frac{30}{1°} = 1718.873385$$

Die Argumente der Winkelfunktionen werden im Bogenmaß angegeben. Die Umrechnung wird in Derive mit ° geleistet. (Wenn man versehentlich SIN(30) eintippt, hat man den Sinus des Winkels von 30 im Bogenmaß – das sind etwa 1718° - berechnet.)

$$SIN(30°) = \frac{1}{2}$$

Schöne Grafiken herstellen

Mit dem VECTOR-Befehl lassen sich schöne Bilder herstellen (wenn wir den mathematischen Hintergrund verstanden haben)

$$\#2: \quad Dreieck := \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\#3: \quad A(k) := 0.98^{k} \cdot \begin{bmatrix} COS(k \cdot 10°) & SIN(k \cdot 10°) \\ -SIN(k \cdot 10°) & COS(k \cdot 10°) \end{bmatrix}$$

$$\#4: \quad VECTOR(Dreieck \cdot A(k), k, 0, 144, 1)$$

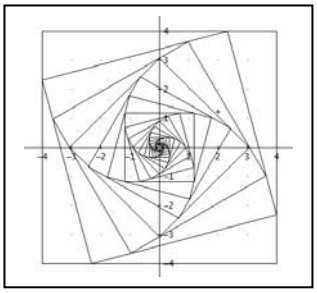
Ausdruck

Laufvariable

Anfangswert

Endwert

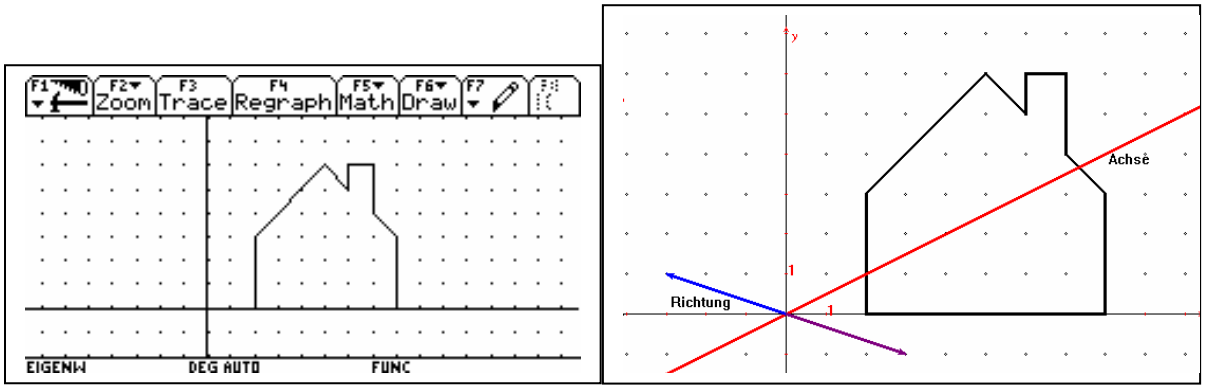
Schrittweite



Aufgabe 8: Erzeuge dieses und weitere Bilder in der 2D-Grafik

Aufgabe 9:
Die dir bekannte Abbildung „Achsenspiegelung“ ist immer eine orthogonale Spiegelung, d.h. die Verbindungsgerade von Punkt und Bildpunkt ist immer orthogonal zur Spiegelachse. Wie sieht die Matrix einer Abbildung aus, die nicht mehr orthogonal, sondern in einer anderen Richtung „spiegelt“?

Zeichne zunächst das Haus auf dem Bildschirm.
Bestimme die Matrix, die die folgende Abbildung beschreibt:
(Was passiert mit den Punkten auf der Achse, wie sieht das Bild von [-3,1] aus?)

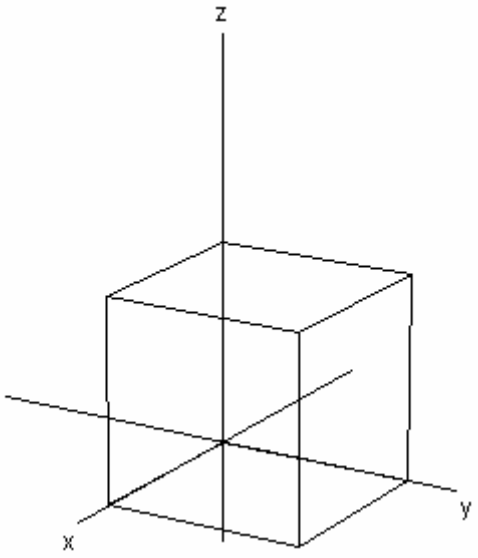


Führe weitere Schrägspiegelungen aus:
(Zeichne jeweils Haus, Achse, Richtung und Bild im 2D-Grafikfenster.)

1. Die Achse ist gegeben durch die Gerade y = -2x , die Richtung der Spiegelung durch die Vektoren [1 , 0] und [-1 , 0]
2. Die Achse ist gegeben durch y = –0.25x , die Richtung durch die Vektoren [1 , 1] und [-1 , -1]

Hausaufgabe:
Auch im 3D-Raum werden die Abbildungsmatrizen durch die Bilder der Einheitsvektoren bestimmt.

a) Bestimme die Matrix Dx(α) der Drehung um die z-Achse mit Drehwinkel α
b) Bestimme auch die Matrizen der Drehungen um die x- und die y-Achse.
c) Stelle den Würfel (Kantenlänge 4) auf die Spitze:



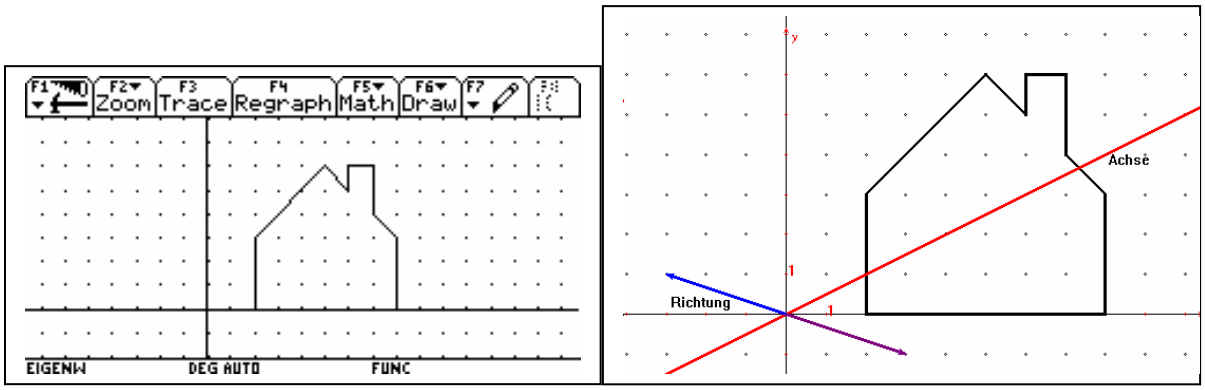
Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006

Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Aufgabe 9:
Die dir bekannte Abbildung „Achsenspiegelung“ ist immer eine orthogonale Spiegelung, d.h. die Verbindungsgerade von Punkt und Bildpunkt ist immer orthogonal zur Spiegelachse. Wie sieht die Matrix einer Abbildung aus, die nicht mehr orthogonal, sondern in einer anderen Richtung „spiegelt“?

Zeichne zunächst das Haus auf dem Bildschirm.
Bestimme die Matrix, die die folgende Abbildung beschreibt:
(Was passiert mit den Punkten auf der Achse, wie sieht das Bild von [-3,1] aus?)



Führe weitere Schrägspiegelungen aus:
(Zeichne jeweils Haus, Achse, Richtung und Bild im 2D-Grafikfenster.)

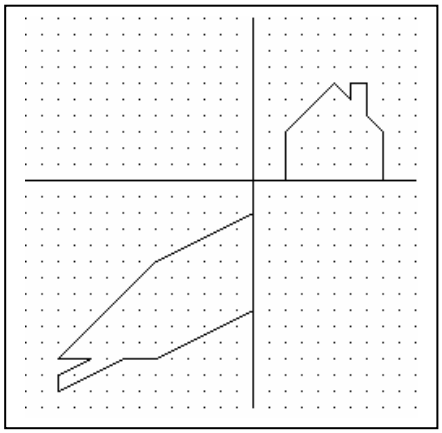
1. Die Achse ist gegeben durch die Gerade y = -2x , die Richtung der Spiegelung durch die Vektoren [1 , 0] und [-1 , 0]
2. Die Achse ist gegeben durch y = –0.25x , die Richtung durch die Vektoren [1 , 1] und [-1 , -1]

Aufgabe 10:
Bei der folgenden Abbildung ist die Matrix

$$\text{Abb1} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

verwendet worden. Hat die Abbildung eine Achse, und wie sieht die Richtung der Spiegelung aus?
Gibt es Vektoren, die auf Vektoren der gleichen Richtung abgebildet werden?
Löse dazu folgendes Gleichungssystem:

$$[x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = k \cdot [x,\ y]$$

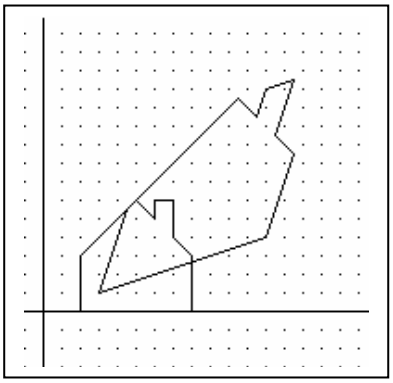


- Für welche Werte von k ist das überhaupt möglich?
- Wie sehen für diese Werte die Lösungen aus?

Information:
Die Werte von k, für die eine Lösung möglich ist, nennt man **EIGENWERTE** der Matrix, die Lösungsvektoren nennt man **EIGENVEKTOREN**.

Aufgabe 11:
Bei der folgenden Abbildung ist die Matrix

$$Abb2 := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$



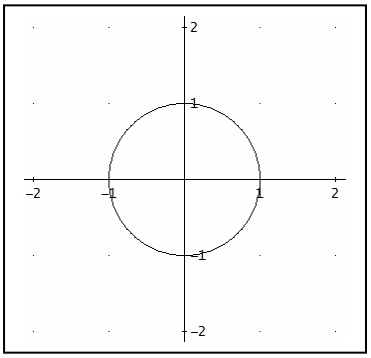
verwendet worden. Hat die Abbildung eine Achse, und wie sieht die Richtung der Spiegelung aus?
Gibt es Vektoren, die auf Vektoren der gleichen Richtung abgebildet werden?
Löse das entsprechende Gleichungssystem!

Aufgabe 12:
Bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen und interpretiere das Ergebnis im Sinne von „Spiegelachse und Spiegelrichtung“

$$Abb3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad Abb4 := \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad Abb5 := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Hausaufgabe: Das Bild des Einheitskreises

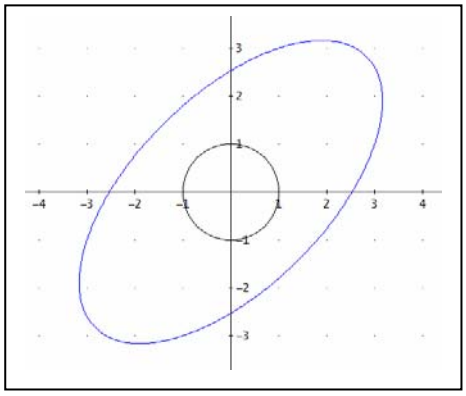
Mit **[cos(t),sin(t)]** lässt sich der Kreis zeichnen (dabei läuft der Parameter t von 0 bis 2π):



Wir bilden den Einheitskreis mit ***Abb6*** ab:

$$Abb6 := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

[COS(t), SIN(t)]·Abb6



Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren.

Stelle die Eigenvektoren auch noch auf dem Bildschirm dar!

Zeige, dass die Eigenvektoren senkrecht zueinander sind.
(Solche Abbildungen heißen „Eulersche Affinitäten“)

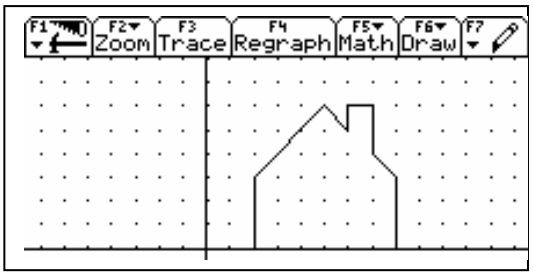
Welche Bedeutung haben hier die Eigenvektoren??

Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006

Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 4

Aufgabe 7: Hintereinanderausführung von Abbildungen



- Führe zunächst eine Abbildung mit der Matrix $A = \begin{matrix} 0.5 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix}$ durch und anschließend (mit dem Bild) die mit der Matrix $B = \begin{matrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{matrix}$. Durch welche Matrix C lässt sich die Ersatzabbildung beschreiben?

Begründe mit den Rechenregeln für Matrizen, dass **die Hintereinanderausführung von Abbildungen beschrieben wird durch das Produkt der Abbildungsmatrizen**

Untersuche auch, ob C Eigenwerte hat und interpretiere das Ergebnis

- Spiegele das Haus an der Geraden mit der Gleichung y = 3¶x und anschließend das Bild an der Geraden mit der Gleichung y = -x. Durch welche Matrix wird die Ersatzabbildung beschrieben? Welche Vermutung hast du hinsichtlich der Art der Ersatzabbildung?

Aufgabe 13:

- Spiegele das Haus zunächst an der Winkelhalbierenden im 1.Quadranten, und drehe dann das Bild um 60°.
  Berechne die Abbildungsmatrix der Ersatzabbildung und untersuche diese auf Eigenwerte und Eigenvektoren.
- In einem zweiten Anlauf wird die Reihenfolge der Abbildungen verändert:
  Drehe das Haus zunächst um 60°, und spiegele dann das Bild an der Winkelhalbierenden.
  Berechne auch hier die Abbildungsmatrix der Gesamtabbildung und untersuche diese auf Eigenwerte und Eigenvektoren.

  In beiden Fällen erhält man die Eigenwerte 1 und -1. Welche Aussage können wir hinsichtlich der Art der Abbildung machen?

Aufgabe 14:

„Erfinde“ eine Abbildung, deren zugehörige Matrix zum Eigenwert -2 den Eigenvektor [2,3] und zum Eigenwert 0.5 den Eigenvektor [-1,3] hat.
Zeichne das Bild des Hauses bei dieser Abbildung.

Aufgabe 15:

Erzeuge die in der Derive-Datei „GrafikBlatt4.dfw“ dargestellten Computergrafiken. Die notwendigen Informationen zur Verwendung des VECTOR-Befehls findest du in der Datei.

Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006

Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 5 Die steigende Hofeinfahrt…

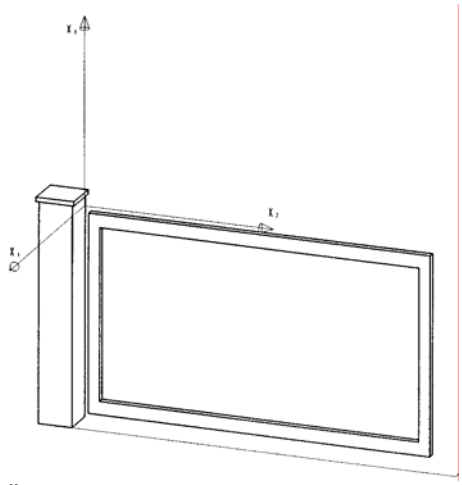
An einer Hofeinfahrt, die von der Straße her ansteigt, soll ein Hoftor angebracht werden.

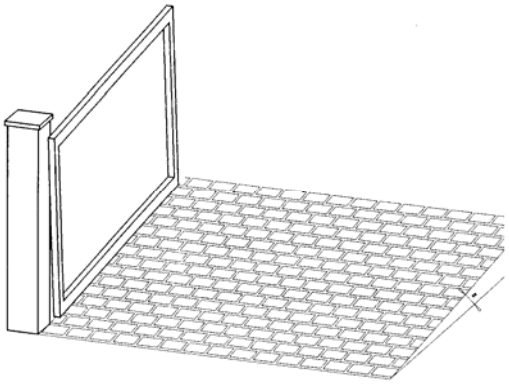
Aus Verkehrssicherheitsgründen muss das Tor zum Hof hin geöffnet werden.

Die Steigung der Hofeinfahrt ist **10%**.

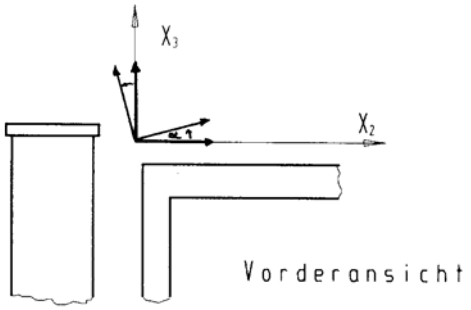
Wo ist das Problem?

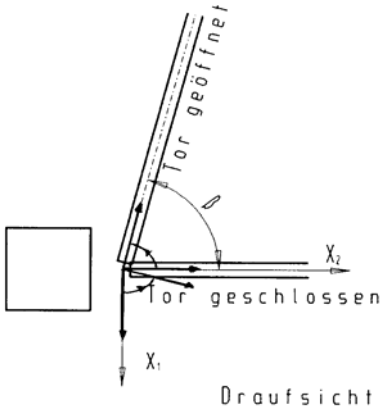
Die Bewegung des Tores beschreiben wir als lineare Abbildung des Raumes. D.h. wir müssen den Ursprung des Koordinatensystems in einen Punkt legen, der bei der Bewegung fest bleibt. Das kann die Ecke oben links sein (oder die Stelle, an der das obere Band befestigt ist…)
Die x-Achse zeigt nach vorne, die y-Achse nach rechts, die z-Achse nach oben.





Die Öffnungsbewegung lässt sich aus zwei hintereinander ausgeführten Drehungen zusammensetzen (erst anheben, d.h. eine Drehung um die x-Achse um den Winkel α, dann von der Straße weg drehen, d.h. eine Drehung um die z-Achse um den Winkel β).





a) Bestimme die Matrix der Drehung um die x-Achse mit beliebigem Drehwinkel α.

b) Bestimme die Matrix der Drehung um die z-Achse, wenn der Öffnungswinkel β beliebig ist.

Im folgenden Teil betrachten wir die oben beschriebene konkrete Hofeinfahrt, d.h. die Steigung ist 10% und der Öffnungswinkel ist 90°:

c) Bestimme die Matrix der Drehung um die z-Achse, wenn der Öffnungswinkel β gleich 90° ist (die Matrix ist ganz einfach).

d) Berechne die Matrix der Gesamtbewegung (Drehung um die x-Achse zunächst mit beliebigem Winkel α)und zeige, dass diese eine Achse hat. (Es interessiert nur, ob die Abbildung einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 hat!)

e) Bestimme den Steigungswinkel bei einer Steigung von 10%.

f) Wie müssen die Bänder angebracht werden, wenn ihr vertikaler Abstand 1200 mm beträgt und der Steigungswinkel aus e) benutzt wird? Beschreibe die Lage der Achse im Raum (im Vergleich zum Torpfosten)

Die Rechnung wird nun ganz allgemein durchgeführt, d.h. wir arbeiten mit beliebigem Steigungswinkel α und beliebigem Öffnungswinkel β.

g) Berechne die Matrix der Öffnungsbewegung und bestimme den Eigenvektor zum Eigenwert 1 (die Achse).
Lege mit Excel eine Tabelle an, aus der der Bauschlosser den Versatz bei Steigungen von 5% bis 15% (Schrittweite 1%) und bei Öffnungswinkeln von 80° bis 120° (Schrittweite 5°) ablesen kann (Der Abstand der Bänder ist 1000 mm).

Zusatz:

Zeichne in der 3D-Grafik ein Hoftor und „öffne“ es mit einem Schieberegler.
(Kein Plan? Wir stehen mit Rat und Tat zur Verfügung!)

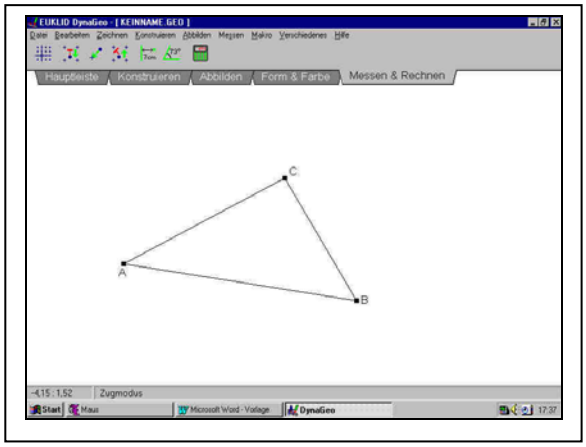
Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006

Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 6 DynaGeo – Konstruktionen und Zugmodus

Eine **D**ynamische **G**eometrie **S**oftware simuliert die grundlegenden Konstruktionswerkzeuge Zirkel und Lineal. Damit lassen sich die **Basisobjekte *Punkt, Strecke, Gerade und Kreis*** zeichnen. Darüber hinaus werden weitere Objekte, die auf Papier und Bleistift mehrere Konstruktionsschritte erfordern (***Mittelpunkt, Mittelsenkrechten, Parallelen, ...)*** als Bausteine zur Verfügung gestellt. Ein ganz gewöhnliches Geo-Dreieck stellt übrigens auch schon solche Bausteine zur Verfügung!

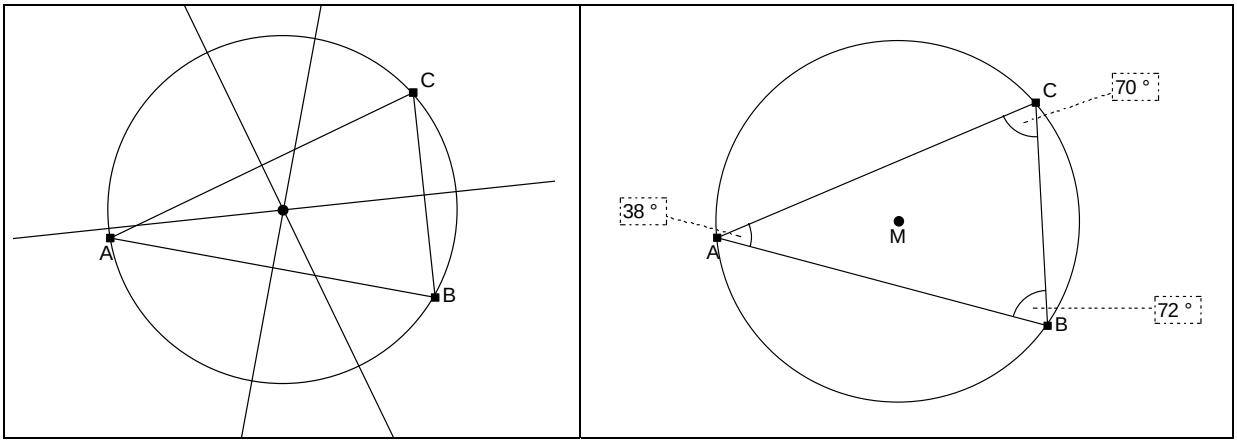
Besonderheiten eines DGS. **Zugmodus**
Makros
Ortslinien



Wichtig:
Es gibt 3 Sorten von Punkten.

a) Frei gewählte Punkte, diese können auch beliebig verschoben werden.
b) Punkte, die an ein Objekt gebunden sind. Diese können auch nur auf dem Objekt verschoben werden.
c) Punkte, die sich als Schnittpunkt aus einer Konstruktion ergeben. Diese können nicht gezogen werden

Wir konstruieren den Kreis, auf dem alle Punkte des Dreiecks liegen, den Umkreis.
Wo liegt der Mittelpunkt?
Anschließend verstecken wir die Linien.



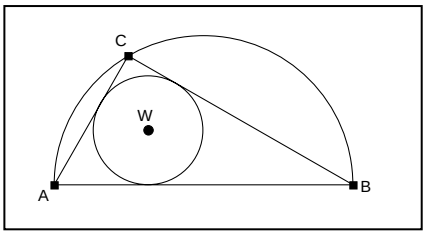
Aufgabe 17:

- Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt M, verstecke anschließend den zum Konstruieren benutzten Punkt.
- Wähle drei Punkte A, B, C auf dem Kreis und konstruiere das Dreieck. Du kannst jetzt A, B, C auf dem Kreis bewegen, der Kreis bleibt fest.
- Zeichne die die Strecken AM und BM und messe die Winkel bei C und bei M
- Variiere C (danach auch A und B) und beschreibe, was du beobachtest.
- Begründe deine Beobachtung (Tipp: Strecke MC einzeichnen)

Aufgabe 18:

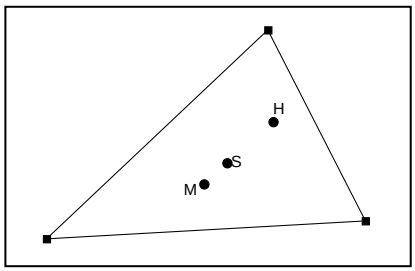
a) Konstruiere ein Dreieck, benenne die Eckpunkte, und konstruiere dann seinen **Inkreis**. Ziehe an den Eckpunkten.

b) Beginne eine neue Konstruktion mit der Strecke AB. Auf dem Halbkreis über der Strecke AB liegt der Punkt C.
W ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.
Wie ändert sich der Winkel AWB, wenn C auf dem Halbkreis bewegt wird?
Begründe deine Beobachtung!



Aufgabe 19:

a) Zeichne in einem Dreieck den Schnittpunkt der **Höhen (H)**, den Schnittpunkt der **Mittelsenkrechten (M)** und den Schnittpunkt der **Seitenhalbierenden (S)**. Verstecke anschließend die zum Konstruieren benutzten Linien.
b) Ziehen an den Eckpunkten des Dreiecks und beschreibe deine Beobachtungen in Bezug auf H,M,S.
c) Welche Eigenschaften hat das Dreieck, wenn H,M,S „besondere Lagen“ einnehmen?



Hausaufgabe:

a) DynaGeo
Zeichne einen Kreis k mit Mittelpunkt M und einen Punkt P außerhalb des Kreises.
Konstruiere die beiden Tangenten vom Punkt P an den Kreis (die Berührpunkte nennen wir T1 und T2).
Messe die Länge der Strecken PT1 und PT2 und ziehe am Kreis bzw. am Punkt P.
Begründe allgemein, dass diese Strecken gleich lang sein müssen.

c) Derive
Zeichne in der 2D-Grafik einen Kreis mit Radius 3 ($x^2+y^2=3^2$)
„Konstruiere“ vom Punkt P=[5,2] die Tangenten an den Kreis. (*Hinweis: Bestimme die Gleichung einer Geraden mit der Steigung m durch den Punkt [5,2]. Berechne dann die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreis. Für welche m gibt es nur einen Schnittpunkt? Damit lassen sich dann die Tangenten zeichnen)*

Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006

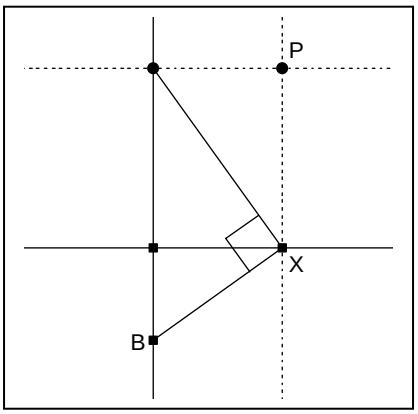
Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 7 Ortslinien

Ortslinienaufgaben sind klassische Aufgabenstellungen der Geometrie:

- Wo liegen alle Punkte, die von zwei Punkten gleich weit entfernt sind?
  Ą Mittelsenkrechte
- Wo liegen alle Punkte, die von sich schneidenden Geraden gleich weit entfernt sind?
  Ą Winkelhalbierende

Aufgabe 20



a) DynaGeo

Zeichne zwei orthogonale Geraden, wähle einen Punkt B auf der vertikalen, und einen Punkt X auf der horizontalen Geraden. Verbinde Sie B und X und zeichne eine orthogonale Gerade.

Konstruiere mit den Schnittpunkten orthogonalen Geraden den Punkt P.

Auf welcher Kurve läuft der Punkt P, wenn der Punkt X die horizontale Gerade durchläuft?

Kannst du die Beobachtung auch begründen?

b) Derive

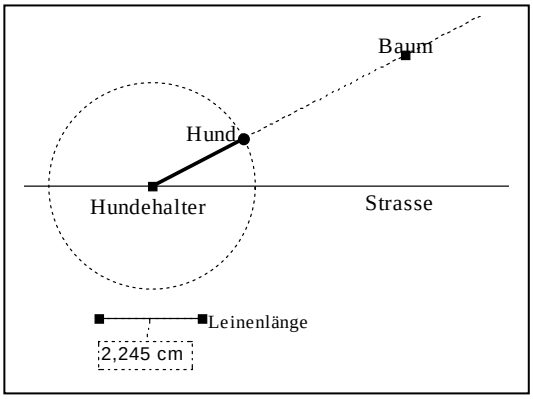
Wähle für B den Punkt [0,-2] und für X den Punkt [r,0]. Füge einen Schieberegler ein und zeichne beide Punkt. Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes mit der 2.Achse und des Punktes P (in Abhängigkeit von r, d.h. P=[r,??])

Experimentieren, Erkunden von Eigenschaften

Beispiel 1: Welche Konstruktion steckt dahinter?

Beispiel 2: Wie sieht das Bild einer Geraden, eines Kreises bei einer zentrischen Streckung aus?

Aufgabe 21



Auf einer Strasse geht eine Person mit einem Hund an der Leine spazieren. Etwas abseits der Strasse steht ein Baum, zu dem der Hund hin will. Er läuft immer auf den Baum zu, der Hundehalter kann die Strasse allerdings nicht verlassen.

a) DynaGeo:

Auf welcher Kurve bewegt sich der Hund, wenn der Hundehalter auf der Strasse spazieren geht? Zeichne die Ortslinie und variiere die Leinenlänge.

Welche Fälle kann man unterscheiden?

b) Derive

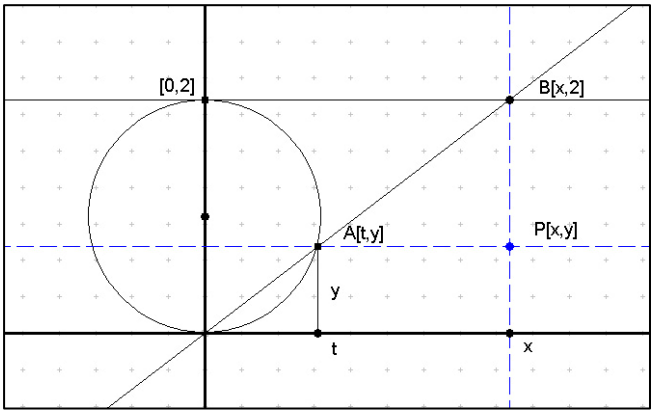
Bearbeite das Problem mit Derive (B=[0,2], Leinenlänge r mit Schieberegler)

*(Informiere dich in der Literatur oder im Internet über die **Konchoide**!)*

Aufgabe 22

Maria Gaetana **Agnesi** - die erste Frau, die 1750 einen Lehrstuhl für Mathematik bekam (in Bologna) hat mit Hilfe einer geometrischen Konstruktionsvorschrift eine Kurve definiert: die sog. **"Versiera"** oder (falsch übersetzt) die **"Hexe" der Agnesi**.

Gegeben ist ein Kreis, der die horizontale Achse von oben im Ursprung berührt, sowie die Parallele zu dieser Achse durch den höchsten Punkt des Kreises.
Eine Ursprungsgerade schneidet den Kreis in A(t / y) und die Parallele in B(x / b). Durch A und B ist ein Punkt P(x / y) festgelegt.



Der Punkt P bestimmt eine Kurve wenn sich A auf dem Kreis bewegt. Konstruiere diese als Ortslinie.

Bestimme die Gleichung der Kurve, wenn der Radius des Kreises 1 ist. *(Tipp: Strahlensatz und Kreisgleichung helfen weiter!)*
Zeichne den Kreis und den Funktionsgraphen mit DERIVE

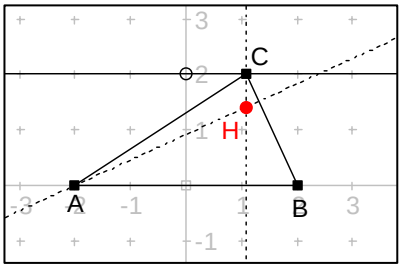
Bestimme die Gleichung der Kurve, wenn der Radius des Kreises a ist.

Können die Funktionsterme

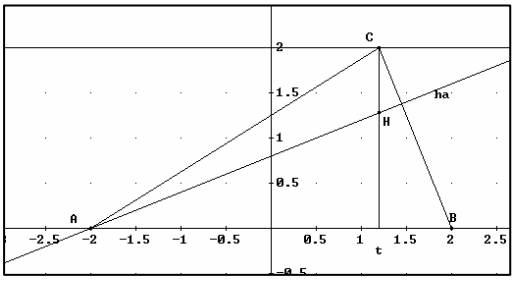
$$f_1(x)=\frac{10}{x^2+4},\quad f_2(x)=\frac{27}{x^2+9},\quad f_3(x)=\frac{1}{1+x^2}$$ zu einer Versiera gehören?

Aufgabe 23 **Dem Höhenschnittpunkt auf der Spur**

a) DynaGeo
(Bei dieser Aufgabe arbeiten wir einmal mit dem Koordinatensystem von DynaGeo)
Wir beginnen mit konkreten Werten: A = [-2 , 0] , B = [2 , 0] und einer Parallelen zu AB durch [0 , 2]
Auf der Parallelen konstruieren wir einen Punkt C und zeichnen im Dreieck ABC den Höhenschnittpunkt H.
Verschiebe C und beobachte H. Auf welcher Kurve bewegt sich der Höhenschnittpunkt?



b) Derive



Berechne die Koordinaten des Punktes H = [t,??] und zeige, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt.
Tipp: Die Gerade ha ist orthogonal zur Geraden BC

- Welche Kurve ergibt sich, wenn der y-Wert von C gleich 4 , bzw. gleich c ist?
- Lässt sich der Beweis auch verallgemeinern? (A = [-a , 0] , B = [b , 0] und C = [t , c])

Hausaufgabe: **Variation des Problems aus Aufgabe 23**

Teil 1

- Zeichne eine Strecke AB.
- Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt A, der durch B geht.
- Zeichne einen Punkt C auf diesem Kreis und ergänze zu einem Dreieck ABC.
- Konstruiere in diesem Dreieck den Höhenschnittpunkt H und untersuche, auf welcher Kurve sich H bewegt, wenn C auf dem Kreis variiert wird.

Teil 2 Wie lässt sich diese Kurve algebraisch beschreiben?

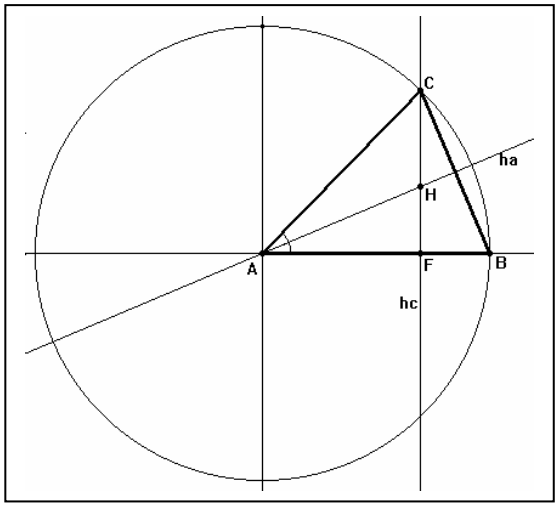
- Der Einfachheit halber nehmen wir einmal an, dass der Kreis den Radius 1 hat, den Koordinatenursprung legen wir in den Mittelpunkt des Kreises (A).
- Den Kreis stellen wir in Parameterform dar, wobei der Parameter der Winkel bei A (α) ist.

  C := [COS(α), SIN(α)]

  (Beim Zeichnen läuft α von 0 bis 2pi)

  F := [COS(α), 0]

- Ziel ist eine Darstellung von H, die nur noch den Parameter α enthält.

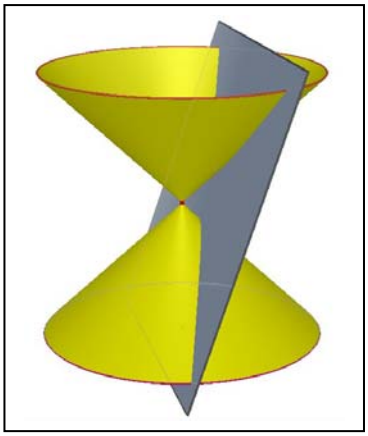


Tipp: Du brauchst die Gleichung der Höhe ha (genauer die Steigung dieser Geraden). Da die Höhe orthogonal zur Strecke BC ist, berechne erst die Steigung der Dreiecksseite BC und damit dann die Gleichung der Geraden ha

Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006

Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 8 Kegelschnitte sind Kegel-Schnitte…



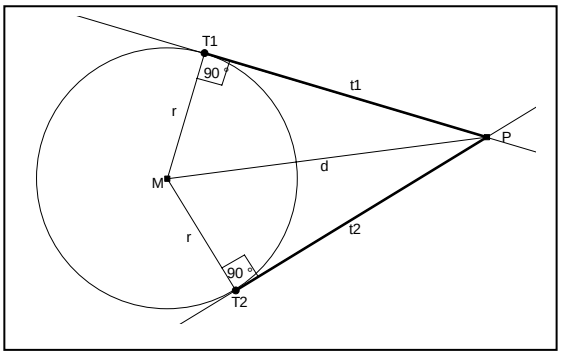
Wenn ein (Doppel-)Kegel eine Ebene trifft, dann können ganz unterschiedliche Schnittkurven entstehen.

Überlege in jedem der angegebenen Fälle, wie die Ebene den Kegel treffen muss, damit die entsprechende Schnittkurve entsteht:

- ein Kreis
- zwei Geraden
- eine Gerade
- ein Punkt
- eine Ellipse
- eine Hyperbel
- eine Parabel

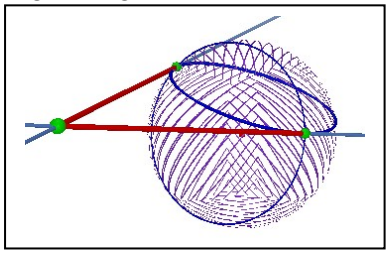
Interessant sind **Ellipse, Parabel und Hyperbel**, die wir nun näher studieren wollen. Sie haben ganz einfache geometrische Eigenschaften, die es uns erlauben, solche Kurven im 2-dimensionalen Raum zu erzeugen und zu beschreiben.

Zur Vorbereitung machen wir uns mit einer einfachen Eigenschaft von Tangenten an einen Kreis bzw. an eine Kugel vertraut:



Von einem Punkt P aus werden die beiden Tangenten an den Kreis konstruiert.

Begründe, dass die Abstände PT1 und PT2 gleich groß sind.



Von einem Punkt P aus werden Tangenten an eine Kugel konstruiert.

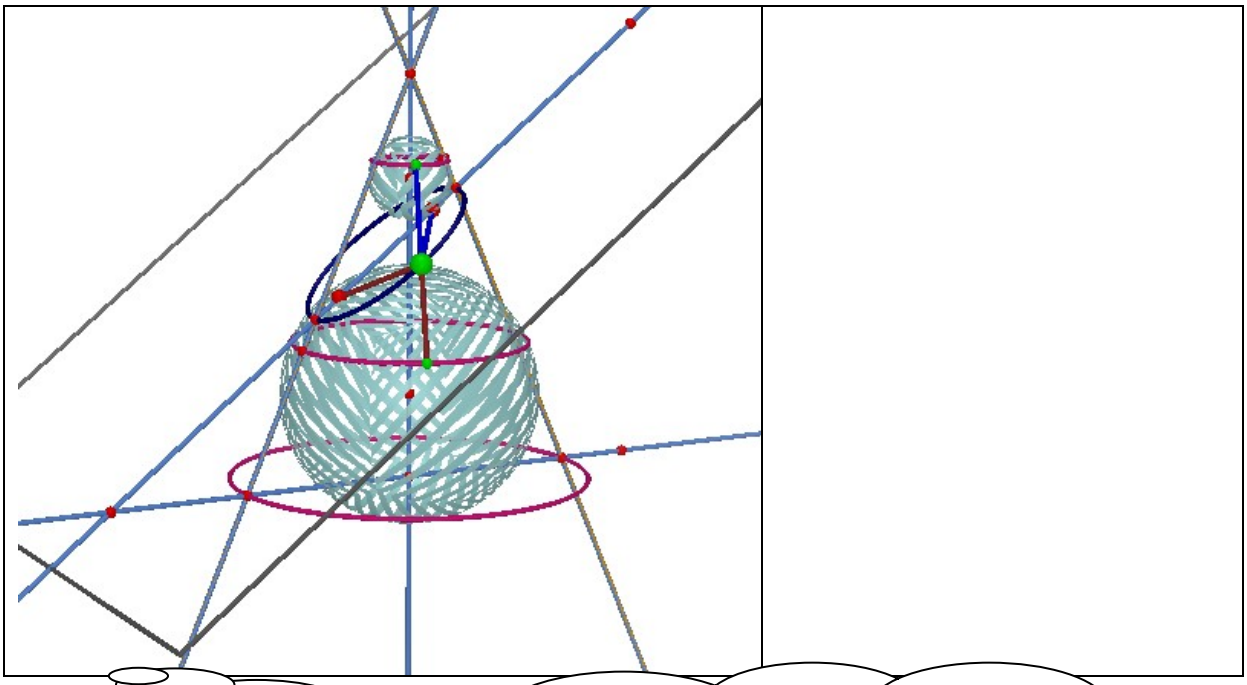
Begründe, dass die roten Strecken gleich lang sein müssen.

Ergebnis: Von einem Punkt des Raums aus sind alle Tangenten an eine Kugel gleich lang!

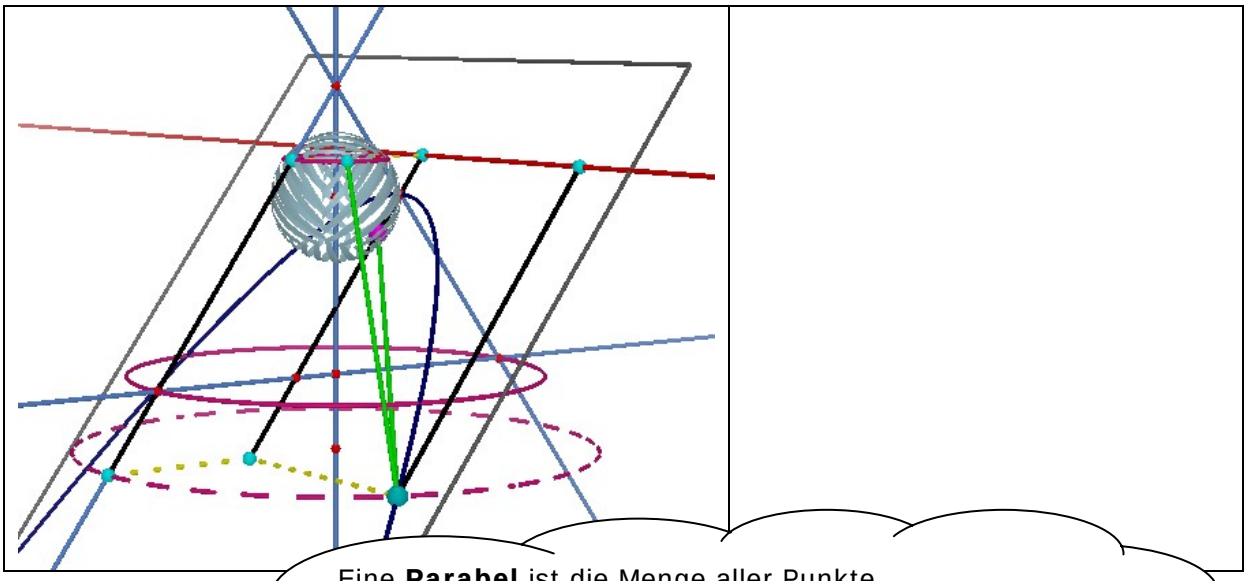
Mit diesen Kenntnissen hat der franz.-belg. Mathematiker G.P. Dandelin (1794-1847) eine Methode zur Begründung von wesentlichen Eigenschaften von Ellipse, Parabel und Hyperbel „erfunden“.

Er benutzt die so genannten **Dandelinschen Kugeln.**

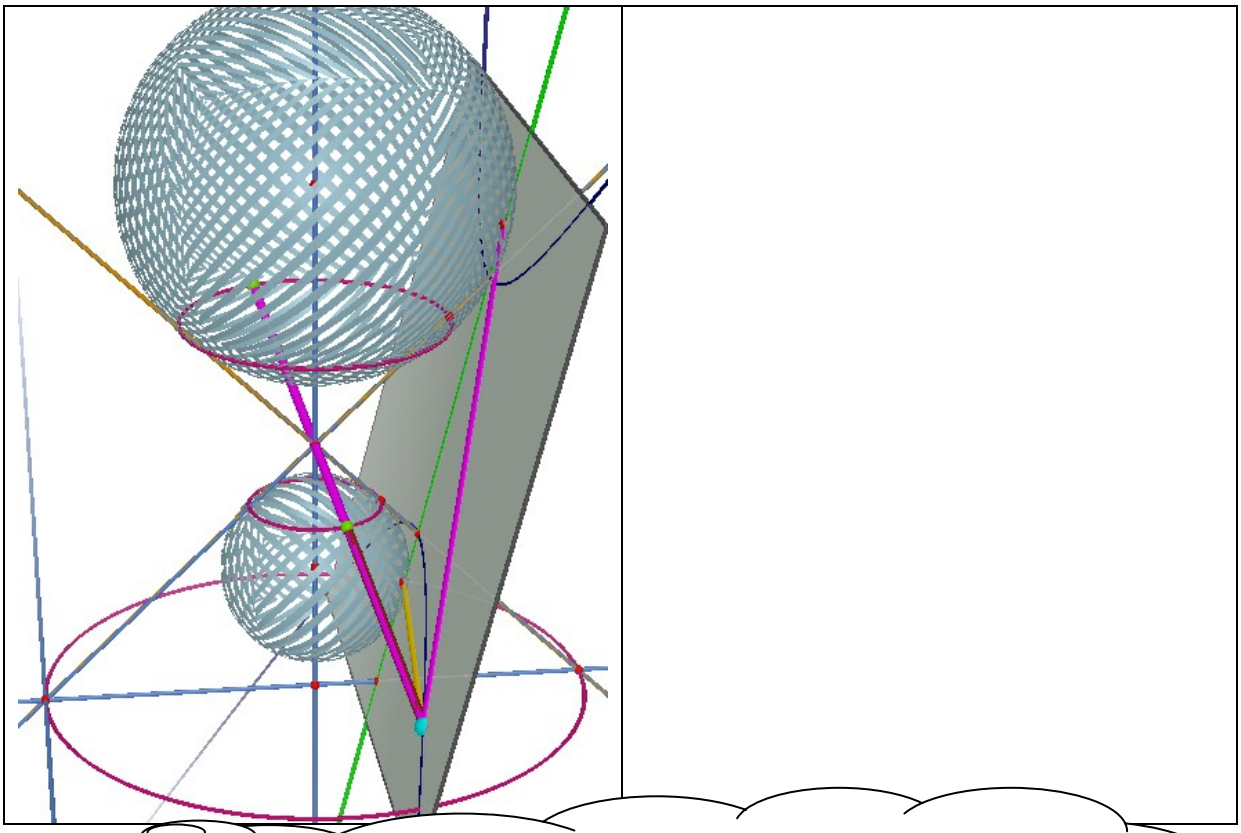
(Beim Schnitt einer Ebene mit einem Kegel werden Kugeln so in den Kegel einbeschrieben, dass sie die Ebene und den Kegel gerade berühren.)



Eine **Ellipse** ist die Menge aller Punkte, …



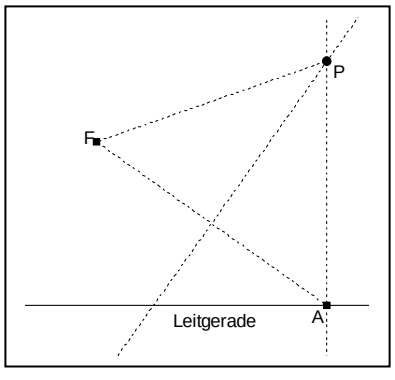
Eine **Parabel** ist die Menge aller Punkte, …



Eine **Hyperbel** ist die Menge aller Punkte, …

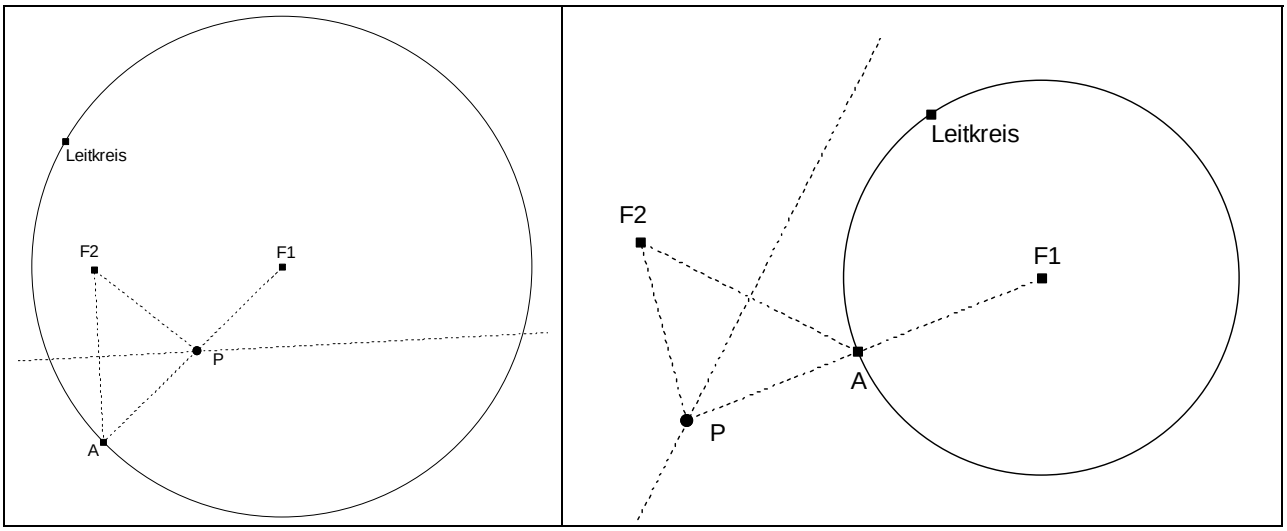
Diese Eigenschaften erlauben uns nun, die Kegelschnitte in der Ebene zu studieren.
Wir konstruieren uns mit Euklid-DynaGeo die drei Kegelschnitte mit Hilfe von Leitgerade bzw. Leitkreis.

Aufgabe 24



a) Konstruiere eine Gerade und einen Punkt F außerhalb.
Wähle A auf der Leitgerade und konstruiere den Punkt P so, dass der Abstand FP gleich dem von AP ist.
Zeichne die Ortskurve von P, wenn sich A auf der Leitgerade bewegt.

b) Zeichne zwei Punkte F1 und F2 und einen Leitkreis mit Mittelpunkt F1.
Wähle einen Punkt A auf dem Kreis und konstruiere den Punkt P so, dass der Abstand PF2 genau so groß ist wie der von PA.
Zeichne jeweils die Ortskurve von P, wenn sich A auf dem Leitkreis bewegt.

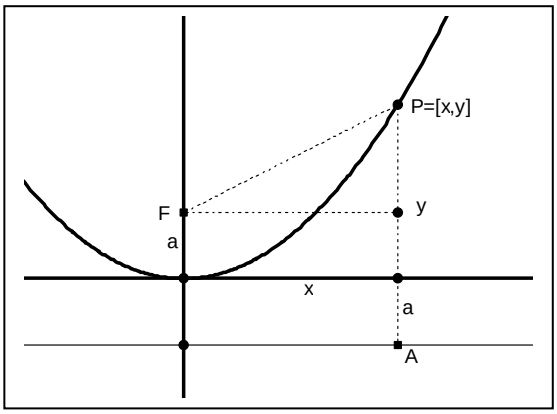


Warum entsteht einmal eine Ellipse und im anderen Fall eine Hyperbel?
Begründe mit den vorher erarbeiteten Eigenschaften.

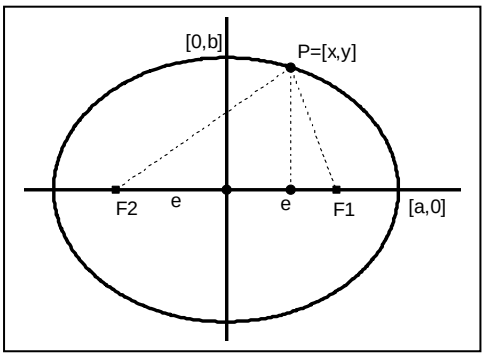
Aufgabe 25

Leite eine Gleichung für die Parabel her.
Das Koordinatensystem legen wir in den Scheitelpunkt der Parabel.
Beachte, dass die Länge der Strecke PF gleich der Länge der Strecke PA ist.

Zeichne die Parabel mit Derive (mit Schieberegler für a)



Aufgabe 26



Leite eine Gleichung für die Ellipse her. Beachte dabei, dass die Summe der Längen von PF1 und PF2 gleich 2a ist.

Wenn du den Punkt P in den Schnittpunkt mit der 2.Achse schiebst, kannst du einen Zusammenhang zwischen e, a und b herstellen! Schreibe die Gleichung so, dass nur noch x, y, a und b vorkommen.

Zeichne die Ellipse mit Derive (mit Schiebereglern für a und b).
Wie kannst du aus a und b (die Größe der beiden Halbachsen) die Lage der Brennpunkte F1 und F2 rekonstruieren?

Hausaufgabe:

Leite die Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ her

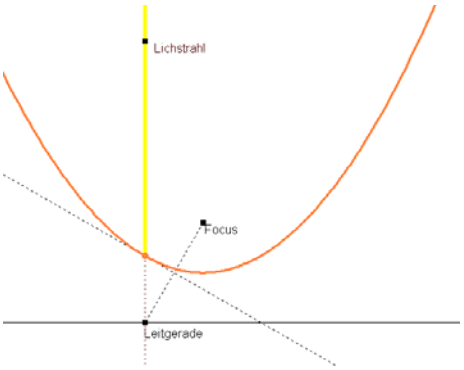
Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006
Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 9 Fortsetzung Kegelschnitte – Herleitung der Gleichungen und Anwendungen der Parabel und der Ellispe

Anwendungen der Parabel

Parabeln begegnen uns im Alltag an vielen Stellen. Eine besondere Bedeutung hat die Parabel in der Optik bzw. Akustik.

Aufgabe 27



Dazu konstruieren wir eine Parabel über die Abstandeigenschaft (s. Aufgabe 24).
Stelle wir uns nun vor, der Parabelbogen hätte Reflektionseigenschaften wie ein Spiegel. Dann würde ein Strahl nach dem Gesetz „*Einfallswinkel = Ausfallswinkel*“ am Parabelbogen gespiegelt werden.

a) Untersuchen Sie diesen Vorgang zunächst anhand von senkrecht zur Leitgeraden eintreffenden Strahlen.

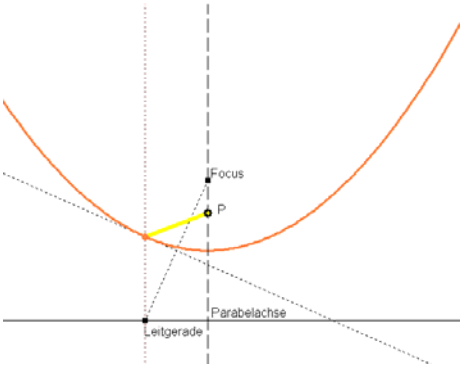
b) Solarkocher sind bei uns sicherlich ein Party-Gag. In Länder mit ausreichendem Sonnenschein und Brennstoffmangel sind sie sinnvolle Alternativen zum Kochen.

Beschreiben Sie ausgehend von obiger Eigenschaft die Funktionsweise eines Solarkochers.

c) Parabolantennen sind typisiert und haben einen Durchmesser von 65 bzw. 80cm. Aufgrund der doppelten Fläche liefern Antennen mit einem Durchmesser von 80cm auch eine annähernd doppelt so gute Bildqualität wie Antennen mit 65cm Durchmesser.
Bestimmen Sie eine sinnvolle quadratische Funktion für eine solche Parabolantenne.

d) Die größte Parabolantenne Deutschlands steht tief in einem Tal in der Eifel versteckt. Die Antenne hat einen Durchmesser von 100m, der Focus befindet sich ca. 30m über dem Scheitelpunkt. Erstellen Sie ein maßstabsgetreue grafische Darstellung.

Aufgabe 28



In der obigen Aufgabe wurde untersucht wie einfallende Strahlen bei Parabeln reflektiert werden. Betrachten wir nun, was passiert, wenn durch eine Lichtquelle im Strahlen aus Parabel hinaus gestrahlt werden. Dazu konstruieren Sie bitte wieder eine Parabel (s. Aufgabe 24).
Nun wird ein Punkt P als Lichtquelle beliebig auf die Parabelachse gesetzt.

Beobachten Sie wie der Lichtstrahl reflektiert wird, wenn der Punkt nicht im Focus liegt.

Anwendungen der Ellipse

Auch die Ellipse hat Reflexionseigenschaften wie die Parabel.

Aufgabe 29

a) Eine Legende über das Leben des Archimedes erzählt: „Bei einer Belagerung durch eine römische Flotte soll Archimedes die Anweisung gegeben haben, die Schilder der Soldaten in Form einer Ellipse anzuordnen. Dabei waren die römischen Schiffe in einem Brennpunkt der Ellipse. Im anderen Brennpunkt soll Archimedes dann ein Feuer angefacht haben, um damit die Schiffe der Römer in Brand zu setzen."

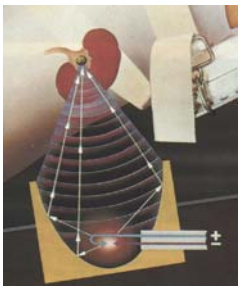
Prüfe die Legende auf mathematische Korrektheit.

b) Die Spiegeleigenschaft der Ellipse wurde früher in Flüstergewölben verwendet. Flüstergewölbe sind Halb-Ellipsoide, d.h. Räume deren Decken und Seiten elliptisch sind. Stellt man sich als Flüsterer an eine bestimmte Stelle im Raum, konnte man an einer anderen weit entfernt Stelle das Geflüsterte hören. Aber eben nur an einer Stelle !

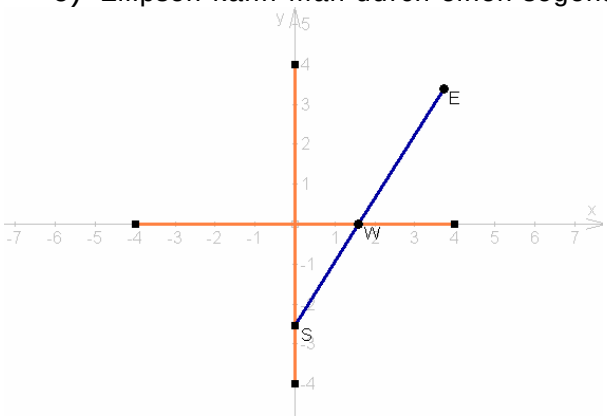
Wo muss man sich als Flüsterer hinstellen und wo als Lauscher, damit das Geflüsterte gehört wird ?

_____

Heute wird die Spiegeleigenschaft der Ellipse für die Beseitigung von Nierensteinen in sogenannten Lithotripter eingesetzt.



c) Ellipsen kann man durch einen sogenannten Ellipsenzirkel zeichnen.



Auf einem Schienenkreuz wird ein Zeichenarm (Blaue Strecke) befestigt. Der Abstand SW und WE sind frei wählbar, aber für die Zeichnung fest.

Beobachte wie die Parabel entsteht.

Anwendung der Hyperbel

Aufgabe 30

Finden Sie die Spiegeleigenschaft der Hyperbel heraus. Sie wird bei Spiegelteleskopen verwendet.

Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006

Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 10

Aufgabe 31:
Besuchen Sie diese Seite im Internet:

http://members.aol.com/dustmannfw/

Koordinatengeometrie mit DGS für die J.-St. 11 (Seite 5)

(Hinweis für die Laptop-Gruppe: Die Datei kann bei uns auch abgeholt werden!)

Dort wird eine Fülle von Konstruktionen rund um die Kegelschnitte vorgestellt.

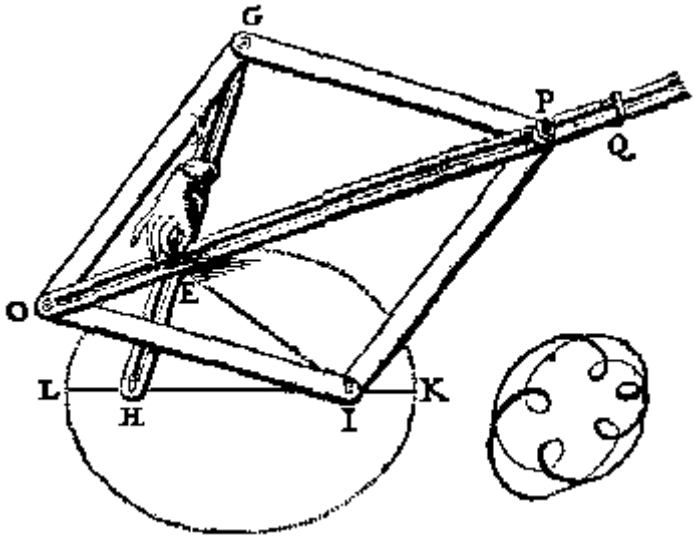
- Wählen Sie eines der folgenden Themen aus,
- konstruieren Sie die entsprechende Figur mit DynaGeo,
- weisen Sie nach, dass es sich um eine Ellipse handelt (Gleichung herleiten), und
- bauen Sie ein entsprechendes Zeichengerät. (Die Geräte werden am 18.7. in der letzten Veranstaltung vorgestellt)

Ellipsenkonstruktion (Streifenmethode)

Ellipsenkonstruktion (Scheitelkreismethode)

Ellipsenzirkel

Ellipsenzirkel von van Schooten



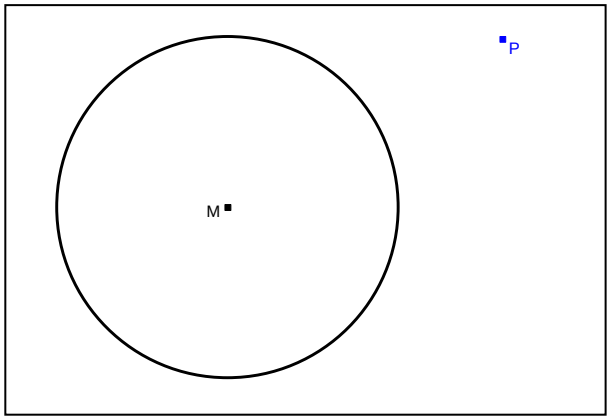
Praktikum zu AGLA II für L3-Studierende – SS 2006

Dr. Hubert Weller (hubert.weller@schule.uni-giessen.de)
Maren van Kessel (mvk@mathetix.de)

Blatt 11

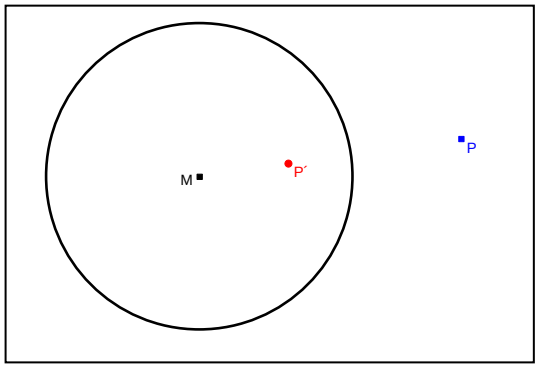
Zwei merkwürdige Abbildungen…

1. Abbildung – Die Inversion am Kreis



Gegeben ist ein Kreis und ein beliebiger Punkt P. Konstruiere den Bildpunkt P´ nach folgender Konstruktionsvorschrift:

- *Zeichne die Gerade durch M und P*
- *Konstruiere die Tangenten von P aus an den Kreis (Nenne die beiden Berührpunkte T1 und T2)*
- *Zeichne die Gerade durch T1 und T2*
- *Der Schnittpunkt von MP und T1T2 ist der Bildpunkt P´*



Verstecke alle bei der Konstruktion benutzten Linien, bewege P und beobachte P´.

Dies wollen wir weiter erforschen. D.h. wir wollen gezielt untersuchen wie das Bild unterschiedlicher Objekte aussieht.

- *Zeichne zunächst eine Strecke, binde den Punkt P an diese Strecke und zeichne die Ortslinie von P´auf, wenn P auf der Strecke bewegt wird. (Ziehe an den Endpunkten der Strecke und beobachte die Ortslinie.)*
- *Zeichne einen Kreis, binde P an den Kreis und zeichne die Ortslinie von P´auf. (Experimentiere mit dem Kreis)*
- *Zeichne ein Vieleck, binde den Punkt P an das Vieleck und zeichne die Ortslinie von P´auf. (Variiere das Vieleck, indem du an den Ecken ziehst.)*
- *Wie musst du P bewegen, wenn P´ nach M wandern soll?*

Jetzt haben wir dieses Problem:

Wie lässt sich die Abbildung analytisch (mit Formeln) beschreiben?

Dafür legen wir unser Koordinatensystem in den Mittelpunkt des Kreises und leiten die Formel her: (siehe Datei *„Inversion_am_Kreis.dfw“*)

Inversion an einem Kreis mit Radius 10

Wir definieren die Abbildungsfunktion (Berechnung der Koordinaten von P´ aus den Koordinaten [x,y] des Punktes P:

$$\#3:\quad Bild(x, y) := \left[\frac{100\cdot x}{x^2 + y^2},\ \frac{100\cdot y}{x^2 + y^2}\right]$$

Die Eckpunkte des "Eff" werden definiert…

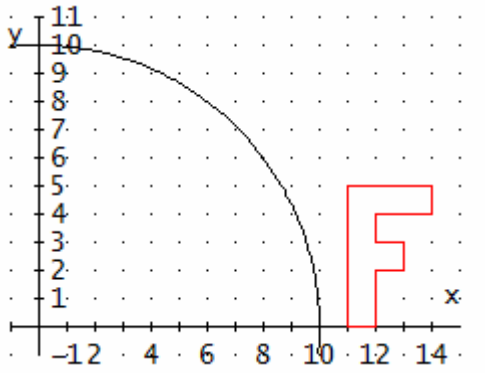
```
#4:   P1 := [11, 0]
#5:   P2 := [11, 5]
#6:   P3 := [14, 5]
      P4, P5,…, P10
```

… und das Eff wird gezeichnet:

```
#14:  Daseff := [P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P1]
```

Der Kreis mit Radius 10 wird noch ergänzt:

```
#15:  [10·COS(s), 10·SIN(s)]
```



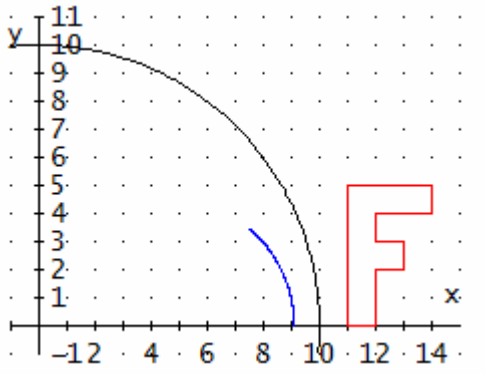
Die Kanten des Buchstabens sind Strecken, die wir mit der uns bekannten Form (Ortsvektor plus Vielfaches des Richtungsvektors – „Spitze minus Anfang“) darstellen. Q1 ist ein beliebiger Punkt auf der Strecke P1P2.

(Für den Parameter t gilt jeweils $0 \le t \le 1$)

```
#16:  Q1 := P1 + t·(P2 – P1)
```

$$\#17:\quad Bild(Q1_1, Q1_2) = \left[\frac{1100}{25\cdot t^2 + 121},\ \frac{500\cdot t}{25\cdot t^2 + 121}\right]$$

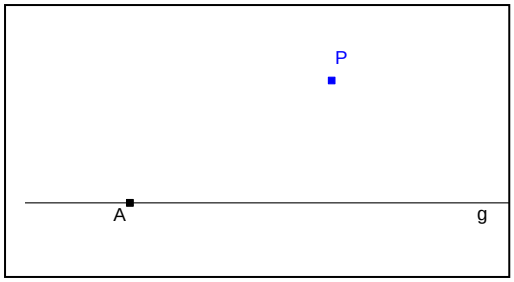
Die rechte Seite markieren und zeichnen liefert das Bild der Strecke P1P2



Aufgabe 32: Vervollständige das Bild des „eff“

2. Abbildung – siehe „Weigand/Weth, Computer im Mathematikunterricht“
Spektrum, Heidelberg, 2002
S. 172 ff

Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt A auf g und ein beliebiger Punkt P. Konstruiere den Bildpunkt nach folgender Konstruktionsvorschrift:



- *Spiegele den Punkt P an der Geraden g (Bildpunkt wird Q genannt)*
- *Zeichne die Gerade durch A und Q (nenne sie h) und…*
- *…spiegele P an h (Der gespiegelte Punkt ist der Bildpunkt P´)*

Wir wollen auch wieder die Bilder von unterschiedlichen geometrischen Objekten mit der Methode „P anbinden und Ortslinie von P´ aufzeichnen“ untersuchen.

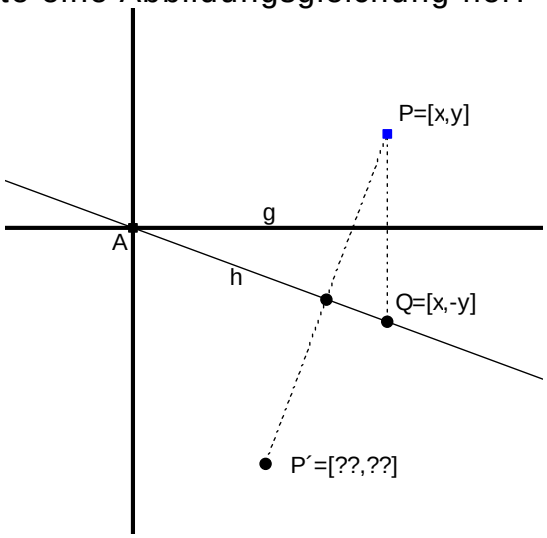
- Wie sehen die Bilder von Strecken und Geraden aus? Untersuche auch unterschiedliche Lagen (parallel zu g, orthogonal zu g,…)
- Wie sehen die Bilder von Kreisen aus? Untersuche auch hier unterschiedliche Lagen.

Jetzt haben wir auch hier das Problem:

Wie lässt sich die Abbildung analytisch (mit Formeln) beschreiben?

Wir wählen die Gerade g als x-Achse und legen den Koordinatenursprung in den Punkt A.

Aufgabe 33: Leite eine Abbildungsgleichung her.



Analytische Geometrie und Linearen Algebra II

Portfolio

Portfolio

Projekt 1: AGLA

2 Seiten (durchaus persönlich)

- Was ist das besondere an AGLA?
- Was hat mir besonders gut gefallen?
- Was könnte man noch verbessern?

© Beutelspacher
SS 2006

Projekt 2: Mathematiker

Stellen Sie auf 5 Seiten einen der folgenden Mathematiker dar:

- Leibniz
- Grassmann
- Cayley
- Hamilton
- Euler
- Gauß

Quellenangaben nicht vergessen!

Daten

Jedes Projekt zählt bis zu 5 Punkten (insgesamt bis 10 Punkte).

Abgabe bis 30.09.2006

Analytische Geometrie und Linearen Algebra II

Zusammenfassung der in den Portfolios geäußerten Kritikpunkte

Positiv / sollte beibehalten werden / hat mir gefallen

Engagement, Organisation, allgemeine Aussagen zum Projekt

- Stets kompetente, freundliche, engagierte Ansprechpartner, schnelle und präzise Antworten rund um die Uhr (25)
- Gute Organisation, Gliederung (19)
- Entspannte, lockere Atmosphäre, gut aufgehoben, kein Stress durch Leistungsdruck, man hat sich wirklich um uns gekümmert (20)
- Klarer Aufbau und Aufteilung und Punkteverteilung sehr praktisch, vermindert Druck, erinnert an Schule, erleichtert den Einstieg ins Studium, hält zum kontinuierlichen Lernen an (16)
- Mit Fragen ernst genommen worden (13)
- Trennung von Diplomstudierenden, da diese anderes Ziel verfolgen und man fühlt sich nicht unterlegen (10)
- Zufrieden, macht sehr viel Spaß, Freude an der Mathematik (6)
- Hat mir sehr gut gefallen (8)
- Konzentration auf für den Lehrerberuf relevante Dinge (4)
- Sehr interessant, nicht ganz leicht (3)
- In Entscheidung für Lehramt L3 Mathematik bestärkt (3)
- Erleichtert den Einstieg, Angst genommen (7)
- Projekt sollte weiter durchgeführt werden (7)
- Projekt sollte auf das komplette Studium ausgedehnt werden (2)
- Mathe macht glücklich
- Nicht nur die Buchstaben vertauscht (LAAG – AGLA)
- Nicht unnötig kompliziert – wichtig auch für spätere Lehrer (3)
- Modularisierung scheint dem Fachbereich Mathematik am wenigsten auszumachen (nicht so viel Chaos wie bei den anderen Fachbereichen) (4)
- Aktuelle Infos (auch zu anderen Mathematikveranstaltungen, z. B. im Mathematikum) über Stud.IP bzw. E-Mail (6)
- Erkenntnis, was noch alles in der Mathematik steckt, was man noch nicht weiß
- Zeiten vom ersten Semester auf das zweite übernommen
- Forum sehr hilfreich bei der Bearbeitung der Hausaufgaben (13)
- Wiederholte Empfehlung, in Lerngruppen zusammenzuarbeiten; Organisation, kleine Gruppen, Übungen, Forum, Praktikum, Freusburg, Mathematikumsveranstaltungen, Weihnachtsfeier, Fachschaftsgrillen usw. (4)
- Einzigartige Mischung aus Theorie und Praxis.

Vorlesung

- Stoff wurde nicht präsentiert, sondern mit den Studenten entwickelt (3)
- Prof. Beutelspacher erklärt gut, mit Geduld und viel Charme, motivierend (12)
- Guter Gesamtüberblick mit Hinblick auf später in der Schule relevante Inhalte, motiviert (10)
- Inhalte klar dargestellt und mit Beispielen illustriert (4)
- Niveau hat unter der Anpassung nicht gelitten
- Kurze Pause während der Vorlesung
- Kleine Aufgaben während der Vorlesung
- Aufteilung in Folien, Tafel und mündlicher Erläuterung (3)
- Prof. Beutelspacher lobt Fragen („Das ist eine gute Frage!“) und beantwortet diese dann stets freundlich und hilfsbereit (4)
- Download der Folien, Zeit zum Mitdenken in der Vorlesung (16)
- Folien sehr gut, übersichtlich, gut gegliedert und selbsterklärend (9)
- Buch Lineare Algebra als Vertiefung und Ergänzung (4)
- Vorlesung, Übungen, Praktikum verzahnt, baut aufeinander auf (10)

Übungen, Hausaufgaben, Klausuren

- Kleinere Gruppe, lernt besser die Kommilitonen kennen, nicht so anonym, familiär, Vorstellungsrunde in Übungen, effizienteres Arbeiten (10)
- Beweisführung nicht bis ins Detail gefordert, Überblick und Anwendung stand im Vordergrund
- Mittwochstutorium eine sehr große Hilfe (6)
- Angemessene und gut konzipierte Klausuren (8)
- Sehr engagierte, kompetente Übungsgruppenleiterinnen und –leiter, Engagement über die übliche Zeit hinaus (7)
- Vorlesung, Übungen, Praktikum verzahnt, baut aufeinander auf (10)
- Verschiedene Übungs- und Praktikumstermine helfen bei der Stundenplanabstimmung (2)
- Praktikum, Übungen sehr hilfreich zur Vertiefung und Veranschaulichung (18)
- Forum sehr hilfreich bei der Bearbeitung der Hausaufgaben (11)
- Hausaufgabenbearbeitung fiel im zweiten Semester leichter (Lerneffekt)
- Gute Übungen; Probleme gut erklärt, gute Arbeitsatmosphäre, andere Sichtweise auf Vorlesungsstoff (4)
- Witze und Knobelaufgaben auf den Übungsblättern
- Hausaufgaben abwechslungsreich, motivierend (5)
- Richtig-falsch Aufgabe in der Klausur als Abwechslung zu anderen Aufgaben
- Wertung der besten fünf aus sechs Aufgaben in der Klausur
- Gibt Selbständigkeit und Eigenverantwortung

Praktikum

- Praktikum, Übungen sehr hilfreich zur Vertiefung und Veranschaulichung (18)
- Praktikum liefert Zusammenhang zum Schulstoff, motiviert, veranschaulicht, interessant (16)
- Vorlesung, Übungen, Praktikum verzahnt, baut aufeinander auf (10)
- Praktikum greift Probleme aus Vorlesung und Hausaufgaben auf, ausgehend von der Problemstellung, nicht vom Beweis (6)
- Herrn Wellers Erfahrungen, Tipps und Tricks aus und für den Schulalltag (2)
- Praktikum mit viel Mühe und Geduld durchgeführt, gute ausführliche, individuelle Erklärungen (3)
- Verschiedene Übungs- und Praktikumstermine helfen bei der Abstimmung des Stundenplans (2)

Wochenendseminar Freusburg

- Freusburg-Wochenende zum besseren Kennenlernen (7)
- Freusburg-Wochenende Thematik Mathematik im Unterricht (3)
- Einblick in das Siegener Analysis-Projekt (3)

Hat mir nicht gefallen / noch zu verbessern / sonstige Anmerkungen

Inhalte, Aufbau, Organisation

- Vorlesungszeiten, Überschneidungen mit anderen Veranstaltungen (3)
- Viele Themen, die man im Studium behandelt braucht man später als Lehrer nicht; Schulstoff in zwei Wochen Studium durchgenommen (3)
- zu viel Stoff, zu viele Einzelheiten,
- Zu viele Beispiele, zu wenig Beweise / Beweise zu oberflächlich
- Insgesamt ist das Studium sehr (zu) zeitaufwändig.
- Test am Anfang deprimierend
- Ehrgeiz hielt nur ca. die ersten drei Wochen
- Verbesserungsvorschlag (nicht für Prof. Beutelspacher): Nach einer Frage loben („Das ist eine gute Frage!“) und dann die Frage beantworten.
- Portfolio nicht gut, da Mathe-Physik-Studium, nicht um Aufsätze zu schreiben
- Portfolio-Themen zu einfach
- Punkte für das Forum auch im zweiten Semester um Beteiligung aufrecht zu erhalten
- Teilnahme am Freusburg-Wochenende war seitens der Studierenden zu gering, Studierende zu Ihrem Glück „zwingen“
- Gelernt und Stoff bestanden, aber nicht durch die Vorlesung oder Übungen, sondern durch die Lerngruppen vor den Klausuren

Vorlesung

- Vorlesung und Praktikum besser verzahnen, keine Vorlesungsinhalte vorwegnehmen (Determinanten …), gleiche Bezeichnungen verwenden (12)
- Zusammenhang der Vorlesungsinhalte mit der Schulmathematik klarer herausstellen und verdeutlichen (4)
- Besser: Aufgaben, die Schülern gestellt werden betrachten und von diesen Aufgaben ausgehend die Hintergründe erklären, um Praxisbezug und Verschmelzung von Schul- und Uni-Wissen zu erreichen.
- Vorlesung gerade im zweiten Semester: Beweise nicht annähernd nachvollziehbar, ständig aufpassen, sonst hat man den Anschluss verloren
- Zu viele Beispiele, zu wenig Beweise / Beweise zu oberflächlich (2)
- Vorlesungszeiten, Überschneidungen mit anderen Veranstaltungen (3)
- Folien früher ins Netz stellen (3)
- Folien zum Teil unübersichtlich, Zusammenhang (Schreibweise) an Tafel sollte zu Folien passen, Tippfehler auf Folien
- Leere Folien, wenn klar ist, dass ein Beweis in der Vorlesung eingefügt werden soll.
- Lösungshinweise zu den Aufgaben im Buch Lineare Algebra überarbeiten
- Vertretung des Professors in der Vorlesung durch Mitarbeiter zum Teil nicht optimal: weniger verständlich, Absprache was bereits behandelt wurde
- Hörsaal zu groß
- Tempo deutlich zu langsam
- Darstellungsmatrizen veranschaulichen (ggf. mit Kreidebildern von Projektionen einer Erdkugel etc. erklären, siehe http://my.opera.com/gennafaith/albums/show.dml?id=27777)

Praktikum

- Praktikum und Vorlesung besser verzahnen, keine Vorlesungsinhalte vorwegnehmen (Determinanten …), gleiche Bezeichnungen verwenden (13)
- Im Praktikum (besonders am Anfang) langsamer vorgehen (4)
- Mehr Punkte für Praktikum oder Praktikum bzw. Hausaufgaben im Praktikum (besonders am Anfang) weniger zeitaufwändig. (7)
- Notwendigkeit des „freiwilligen" Praktikums für Studierende zu diesem Zeitpunkt noch nicht vordergründig – zeitliche Belastung (3)
- Im Praktikum wird von den Studierenden manchmal nur das jeweilige Schema oder der jeweilige Befehl ohne Verständnis für die Mathematik angewendet.
- Vorbereitung der Gruppenarbeiten auf der Freusburg noch besser organisieren – Gruppen so einteilen, dass von jeder Gruppe jemand zur Präsentation dort ist und auch die Unterlagen hat
- Darstellungsmatrizen veranschaulichen (ggf. mit Kreidebildern von Projektionen einer Erdkugel etc. erklären, siehe http://my.opera.com/gennafaith/albums/show.dml?id=27777)

Übungen, Hausaufgaben, Klausuren

- Lösung der Hausaufgaben teilweise erst am Montag nach der Vorlesung oder Dienstag nach den Übungen möglich, besser wäre am Wochenende (4)
- Lerngruppenbildung mehr unterstützen (Teil der Aufgaben in Gruppen bearbeiten lassen)
- Benachteiligung durch unterschiedliche Tipps zu den Klausuren, unterschiedliches Übungsgruppentempo, unterschiedliche Vergabe der Mitarbeitspunkte in Übungen (3)
- Präsensaufgaben sollten im ersten Semester die Hausaufgaben noch mehr vorbereiten
- Hausaufgaben teilweise zu schwierig bzw. dann zu zeitintensiv (5)
- Schwierigkeiten gerade am Anfang:
  - Vgl. zur Schule: viel mehr Stoff in kürzerer Zeit
  - Aufgaben nachvollziehen, aber nicht selbst lösen können
  - war nicht mgl. Wissen aus Vorlesung auf Aufgaben zu übertragen
- Übungen und Hausaufgaben zu leicht gemacht (im Vergleich zu anderen und kommenden Veranstaltungen), große Umstellung für drittes Semester
- Bei Hausaufgaben mehr Punkte auf die Idee als auf die Umsetzung geben (2)
- Übungsaufgaben zu kleinlich korrigiert
- Kleine Abweichungen in der Bewertung der Hausaufgaben
- Abschreiber bei den Hausaufgaben werden belohnt, da sie sich die Vorlagen der Besten heraussuchen und abschreiben. (2)
  Lösung: bei offensichtlichem Abschreiben 0 Punkte geben und Klausuren stärker gewichten
  Lösung: Die HA-Punkte sind nur zu 60% zu erreichen. Das entspricht 20 Modulpunkten, alles weitere verfällt.
- Manche haben sich Tipps zu den Hausaufgaben in der Mittwochs-Lerngruppe oder direkt bei Jörn geholt (Benachteiligung der anderen) (2)
- Tipps zu Hausaufgaben im Forum nicht optimal, da nicht jeder einen Internetzugang hat
- Alle Übungsgruppenleiter sollten ähnlich viele Tipps zu den Hausaufgaben geben
- Witze und Knobelaufgaben auf den Übungsblättern abwechseln (nicht ein Semester Witze, eines Knobelaufgaben)
- Knobelaufgaben besprechen
- Manchmal zu wenig Zeit in den Übungen (3)
- Mehr vorbereitende Unterstützung (Tipps) zur Lösung der Hausaufgaben
- Schwierigkeiten bei der formalen Formulierung der Hausaufgaben durch Tipps in den Übungen vermeiden (3)
- Letzte Übungsstunde vor der Klausur zur Wiederholung nutzen
- Klausuren am Samstag, Klausur nach dem Eröffnungsspiel
- Zusammenhang der Übungsaufgaben und Vorlesung im ersten Semester verdeutlichen (2)
- Noch mehr Studierende vorrechnen lassen
- Hausaufgaben sind lästig

Analytische Geometrie und Linearen Algebra II

Evaluation

Evaluierung SS06/FB07/Mathematik – Übersicht Evaluierung

Autor: Dipl.-Math. Jörn Schweisgut, erstellt: 2006-06-20 12:24:27, Beschreibung: Anonymes Standardevaluierungsformular FB07/Mathematik

Abgegebene Bewertungen: 31

Schlüssel: Bachelor Chemie(0),Bachelor Materialwissenschaften(1),Bachelor Physik(2),Diplom Chemie(3),Diplom Geographie(4),Diplom Mathematik(5),Diplom Physik(6),L1(7),L2(8),L3(9),L5(10),Anderes(11)

Frage	**0** (%)	**1** (%)	**2** (%)	**3** (%)	**4** (%)	**5** (%)	**6** (%)	**7** (%)	**8** (%)	**9** (%)	Σ (%)
Bitte geben Sie Ihr Studienziel an	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	100

Schlüssel: 1(0),2(1),3(2),4(3),5(4),6(5),7(6),8(7),9(8),10(9),11(10),12(11),13(12),14(13)

Frage	**0** (%)	**1** (%)	**2** (%)	**3** (%)	**4** (%)	**5** (%)	**6** (%)	**7** (%)	**8** (%)	**9** (%)	Σ (%)
Bitte geben Sie hier Ihr Fachsemester an	0	77	3	13	3	0	0	3	0	0	100

Schlüssel: trifft völlig zu(0),trifft ziemlich zu(1),teilsteils(2),trifft wenig zu(3),trifft gar nicht zu(4)

Frage	**0** (%)	**1** (%)	**2** (%)	**3** (%)	**4** (%)	Σ (%)
Sicht und Akustik im Hörsaal waren gut.	39	52	10	0	0	100
Es war ruhig und man konnte der Vorlesung konzentriert folgen.	19	58	19	3	0	100
Tafelbild, Folien etc. waren deutlich und übersichtlich.	52	35	13	0	0	100
Das Vortragstempo ließ Mitschreiben zu.	45	35	13	3	0	96
Die Vorlesung war klar strukturiert.	52	39	6	3	0	100
Der Stoff wurde gut erklärt.	39	35	16	10	0	100
Verständnisfragen wurden ausführlich beantwortet.	42	29	29	0	0	100
Die Vorlesung war interessant und regte zu weiterer Beschäftigung mit dem Thema an.	10	29	45	13	3	100
Literaturangaben, Skript oder andere Hilfen ermöglichten ein Nacharbeiten des Stoffes.	39	45	6	6	0	96
Lernmittel waren ausreichend vorhanden.	23	45	19	3	0	90
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben war angemessen.	0	100	0	0	0	100
Die Aufgaben wurden gut korrigiert.	100	0	0	0	0	100
In den Übungen wurden Lösungen bearbeiteter Aufgaben ausführlich besprochen.	10	39	39	6	0	93
In den Übungen wurden Fragen gut beantwortet.	10	61	16	3	0	90
Die Übungen haben geholfen, den Vorlesungsstoff besser zu verstehen.	35	35	13	3	0	87

Frage	**0** (%)	**1** (%)	**2** (%)	**3** (%)	Σ (%)
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben war angemessen.	19	32	39	0	90
Die Aufgaben wurden gut korrigiert.	32	42	16	3	93
Die Lösungen bearbeiteter Aufgaben wurden ausführlich besprochen.	10	19	39	23	90
Die Aufgaben haben geholfen, den Vorlesungsstoff besser zu verstehen.	13	55	16	6	90
Die Übungen haben die Fähigkeit zur Lösung mathematischer Aufgaben verbessert.	87	13	0	0	100

Evaluierung SS06/FB07/Mathematik – Freie Antworten Evaluierung

Autor: Dipl.-Math. Jörn Schweisgut, erstellt: 2006-06-20 12:24:27, Beschreibung: Anonymes Standardevaluierungsformular FB07/Mathematik

Wie oft ließ sich der Dozent in der Vorlesung vertreten?

- Selten (25×)
- Häufig (5×)
- Nie (1×)

Wie oft waren Sie in der Vorlesung?

- Immer (20×)
- Häufig (10×)
- Selten (1×)

Die Aufgaben wurden gut korrigiert.:kann ich nicht beurteilen

- immer (22×)
- meistens (5×)
- selten (2×)
- nie / es gab keine (2×)

Analytische Geometrie und Linearen Algebra II

Klausuren

Name, Vorname **Übungsgruppe**

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

10.06.2006

1. Klausur zur AGLA II

1. Sei f die folgende Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$:

$$f : (x, y) \mapsto (-6x + 8y, x + y).$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen ${}_BM_C(f)$ und ${}_CM_B(f)$ mit $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ und $C = \{(2, -1), (-4, 1)\}$.

2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig (r), welche sind falsch (f)?
Kreuzen Sie Ihre Antwort an.
Beachten Sie: für eine richtige Antwort gibt es 1 Punkt. Für eine falsche Antworte gibt es 1 Punkt Abzug. Sie erreichen aber auf jeden Fall 0 Punkte bei dieser Aufgabe.

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $w_i := f(v_i)$.

(r)	(f)	**Aussage**
		Wenn f injektiv ist, so sind $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig.
		Wenn f surjektiv ist, so ist $\{w_1, \ldots, w_n\}$ ein Erzeugendensystem von W.
		Wenn $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, ist f injektiv.
		Wenn $\{w_1, \ldots, w_n\}$ ein Erzeugendensystem von W ist, ist f surjektiv.
		Genau dann ist $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von W, wenn f bijektiv ist.

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig (r), welche sind falsch (f)?
Kreuzen Sie Ihre Antwort an.
Beachten Sie: für eine richtige Antwort gibt es 1 Punkt. Für eine falsche Antworte gibt es 1 Punkt Abzug. Sie erreichen aber auf jeden Fall 0 Punkte bei dieser Aufgabe.

(r)	(f)	**Aussage**
		Jede Permutation kann als Produkt von disjunkten Zyklen geschrieben werden.
		Die $n-$fache Hintereinanderausführung (für $n \geq 1$) einer geraden Permutation ist gerade.
		Die $2n-$fache Hintereinanderausführung (für $n \geq 1$) einer ungeraden Permutation ist gerade.
		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (14)(15)(13)(2)$
		$\lvert S_6 \rvert = 720$

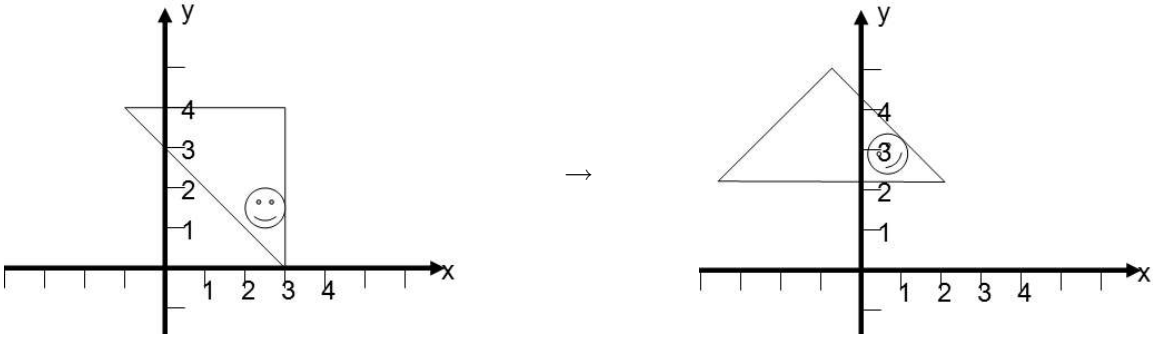
4. Ist diese Menge ein kommutativer Ring mit Einselement (mit Begründung)?

(a) $\{a \cdot \sqrt{5} + b \cdot \sqrt{20} + c | a, b, c \in \mathbb{Z}\}$

(b) $\{a \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + b | a, b \in \mathbb{Z}\}$

5. Bestimmen Sie ein Polynom, welches das von $x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18$ und $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ erzeugte Ideal von $\mathbb{R}[x]$ erzeugt.

6. (a) Bestimmen Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die vom linken auf das rechte Bild abbildet:



(b) Bestimmen Sie Kern und Bild von f (mit Begründung).

Hinweise zur Klausur

- Es sind lediglich ein Lineal und ein nicht-programmierbarer Taschenrechner als Hilfsmittel zugelassen.
- Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem extra DIN-A4 Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt - auch dieses hier - mit Ihrem Namen und dem Ihrer Übungsgruppenleiterin / Ihres Übungsgruppenleiters.
- Geben Sie Ihre Bearbeitung nach Aufgaben sortiert ab.
- Sie können bei jeder Aufgabe fünf Punkte erreichen. Gewertet werden die fünf besten Aufgaben!

Name, Vorname **Übungsgruppe**

Prof. Dr. A. Beutelspacher
Jörn Schweisgut

15.07.2006

2. Klausur zur AGLA II

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom der reellen $3 \times 3-$Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Ist M diagonalisierbar (mit Begründung)? Geben Sie ggf. eine Diagonalform von M an.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der reellen $3 \times 3-$Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Ist M diagonalisierbar (mit Begründung)? Geben Sie ggf. eine Diagonalform von M an.

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig (r), welche sind falsch (f)?
Kreuzen Sie Ihre Antwort an.
Beachten Sie: für eine richtige Antwort gibt es 1 Punkt. Für eine falsche Antworte gibt es 1 Punkt Abzug. Sie erreichen aber *mindestens* 0 Punkte bei dieser Aufgabe.

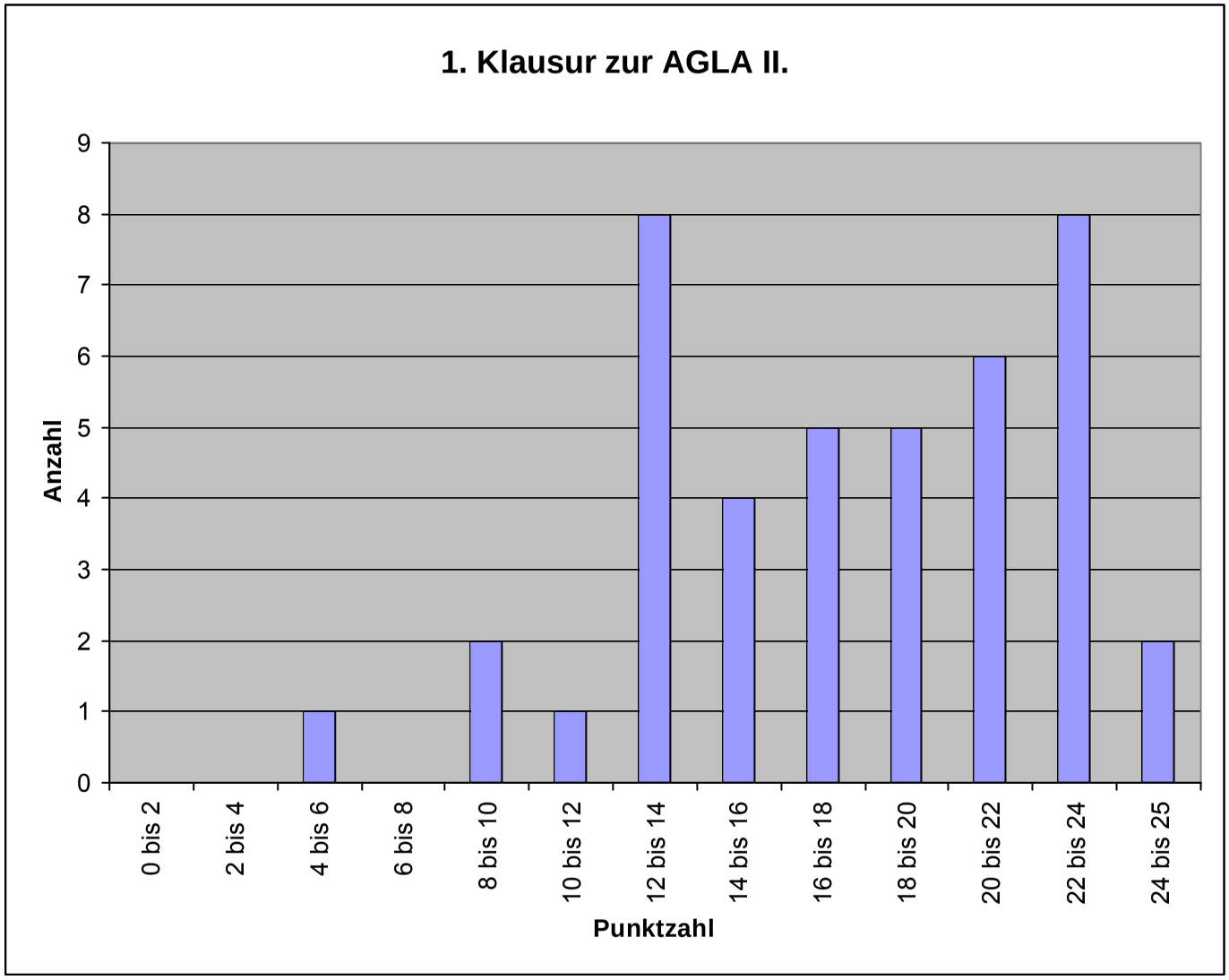
(r)	(f)	**Aussage**
		Der Nullvektor kann Eigenvektor sein.
		0 kann Eigenwert sein.
		Das vom charakteristischen Polynom erzeugte Ideal ist in dem vom Minimalpolynom erzeugten Ideal enthalten.
		Jede Nullstelle des Minimalpolynoms hat Vielfachheit 1.
		Es sei $A \in K^{n \times n}$. Besitzt A einen Eigenwert k, so hat A^2 einen Eigenwert k^2.
		Das Minimalpolynom einer linearen Abbildung kann das Nullpolynom sein.

4. Es seien A und B reelle $n \times n-$Matrizen und $A = B + k \cdot E_n$ für ein $k \in \mathbb{R}$.
Wie hängen die Eigenwerte von A und B zusammen?

5. Betrachten Sie die Vorschrift $< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$ und weisen Sie die Linearität in der zweiten Komponente explizit nach.

6. Es sei V ein $\mathbb{R}-$Vektorraum f eine lineare Abbildung auf V mit den Eigenwerten 2 und 32.
Es sei $g = f^3 + 5f^2 - 17f + 3$. Bestimmen Sie einen Eigenwert der Abbildung g.

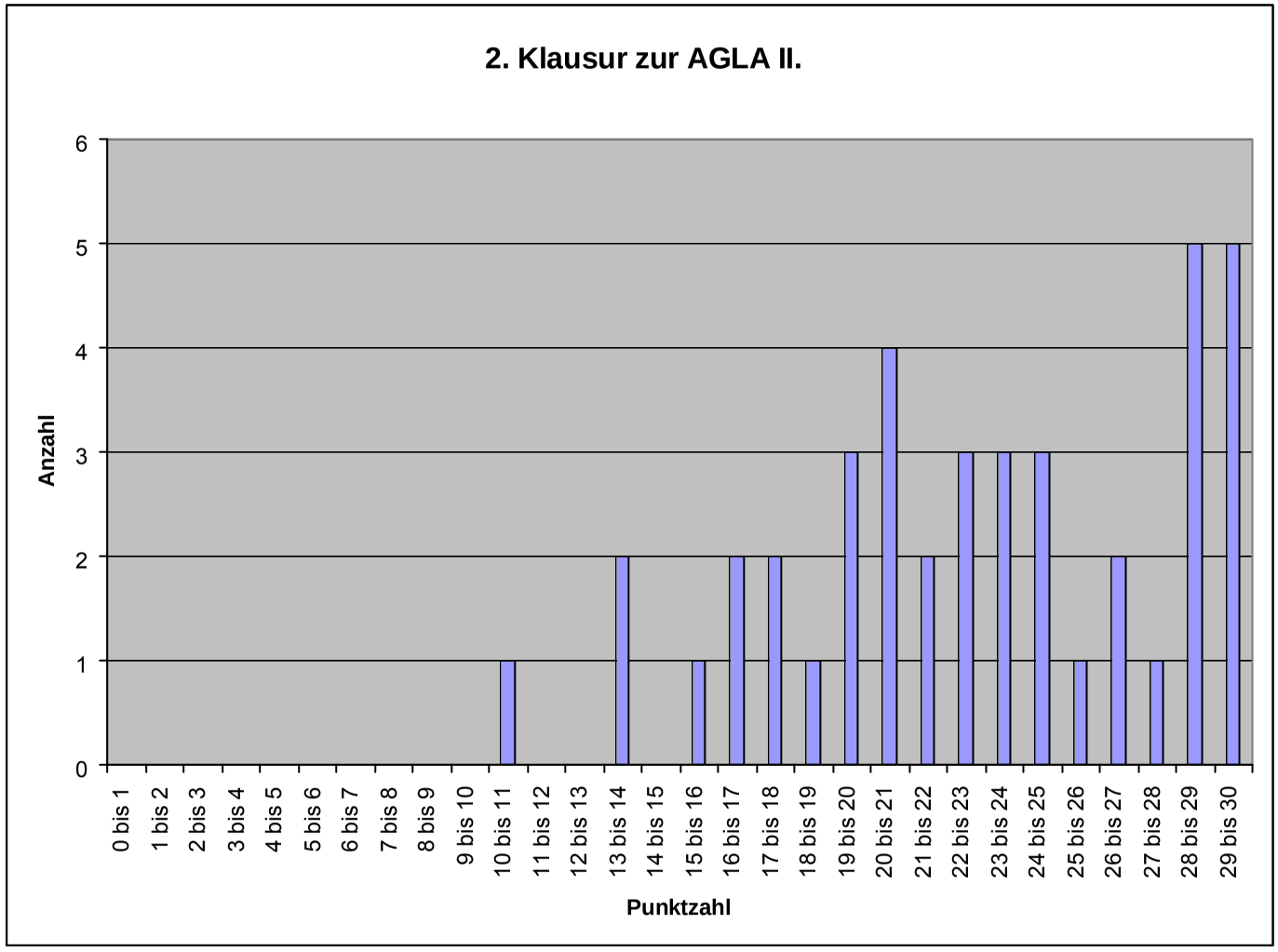
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem extra DIN-A4 Blatt und geben Sie Ihre Bearbeitung nach Aufgaben sortiert ab.
- Versehen Sie jedes Blatt - auch dieses hier - mit Ihrem Namen und dem Ihrer Übungsgruppenleiterin / Ihres Übungsgruppenleiters.
- Sie können pro Aufgabe sechs Punkte erreichen. Gewertet werden die fünf besten Aufgaben!



42 Abgaben

17,6 Mittelwert

70,5% Mittelwert in %



41 Abgaben

22,5 Mittelwert
75,0% Mittelwert in %

Zwischenbericht

Erstes Projektjahr

„Mathematik Neu Denken“

Ein Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt

gefördert durch die

Deutsche Telekom Stiftung

Siegener Teilprojekt

Leitung: Prof. Dr. R. Danckwerts

Oktober 2006

Wissenschaft am Beispiel der „Deutschen Mathematik“ von Volker Peckhaus[3] gibt eine Übersicht über die Kontroverse zwischen den Mathematikprofessoren Ludwig Bieberbach, einem aktiven Mitglied der NSDAP und ideologischen Führer der Bewegung um die „Deutsche Mathematik“, und dem jüdischen Mathematiker Edmund Landau. Getragen wird der Konflikt von der Definition der „Deutschen Mathematik“ als angewandter Mathematik, während die abstrakte Mathematik mit der Rassenideologie des Nationalsozialismus verknüpft und als „losgelöste Gehirnakrobatik“ diffamiert wird. Die Aufgabe der Studierenden bestand darin, die Begriffe der „Deutschen“ und der „Nicht-Deutschen Mathematik“ auf Basis des Textes gegeneinander abzugrenzen und die Folgen einer solchen Trennung für den schulischen und den universitären Mathematikunterricht herauszufiltern. Diese Analyse führte schließlich in den Arbeiten der Studierenden zu einer begründeten eigenen Auseinandersetzung in der Frage nach dem Verhältnis von abstrakter zu angewandter Mathematik.

Eine weitere Übungsaufgabe, deren Bearbeitungszeitraum mehrere Wochen umfasste beschäftigte sich mit der Rezension ausgewählter mathematischer oder mathematikdidaktischer Zeitschriften. Nicht nur in der Mathematik, sondern in den Wissenschaften insgesamt sind Zeitschriften die Organe, die die neusten Forschungsergebnisse publizieren. Daher erschien es sinnvoll, dass sich die Studierenden möglichst frühzeitig mit denen für das eigene Fach relevanten Zeitschriften auseinandersetzen, um schließlich bei eigenen Forschungsarbeiten auf das vorhandene Wissen zurückgreifen zu können. Außerdem bieten Zeitschriften, auch wenn man sie nur sporadisch liest, die Möglichkeit, über den Rahmen von Vorlesungen und Seminaren hinaus eigene Standpunkte in aktuellen wissenschaftlichen Diskussionen zu entwickeln. Für die Studierenden wurde eine Liste[4] mit Zeitschriftenvorschlägen erarbeitet, die besonders für Lehramtsstudierende geeignet erschienen. Mathematikdidaktische Zeitschriften hatten dabei eine herausragende Stellung, aber auch im Sinne der Projektidee und des Forschungsschwerpunktes Geschichte und Philosophie der Mathematik wurden weitere Zeitschriften empfohlen, die die Forschung auf diesen Gebieten reflektieren. Um die Rezensionen der Studierenden, die diese in Kleingruppen zu zweit oder dritt erarbeitet hatten, in einem Reader[5] zusammenfassen zu können, wurden strukturelle Vorgaben gemacht, die folgenden Aufbau vorsahen: 1.) Allgemeine Hinweise

---

[3] Peckhaus, V. (1984)

[4] American Journal of Mathematics, American Mathematical Monthly, Archive for the history of exact Sciences, British Journal for the Philosophy of Science, Centaurus, Der Mathematikunterricht, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Educational Studies in Mathematics, Elemente der Mathematik, Historia Mathematica, Isis, Jahresberichte der DMV, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Journal für Mathematikdidaktik, Mathematik Lernen, Mathematische Annalen, Mathematische Semesterberichte, Mitteilungen der DMV, Praxis der Mathematik, Scripta Mathematica, Stochastik in der Schule, Studies in History and Philosophy of Science, The mathematical gazette, The mathematical intelligencer, Vivarium

[5] Der Reader, der über 50 Seiten umfasst, wurde für die Studierenden zu Beginn des Wintersemesters bereitgestellt.

Termine	Themen der Sitzungen
Moderation durch den Dozenten:	
03.04. 07.04.	Annäherung an das Seminarthema: Warum sollte man (will ich) Analysis unterrichten? Didaktik der Analysis - Was könnte (sollte) das sein?
10.04.	Organisatorisches zu den Seminarbeiträgen und den zu erstellenden Ausarbeitungen
Themenblöcke, Moderation durch Studierende:	
21.04. 24.04.	Wie wird der Ableitungsbegriff in ausgewählten Materialien behandelt?
28.04. 05.05.	Wie wird das Thema Extremwertprobleme in ausgewählten Materialien behandelt?
08.05. 12.05.	Analysisunterricht in fachdidaktischer Perspektive – Die Winterschen Grunderfahrungen
15.05. 19.05.	Das Thema Ableitung – in einem neuen Licht ?!
22.05. 29.05.	Das Thema Extremwertprobleme – in einem neuen Licht ?!
09.06. 12.06.	Kurvendiskussion – soll hier diskutiert werden?
12.06. 16.06.	Der Integralbegriff – Aspektreichtum in Grund- und Leistungskursen?
19.06. 23.06.	Analysis in die Schule! – Ein langer Weg bis zu den aktuellen Richtlinien
23.06. 26.06.	Ein Blick in die Zukunft: Zentralabitur in Analysis
30.06. 03.07.	Ein Blick in die Praxis: Analysis-Lehrern auf den Zahn gefühlt
Moderation durch den Dozenten:	
07.07. 10.07.	Reflexionsphase und Veranstaltungsevaluation

Methodisch durchzog wiederum das Prinzip der eigenaktiven Wissenskonstruktion in sozialen Aushandlungsprozessen die „Didaktik der Analysis“. Angeleitet durch sorgfältig ausgearbeitete Hinweise zur Vorbereitung und Leitung[7] der jeweiligen Seminarsitzungen lag deren Gestaltung weitestgehend in den Händen der Studierenden. Sie waren angehalten, kooperative und konstruktive Lernumgebungen zu schaffen und zu moderieren. Die Bündelung durch den Dozenten erfolgte dabei nur äußerst sparsam und wohldosiert.

[7] Sämtliche schriftlichen Hinweise zur Vorbereitung und Leitung der Seminarsitzungen befinden sich im Anhang.

Ein umfangreiches Betreuungsangebot durch Mitarbeiter und Tutoren, die die Studierenden insbesondere bei der Vorbereitung der Sitzungen unterstützten und die Erstellung der Seminarausarbeitungen begleiteten, sowie ein passendes Textbuch[8], das pünktlich zum Semesterbeginn als Neuerscheinung zur Verfügung stand, rundeten das Angebot für die Studierenden ab.

3.2.2 Ergebnisse

Im Laufe des Semesters wurden zur Veranstaltung „Didaktik der Analysis“ zwei Erhebungen durchgeführt, die beide sowohl quantitative als auch qualitative Anteile enthielten. Die erste Erhebung (Zwischenerhebung), an der alle 37 Studierenden beteiligt waren, fand etwa zur Mitte des Semesters statt und war als allgemeines Stimmungsbarometer der „Didaktik der Analysis“ gedacht.

Die zweite Erhebung (Enderhebung) in der letzten Semesterwoche diente der abschließenden Evaluation der Veranstaltung. Es nahmen nur noch 26 von 37 Studierenden teil. Auffallend ist die geringe Teilnehmerzahl der letzten Befragung. Aufgrund der Nähe der Semesterferien und der noch anstehenden Prüfungen sank gegen Ende des Semesters die Bereitschaft zur Teilnahme an der Veranstaltung und damit auch an der Erhebung. Trotz mehrmaliger Bitte per E-Mail, den als Anhang beigefügten Fragebogen später auszufüllen und zurückzusenden, konnten kaum zusätzliche Erhebungsdaten gewonnen werden. Auch schien sich aufgrund der Vielzahl der Befragungen, die die Studierenden über sich „ergehen“ lassen mussten, eine generelle „Evaluationsmüdigkeit“ eingestellt zu haben. Bei der Interpretation der Evaluationsergebnisse muss daher eine mögliche Verfälschung durch eine positive Auslese der engagierteren Studierenden in Betracht gezogen werden.

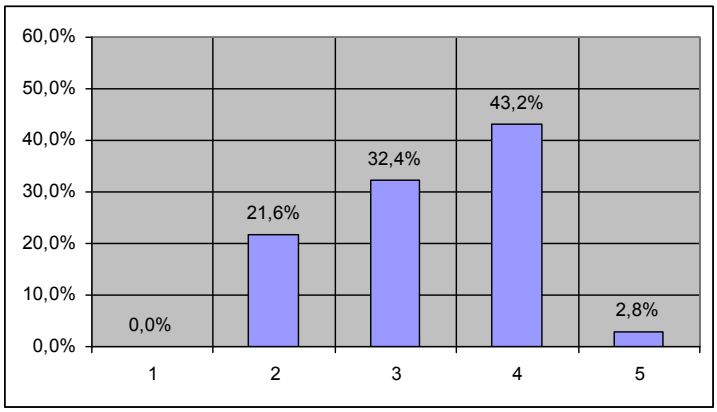
Ergebnisse in fachinhaltlicher Hinsicht

Zentraler inhaltlicher Aspekt der „Didaktik der Analysis“ war die Ausbildung eines Standpunktes zu schulanalytischen Inhalten. Durch die Kenntnis geeigneter fachdidaktischer Kriterien sollte Urteilskraft für die eigene begründete Planung von Fachunterricht gewonnen werden. Die Zwischenerhebung ergab allerdings deutliche Diskrepanzen zwischen dieser intendierten Zielsetzung und der Erwartungshaltung von Studierendenseite, wie den Tabellen 1 und 2 sowie Graphik 1 entnommen werden kann:

[8] Danckwerts,R. / Vogel, D. (2006)

Behandlung konkreter, methodisch-inhaltlicher Fragestellungen und Handlungsempfehlungen: Wie vermittle ich welchen Stoff am besten?	41,0 %
• Bildungswert der Analysis als Teil der Schulmathematik • Bedeutung im Rahmen des Allgemeinbildungsauftrages der Schule	29,0 %
• begründetet eine Auswahl der zu verhandelnden Inhalte treffen können • methodisches Vorgehen begründen und reflektieren lernen	28,0 %
Sonstiges	2,0 %
	100,0 %

Tabelle 1: Auswertung Item 1 (Zwischenerhebung): Was ist Ihrer Ansicht nach die zentrale Aufgabe einer Veranstaltung zur Didaktik der Analysis?



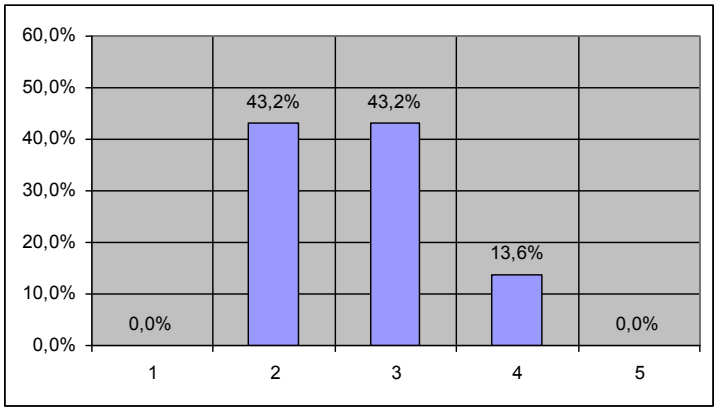
Graphik 1: Auswertung Item 2 (Zwischenerhebung): Deckt sich die Veranstaltung „Didaktik der Analysis“ mit diesen Vorstellungen ? (1: Nein, überhaupt nicht! - 5: Ja, immer!)

Geringer Konkretisierungsgrad / Überstrapazierung mancher Themenbereiche	66,7 %
Es fehlt die methodische Seite: Wie bringe ich Schülern später Mathematik bei?	20,0 %
Zu viele Rückgriffe auf die „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“	13,3 %
	100,0 %

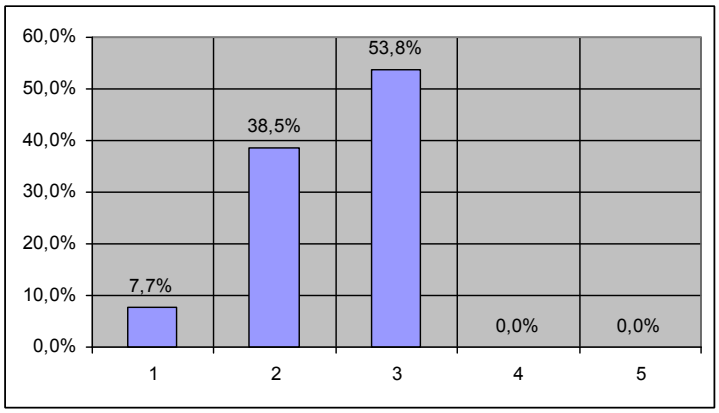
Tabelle 2: Auswertung Item 3 (Zwischenerhebung): Wenn eher nicht: Aus welchen Gründen?

Es zeigt sich, dass der Deckungsgrad zwischen den Erwartungen der Studierenden und der Umsetzung in der Veranstaltung allgemein recht hoch ist. Insbesondere wurde die Gewinnung eines Standpunktes als gewichtiges Ziel einer Didaktikveranstaltung erkannt. Die Abweichungen in der Deckung von Erwartungshaltungen und Zielsetzung des Seminars bestanden vor allem darin, dass sich ein Großteil der Teilnehmer konkrete methodische Anleitungen und Tipps für den Analysisunterricht erhoffte, die jedoch nicht Inhalt der „Didaktik der Analysis“ waren. Daneben wurde vor allem die scheinbare Wiederholung von in der „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ bereits behandelten Inhalten auf Kosten „neuer“ Themengebiete wie etwa des Zentralabiturs oder der Lehrerinterviews kritisiert. Die fachdidaktische Perspektive auf zuvor unter fachmathematischen Gesichtspunkten betrachtete Themen wurde von den Studierenden nicht im intendierten Maße als solche wahrgenommen und

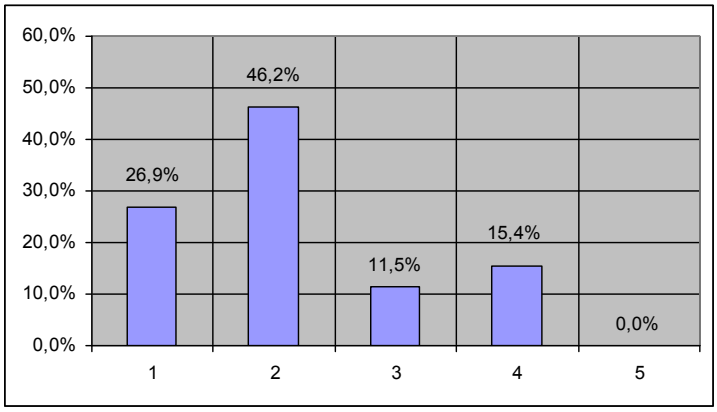
teilweise als „Behinderung“ angesehen. Folglich schätzten einige Teilnehmer Stoffumfang, Konkretisierungsgrad und Vorgehensgeschwindigkeit in der Veranstaltung als eher gering ein. Die diesbezüglichen Daten finden sich in den Graphiken 2, 3 und 4.



Graphik 2: *Auswertung Item 4 (Zwischenerhebung): Wie beurteilst Du die Veranstaltung hinsichtlich Stoffumfang, Tempo und Abstraktionsgrad ?* (1: zu wenig Stoff - 5: zu große Stoffülle)

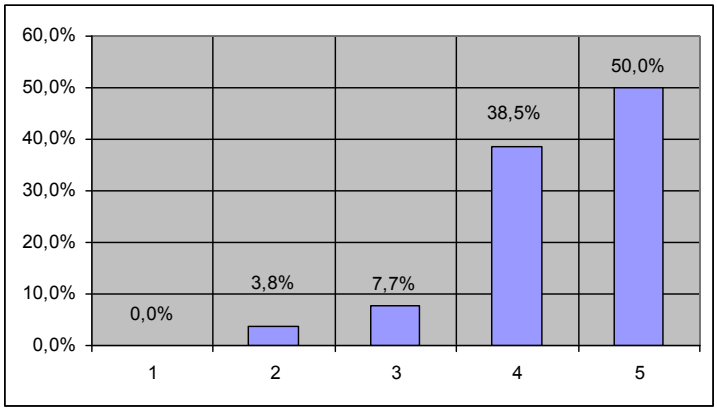


Graphik 3: *Auswertung Item 7.2 (Enderhebung): Wie beurteilst Du die Veranstaltung hinsichtlich Stoffumfang, Tempo, Schwierigkeitsgrad…?* (1: eher zu langsam - 5: viel zu schnell)

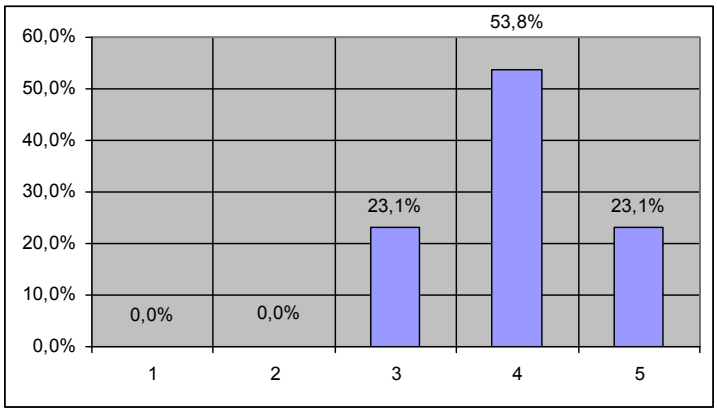


Graphik 4: *Auswertung Item 7.4 (Enderhebung): Wie beurteilst Du die Veranstaltung hinsichtlich Stoffumfang, Tempo, Schwierigkeitsgrad…?* (1: zu viele Wiederholungen - 5: Wiederholungen genau angemessen)

Trotz einiger Diskrepanzen zwischen der intendierten Zielsetzung der Veranstaltung und den Erwartungen der Studierenden ergibt sich ein eindeutiges Bild: Die „Didaktik der Analysis“ besaß für die Teilnehmer einen klaren Schul- und Unterrichtsbezug (Graphiken 5 und 6).



Graphik 5: *Auswertung Item 10 (Enderhebung): Wurden Bezüge zur Schulmathematik hergestellt ?* (1: Nein, überhaupt nicht! - 5: Ja, immer!)

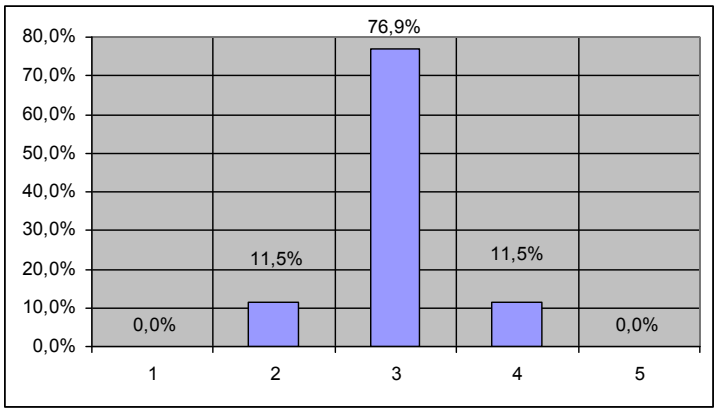


Graphik 6: *Auswertung Item 11 (Enderhebung): Ist Dir die schulpraktische Relevanz der behandelten Themen deutlich geworden (bspw. für die Auswahl und Begründung von Inhalten, das methodische Vorgehen im Unterricht oder generell für die unterrichtliche Praxis) ?* (1: Nein, überhaupt nicht! - 5: Ja, immer!)

Ergebnisse in methodischer und organisatorischer Hinsicht

Stärker noch als in der „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ und aufbauend auf den dortigen methodischen Erfahrungen wurde in der „Didaktik der Analysis“ der konstruktive, eigenaktive Anteil des Wissenserwerbs betont. Instruktive Anteile durch den Dozenten blieben bewusst auf ein Minimum reduziert (und wurden sehr wohldosiert eingesetzt). Angeleitet durch sorgfältig ausgearbeitete Leitfäden oblag die Gestaltung und Leitung der Themenblöcke ausschließlich den jeweils verantwortlichen Studierenden. Dabei wurde die begleitende intensive Betreuung und Hilfestellung durch die Tutoren und Mitarbeiter als sehr positiv empfunden.

Die große Mehrheit der Teilnehmer war mit dem Verhältnis zwischen instruktiven und konstruktiven Anteilen und damit mit der Betonung der eigenaktiven Wissenskonstruktion sehr zufrieden (Graphik 7); allerdings wurde die oft eingesetzte Gruppenarbeit hinsichtlich ihrer Effektivität und Einsatzhäufigkeit durchaus kritisch bewertet und eine größere Vielfalt an Sozialformen gewünscht.

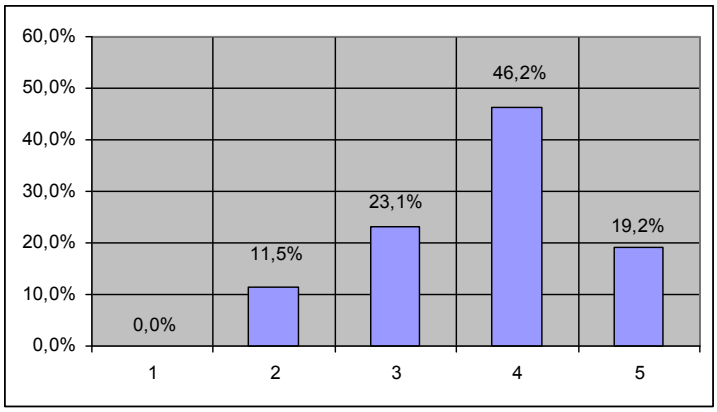


Graphik 7: Auswertung Item 17.2 (Enderhebung): Wie beurteilst Du das Verhältnis von Instruktion (durch Referenten / Dozenten) und Konstruktion (durch die Studierenden) ? (1: Hätte mir mehr Instruktion… - 5:…mehr Konstruktion gewünscht)

Wie die Interviews sowie zahlreiche informelle Gespräche mit den Studierenden ergaben, wurde, wie auch schon im ersten Semester, das soziale Miteinander in den Arbeitsgruppen, d.h. die Betonung und Förderung sozialer Lernprozesse, als ein großes Plus des Projekts angesehen, das zum Zusammengehörigkeitsgefühl der Studierendengruppe und zur frühen Identitätsstiftung als Lehramtsstudierende mit eigenen Bedürfnissen entscheidend beitrug. Insbesondere wurden die intensiven Diskussionen und der offenen Meinungsaustausch mit den Kommilitonen als bereichernd für die Wissenskonstruktion und das tiefere Verständnis empfunden (Tabelle 3 und Graphik 8, Enderhebung).

Diskussionen und Meinungsaustausch mit anderen	40,0 %
Förderung der Eigeninitiative, aktive Mitgestaltung der Sitzungen	28,0 %
Aspektreichtum der Veranstaltung	28,0 %
Sonstiges	4,0 %
	100,0 %

Tabelle 3: Auswertung Item 21 (Enderhebung): Was mir gefallen hat:

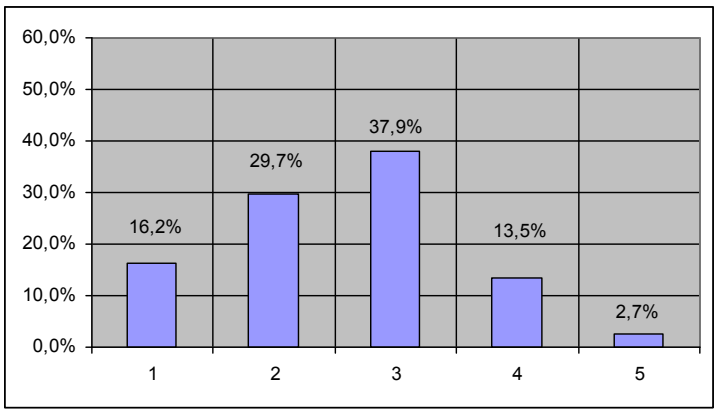


Graphik 8: Auswertung Item 18.2 (Enderhebung): Die Diskussionen in der Veranstaltung…
(1: haben zum tieferen Verständnis wenig… - 5: …viel beigetragen)

Kritisiert wurde allerdings der Zeitmangel in der Veranstaltung, der wohl auf eine zu optimistische Seminarplanung zurückzuführen ist. Einige Themenbereiche konnten somit nicht in der von den Studierenden gewünschten Tiefe bearbeitet werden. Insbesondere mussten, so die Aussagen vieler Teilnehmer, einige der für das Verstehen entscheidenden Diskussionen vorzeitig abgebrochen werden.

Auch fühlten sich viele Studierenden in den ersten beiden Themenblöcken durch die bewusst sehr offen gehaltene Anbahnung der Winterschen Grunderfahrungen[9] verunsichert und irritiert. Der offene Zugang sollte bei den Seminarteilnehmern gerade eine Spannung und somit ein stärkeres Bewusstsein dafür erzeugen, wie wichtig es ist, zur Beantwortung fachdidaktischer Fragen über adäquate Begriffe und „Werkzeuge“ zu verfügen. Allerdings wurde dieses „lange Hantieren mit unscharfen Begriffen und Definitionen“ bemängelt und ein stärkeres Eingreifen des Dozenten in den Diskussionsverlauf sowie eine explizitere Begriffsklärung und Bündelung gefordert (Graphik 9). Wie auch schon die Erfahrungen aus dem Forum im vergangenen Semester zeigten, kann eine zu frühe konsequente Umsetzung der Öffnung von Lernsituationen bei den Studierenden zu Orientierungslosigkeit führen und wird vielfach nicht im intendierten Maße als Chance zur aktiven Wissenskonstruktion aufgefasst.

[9] Die Winterschen Grunderfahrungen sind eine - in der Fachwelt stark favorisierte - Antwort auf die Frage nach dem Allgemeinbildungsauftrag des Faches Mathematik. Im Seminar wurden sie als ein wesentliches Werkzeug zur Beurteilung von Unterrichtsinhalten und -materialien und somit der Güte von Mathematikunterricht herausgearbeitet.



Graphik 9: Auswertung Item 12 (Zwischenerhebung): Würdest Du dir eine stärkere Bündelung durch den Dozenten wünschen ? (1: Ja! - 5: Nein!)

Fazit

Trotz der beschriebenen Kritikpunkte, die sich vor allem auf die erste Phase der Veranstaltung bezogen, wurde das Seminar von der großen Mehrheit der Teilnehmer eindeutig als Bereicherung und sinnvoller Baustein der Ausbildung professioneller Mathematiklehrer angesehen. Neben konkreten Bezügen zum Mathematikunterricht, also einer praxisrelevanten Ausrichtung, bot es vor allem Hilfestellung bei der Bildung eines eigenen Standpunktes für mathematikdidaktische und unterrichtliche Fragen. Der Lernfortschritt der Studierenden lag dabei nach eigenen Worten vor allem im Beitrag zu einer veränderten, kritischeren Sichtweise auf die Schulanalysis, im Klären von Zusammenhängen und im Herausarbeiten eines möglichen Kriterienkataloges zur Beurteilung von Inhalten und Materialien.

Wie auch schon im vorangegangenen Semester wurden das gute soziale Klima und das exzellente Betreuungsangebot hervorgehoben. Die Seminarteilnehmer fühlten sich durchweg gut aufgehoben und entwickelten eine ausgeprägte Gruppenidentität als Lehramtsstudierende mit eigenen Ansprüchen. Die Formen eigenaktiver Wissenskonstruktion und vor allem der intensive Austausch in Diskussionen und Arbeitsgruppen wurden als effektiv und sinnvoll angesehen und begrüßt.

Für den erneuten Durchlauf im zweiten Projektjahr ergeben sich die folgenden Möglichkeiten der Optimierung:

a) Themen- und Zeitplanung

Für das kommende Projektjahr sollte insbesondere die in diesem Durchlauf sehr optimistisch ausgelegte zeitliche Planung des Seminars überdacht werden. Die „Didaktik der Analysis“ war nach Konzeption eng an die fachinhaltliche Auseinandersetzung mit Schulanalysis angebunden, um den dort verhandelten Inhalten so früh wie möglich eine fachdidaktische Dimension geben zu können. Diese Anbindung kann noch

konsequenter genutzt werden. Die entstehenden Freiräume könnten vor allem den Diskussionsanteilen zugute kommen.

Zudem ist zu überlegen, verstärkt neue, d.h. nicht aus der „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ bekannte Aufgabenbeispiele und Probleme zu integrieren. Auf diese Weise könnte der Gefahr vorgebeugt werden, dass das spiralige Aufgreifen von inhaltlich Bekanntem zwecks didaktischer Orientierung als reine Wiederholung missverstanden wird. Die Studierenden haben, wie der Zwischenerhebung entnommen werden konnte, die Aufgabe einer „Didaktik der Analysis“ eben nicht in erster Linie darin gesehen, einen eigenen Standpunkt in fachdidaktischen Fragen zu gewinnen.

b) Methodische Organisation

Wenn auch die Förderung eigenaktiver und öffnender Anteile von den Studierenden grundsätzlich als sinnvoll angesehen und akzeptiert wird, so sollte dennoch über den Grad der Öffnung und das Verhältnis von Instruktion und Konstruktion nachgedacht werden. Eine zu starke Öffnung der Konstruktionsphasen wie etwa bei der Herausarbeitung der Winterschen Grunderfahrungen birgt die Gefahr von Verunsicherung und Orientierungslosigkeit. Obwohl die Seminarteilnehmer aufgrund ihrer Vorerfahrungen im ersten Semester mit derartigen Lern- und Arbeitsformen vertraut sein sollten, ist der Einfluss traditionell-methodischer Lernerfahrungen noch zu groß. Dies bestätigen insbesondere die für die Interviews ausgewählten Studierenden, die in Befragungen deutliche Defizite im Umgang mit Formen der Öffnung und Schülerorientierung von Unterricht erkennen lassen. In einem erneuten Durchlauf sollte daher der Einsatz öffnender Elemente behutsamer erfolgen und mehr konvergente Anteile integriert werden, also etwa konkretere Aufgabenstellungen und mehr Phasen der expliziten Bündelung und Reflexion.

3.3 Exkursion Mathematikum

Am 24.6.2006 fand ein gemeinsames Treffen der Projektgruppen Siegen und Gießen im Mathematikum in Gießen statt. Nach einer Begrüßung und Führung durch Prof. Beutelspacher konnten insbesondere die Siegener Studierenden, denen das Mathematikum zumeist noch unbekannt war, die verschiedenen mathematischen Exponate erforschen und auf diese Weise Mathematik anschaulich erleben, sowie Mathematik und mathematische Phänomene als wesentlichen Teil unserer Kultur und der uns umgebenden Wirklichkeit begreifen lernen. Für die Projektgruppe Siegen waren vor allem die zahlreichen Exponate mit Analysishintergrund von Interesse wie etwa

- Treppenhandläufe (Stetigkeit und Differenzierbarkeit fühlbar machen)
- Brachystochronen (schnellste Bahnen)
- Annäherung des Kreises über Vielecke

Nach einem gemeinsamen Mittagessen im Mathematikum hatten die Studierenden Zeit, sich informell über ihre Erfahrungen mit dem Projekt und die Veranstaltungen auszutauschen. Den Abschluss bildete ein Grillabend im Mathematischen Institut, der das soziale Miteinander abrundete.

3.4 Untersuchung zum „Mathematischen Weltbild“

Gestützt auf die Ergebnisse der mathematikdidaktischen belief-Forschung[10] insbesondere der letzten Jahre hat sich das sogenannte „Mathematische Weltbild“ als einer der wesentlichen Einflussfaktoren auf die Qualität mathematischer Lehr- und Lernprozesse herauskristallisiert. Das Mathematische Weltbild kann dabei als vielschichtiger Komplex „von Einstellungen gegenüber (Bestandteilen) der Mathematik“[11] verstanden werden und beinhaltet „subjektiv implizites Wissen über die Mathematik, das ein weites Spektrum an Vorstellungen umfaßt“[12] wie etwa Vorstellungen über das Wesen der Mathematik, über deren zentralen Inhalte und Aufgaben, über das Lernen oder über das Lehren von Mathematik.

Diese Einstellungen sind aus zwei Gründen von besonderem Interesse für die Mathematikdidaktik:

> *„Es spricht vieles dafür, daß diese sich wohl langfristig und beim Lernenden hauptsächlich in mathematischen Lehrprozessen aufbauen, wahrscheinlich wesentlich beeinflußt durch den Lehrenden und dessen „mathematical beliefs“. Umgekehrt beeinflussen diese „Weltbilder“ meist unreflektiert das Lernen von Mathematik und damit den gesamten Kontext, in dem Mathematik vom Schüler betrieben und erlebt wird, so daß hier nicht unproblematische Rückkoppelungen zu erwarten sind.“* [13]

Das Mathematische Weltbild kann somit zum einen als Filter betrachtet werden, der die mathematische Wahrnehmung steuert und so das eigene Lernen beeinflusst. Zum anderen aber werden die Einstellungen, sofern sie nicht revidiert oder zumindest relativiert werden, wieder in die unterrichtliche Praxis zurückgegeben. Sie bilden den Rahmen für den schulischen Umgang mit Mathematik, indem sie sowohl auf die mathematischen Interaktions- und Kommunikationsprozesse als auch auf die stoffliche und methodische Gestaltung des Mathematikunterrichts Einfluss nehmen. Auf diese Weise lassen sich von außen Rückschlüsse auf die mathematische Ausbildung des Lehrers ziehen.

Mathematische Einstellungen bauen sich nicht nur langfristig auf und sind äußerst veränderungsresistent; sie reproduzieren sich darüber hinaus selbst. Um diesem Kreislauf entgegenzuwirken bedarf es einer frühestmöglichen Ausdifferenzierung und Relativierung des mathematischen Weltbildes, das die Studierenden aus der Schule mitbringen. An diesem Punkt setzt das Projekt an, indem durch die Veranstaltungen und den dort stattfindenden Umgang mit dem Fach alte Denkmuster aufgebrochen werden sollen und zu einer Ausdifferenzierung der zumeist eingeschränkten Sicht auf die Mathematik angeregt wird.

---

[10] Siehe dazu etwa die Arbeiten von Tietze, Törner, Grigutsch oder Schoenfeld.
[11] Grigutsch, S. / Raatz, U. / Törner, G. (1998)
[12] Törner, G. / Grigutsch, S. (1994)
[13] Vgl. ebd.

Im Laufe des ersten Projektjahres fanden nun mehrere Evaluationen quantitativer und qualitativer Natur zur Erhebung des mathematischen Weltbildes und dessen Veränderung infolge des Projekts statt. Als quantitatives Instrument wurden Fragebögen eingesetzt, die zum großen Teil auf bereits bestehenden und erprobten belief-Erhebungen[14] basierten. Die Bögen umfassten 86 (Eingangserhebung mit Sozialdaten) bzw. 74 (Folgeerhebungen ohne Sozialdaten) Items, die zum Teil den von Grigutsch, Raatz und Törner bzw. Köller, Baumert und Neubrand in ihren jeweiligen Erhebungen herausgearbeiteten Dimensionen des mathematischen Weltbildes zugeordnet werden können[15]:

- **Formalismus-Aspekt**: Exaktheit mathematischen Denkens und Arbeitens
  Itembeispiel: *„Mathematik ist streng und logisch aufgebaut."*
- **Anwendungs-Aspekt**: Relevanz der Mathematik in vielen angewandten Bereichen
  Itembeispiel: *„Mir ist im Mathematikunterricht nur selten klar geworden, dass die dort behandelte Mathematik viel mit realen Anwendungen zu tun hat."*
- **Prozess-Aspekt**: Art und Weise erfolgreichen Lösens von Mathematikaufgaben
  Itembeispiel: *„Mathematikunterricht sollte Gelegenheit geben, Mathematik zu entdecken und zu erforschen."*
- **Schema-Aspekt**: Mathematik als bloße Anwendung mathematischer Algorithmen
  Itembeispiel: *„In der Mathematik kommt es darauf an, Regeln und Verfahren zu behalten und anzuwenden."*
- **Schemaorientierung**: Engführung der Lösungswege
  Itembeispiel: *„Der Lehrer weiß, wie es geht. Deshalb sollte er „falsche" Lösungsansätze von Schülern nicht weiter verfolgen."*

Zusätzlich erhoben wurden

- **Soziale Dimension von Mathematik:**
  Itembeispiel: *„Die Zusammenarbeit in Lerngruppen wird eher weniger wichtig sein, da jeder den Stoff ja für sich selbst erschließen und verstehen muss."*
- **Selbsteinschätzung/ Interesse**
  Itembeispiel: *„Mathematik ist mir in der Schule immer leicht gefallen."*
- **Erwartungen an das Studium**.
  Itembeispiel: *„Ich denke, dass das Studium mir dabei helfen wird, mich auf meinen späteren Beruf als Mathematiklehrerin/-lehrer optimal vorzubereiten."*

Bei der Zusammenstellung des Erhebungsbogens wurden die einzelnen Aspekte jeweils über Fragenkomplexe mit semantisch zusammengehörigen bzw. gegenteiligen Aussagen erfasst, die als Kontrollinstrument Rückschlüsse auf die Konsistenz des Antwortverhaltens und somit auf die Validität der Items ermöglichen sollten. Ähn-

---

[14] Grigutsch, S. / Raatz, U. / Törner, G. (1998)
Köller, O. / Baumert, J. / Neubrand, J. (2000)
Törner, G. / Grigutsch, S. (1994)

[15] Bzgl. der Beschreibung der Dimensionen des mathematischen Weltbildes: Vgl. Köller, O./ Baumert, J./ Neubrand, J. (2000)

liche Aussagen, so der Gedanke, würden von den Studierenden auch auf ähnliche Weise beantwortet.
Ergänzend zu den quantitativen Erhebungen wurden mit ausgewählten Studierenden leitfadengestützte Interviews[16] geführt, die sich insbesondere auf die Aspekte

- deine Erfahrungen mit Mathematik und das Lernen von Mathematik in der Schule
- dein früherer Mathematiklehrer
- deine Motivation für das Studium und deine Erwartungen
- dein Bild von Mathematik zu Beginn des Studiums und jetzt
- die Rolle der Veranstaltungen bei der Veränderung des mathematischen Weltbildes
- Sinnfragen (Wie stehst du zum Projekt insgesamt? Denkst du, das Projekt hilft dir,, dich auf deinen späteren Lehrerberuf optimal vorzubereiten?)

bezogen. Die befragten Studierenden bildeten dabei einen Querschnitt des Leistungsspektrums sowie des Spektrums der aktiven Teilnahme in den Veranstaltungen.

Ergebnisse und Fazit

Im Zuge der Auswertung wurde unter anderem jeweils eine Korrelationsanalyse der Erhebungsitems durchgeführt, die einen Anhaltspunkt für die Stärke des Zusammenhangs verschiedener Variablen liefern kann. Entgegen der Erwartung, semantisch ähnliche Aussagen würden auch in ähnlicher Weise von den Probanden beantwortet, erlaubten die Korrelationen in den meisten Fällen diesen Schluss jedoch nicht. Es zeigte sich, dass nur äußert wenige der zu einem Aussagenkomplex zugeordneten Aussagen konsistent beantwortet wurden. Vielfach differierte das Antwortverhalten selbst bei solchen Items, die sprachlich fast identisch formuliert waren - und das, obwohl der Fragebogen auf durchaus bewährten und erprobten Fragen basierte. Um aber im laufenden ersten Projektjahr die Erhebungsinstrumente nicht zu wechseln, fand das Instrument in dieser Form - abgesehen von den Sozialdaten der Eingangserhebung - in allen Erhebungen zum mathematischen Weltbild Verwendung.

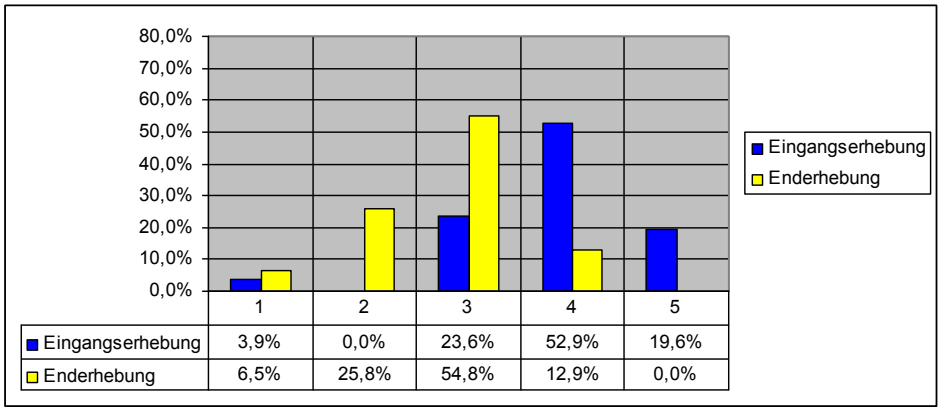
Deutlichere Rückschlüsse auf die durch das Projekt initiierten Ausdifferenzierungsprozesse im mathematischen Weltbild ließen allerdings die Interviews zu, die nach dem ersten Semester geführt wurden.

Insgesamt zeigt sich, wie Törner und Grigutsch[17] bereits vermuteten, dass sich Einstellungen und somit mathematische Weltbilder meist langfristig aufbauen. Sie können zudem, wie Berger[18] es beschreibt, eine gewisse Trägheit (inertia force) gegenüber Veränderungen aufweisen, die ihre Revidierung erschwert und verzögert. Die

[16] Die Transkripte der Interviews sind auf Anfrage erhältlich.
[17] Vgl. ebd.
[18] Vgl. Berger, P. (1999)

Ergebnisse der quantitativen Erhebungen scheinen dieses Bild zu bestätigen. Nur wenige Items bieten Anhaltspunkte für eine deutliche Ausdifferenzierung innerhalb des mathematischen Weltbildes. Dennoch lassen die Ergebnisse den Schluss zu, dass durch das Projekt Prozesse der Revidierung und Schwerpunktverlagerung des mathematischen belief-Systems angestoßen wurden.

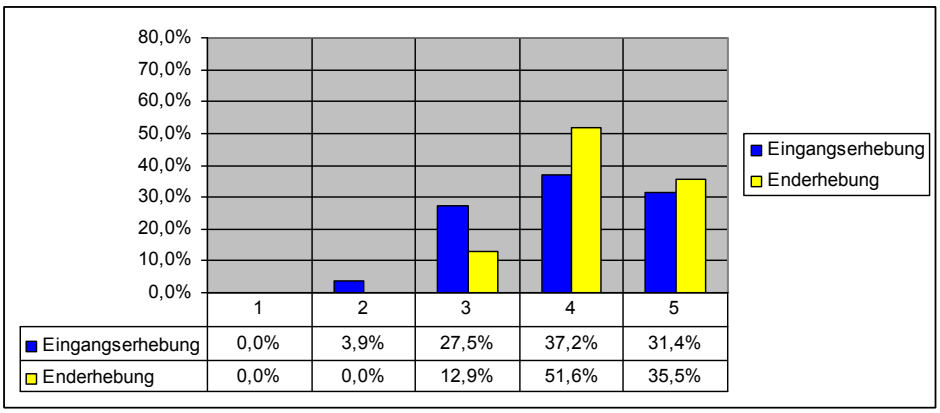
Besonders auffällig ist die Relativierung des im schulischen Mathematikunterricht oft vorherrschenden Schema-Aspekts zugunsten des Prozess-Aspekts von Mathematik. Dies betrifft vor allem die Baukasten-Sichtweise auf Mathematik als Fundus an Regeln und Verfahren, die man - auch unverstanden - zur Lösung von Problemen heranziehen kann (vgl. Graphik 10).



	1	2	3	4	5
Eingangserhebung	3,9%	0,0%	23,6%	52,9%	19,6%
Enderhebung	6,5%	25,8%	54,8%	12,9%	0,0%

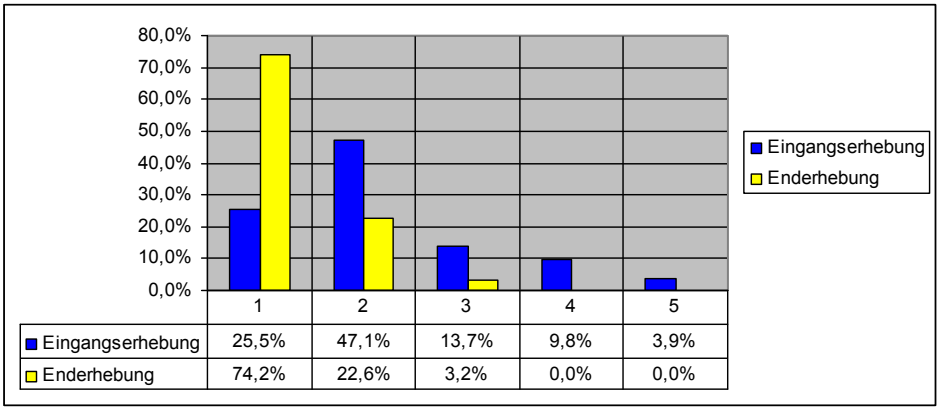
Graphik 10: Vergleich Item 6.5 Eingangserhebung – Enderhebung: In der Mathematik kommt es darauf an, Regeln und Verfahren zu behalten und anzuwenden. (1: trifft gar nicht zu… - 5: trifft voll zu)

Statt dessen tritt ein zunehmend verstehens- und prozessorientierter Blickwinkel in den Vordergrund, der das Betreiben von Mathematik als einen kreativen Akt versteht. Mathematisches Wissen wird dabei nur durch die eigenaktive und konstruktive Auseinandersetzung mit Mathematik erworben (vgl. Graphik 11). Eine solche Sichtweise fördert zudem die Einsicht in die Notwendigkeit der Individualisierung von Lehr- und Lernprozessen, wie aus Graphik 12 ersichtlich wird. Individuell verschiedene Hintergründe erfordern auch eine individuelle Herangehensweise an Mathematik.



	1	2	3	4	5
Eingangserhebung	0,0%	3,9%	27,5%	37,2%	31,4%
Enderhebung	0,0%	0,0%	12,9%	51,6%	35,5%

Graphik 11: Vergleich Item 6.13 Eingangserhebung - Enderhebung: Problemlösen ist ein kreativer Prozeß, für den bloßes Fakten- und Verfahrenswissen nicht ausreicht. (1: trifft gar nicht zu… - 5: trifft voll zu)



	1	2	3	4	5
Eingangserhebung	25,5%	47,1%	13,7%	9,8%	3,9%
Enderhebung	74,2%	22,6%	3,2%	0,0%	0,0%

Graphik 12: Vergleich Item 7.9 Eingangserhebung - Enderhebung: Da die Mathematik für alle Menschen gleich ist, kann sie auch für alle auf die gleiche Weise gelehrt werden. (1: trifft gar nicht zu… - 5: trifft voll zu)

Eng verbunden mit der Ausdifferenzierung prozessorientierter Aspekte des mathematischen Weltbildes ist die zunehmende Bedeutung der sozialen Dimension, also des kooperativen Lernens (vgl. Graphik 13). Lernen in sozialen Kontexten, Aushandlungsprozesse und Diskussionen mit Kommilitonen werden von den Studierenden dabei in zunehmendem Maße als Bereicherung und Hilfe für das Verstehen angesehen.