LUMIS – SCHRIFTEN

aus dem
Institut für Empirische
Literatur– und Medienforschung
der
Universität – Gesamthochschule
Siegen

Frank Eckgold und Dietrich Meutsch

GIS: DIE GRUPPEN-INNERHALB-STUFEN VARIANZ-ANALYSE ZUR REDUKTION VON FEHLERKOMPONENTEN. ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN, THEORIE UND DIE DESIGNS BIS ZUM 3FAKTORIELLEN FALL

LUMIS-Schriften 5 1984

LUMIS – PUBLICATIONS

from the
Institute for Empirical
Literature and Media Research
Siegen University

Herausgeber: LUMIS
Institut für Empirische Literatur- und Medienforschung

Zentrale wissenschaftliche Einrichtung der
Universität-Gesamthochschule-Siegen
Postfach 10 12 40
D-5900 Siegen

Tel.: 0271/740-4440

Redaktion: Raimund Klauser

Als Typoskript gedruckt

ISSN 0177 - 1388 (LUMIS-Schriften)

Frank Eckgold und Dietrich Meutsch

GIS: DIE GRUPPEN-INNERHALB-STUFEN VARIANZ-ANALYSE ZUR REDUKTION VON FEHLERKOMPONENTEN. ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN, THEORIE UND DIE DESIGNS BIS ZUM 3FAKTORIELLEN FALL

LUMIS-Schriften 3 1984

Siegen 1984

INHALTSVERZEICHNIS

GWT: The Groups-within-Treatment Analysis of Variance to reduce error terms. Application, theory and designs up to the three-factorial case.

Summary:

First the problems with statistical inference when using intact groups as samples are discussed. The handicaps of traditional techniques in the analysis of variance are shown to demonstrate the advantages of the "groups-within-treatments" analysis of variance for the samples mentioned above. Then the two- and three factorial designs are developed.

Zusammenfassung:

Zunächst werden Stichprobenprobleme bei der Generalisierbarkeit statistischer Ergebnisse für den Fall der Erhebung intakter Gruppen diskutiert. Anschließend werden die Nachteile varianzanalytischer Techniken zur Bewältigung dieser Probleme kurz aufgezeigt, um als theoretisch und inferenzstatische Alternative die "Gruppen-innerhalb-Stufen" Varianzanalyse herzuleiten und in ihren Vorteilen zu begründen.

GIS: DIE GRUPPEN-INNERHALB-STUFEN VARIANZANALYSE ZUR REDUKTION VON FEHLERKOMPONENTEN. ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN, THEORIE UND DIE DESIGNS BIS ZUM DREIFAKTORIELLEN FALL.*

Autoren: Frank Eckgold
Postfach 1201
D-4815 Stukenbrock

Dietrich Meutsch
Wertherstraße 70
D-4905 Spenge

1. STICHPROBENPROBLEME IN DER SOZIALWISSENSCHAFTLICHEN FORSCHUNG UND IHRE BERÜCKSICHTIGUNG DURCH DIE STATISTISCHE AUSWERTUNG

1.1 In der sozialwissenschaftlichen Forschung treten in vielen Fällen Stichprobenprobleme auf, da die Gesamtheit der Versuchspersonen nicht <u>eindeutig zufällig</u> den jeweiligen experimentellen Bedingungen zugeordnet werden kann.
Vor allem bei Versuchen mit geschlossenen bzw. intakten Gruppen (z.B. Schulklassen, Kindergartengruppen oder Seminaren) ist diese zufällige Zuordnung der Versuchspersonen nicht garantiert (Lindquist 1953:172f., Mittenecker 1973:151-153, Klauer 1973:99-101).
Diese intakten Gruppen charakterisieren sich durch homogene Merkmale (z.B. Alter, Geschlecht, Leistungsfähigkeit, Interessen, Verhaltensnormen, etc.), die, werden solche Gruppen als Gesamt einzelnen experimentellen Bedingungen zugeordnet, die Generalisierbarkeit der Stichprobenergebnisse auf die Population in Frage stellen (Klauer 1973:99f., 1979:331).
Wir wollen im folgenden die innerhalb varianzanalytischer Designs möglichen Techniken zur Bewältigung dieser Schwierigkeit diskutieren und eine bisher wenig benutzte Designkonstruktion vorstellen und weiterentwickeln. Die Beschränkung der inferenzstatistischen Möglichkeiten auf varianzanalytische Verfahren sehen wir durch die weite Verbreitung und Vielseitigkeit von Varianzanalysen innerhalb der sozialwissenschaftlichen Forschung als sinnvoll gegeben.

1.2 Diese Generalisierungsprobleme können durch <u>sehr große</u> repräsentative Stichproben (viele intakte Gruppen je Versuchsbedingung) in den Fällen behoben werden, (1) wo die Repräsentativität von Ergebnissen anwen-

---

*Das Projekt wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unter der Nummer Schm 335/11-1 gefördert.

dungsbezogen intendiert ist und (2) wo die finanziellen, organisatorischen und zeitlichen Forschungskapazitäten für sehr große Stichproben garantiert sind. In den Fällen, in denen entweder grundlagenorientierte Theoriebildung und/oder forschungsökonomische Verhältnisse diesen Lösungsweg nicht sinnvoll bzw. unmöglich machen, müssen andere Lösungen gesucht werden:

1.2.1 Statt wie normalerweise mit einzelnen Versuchspersonen zu arbeiten, können alternativ im hier skizzierten Fall die jeweiligen gesamten Gruppen als experimentelle Einheit genommen werden (cf. Klauer 1973:99, Mittenecker 1973:151-153, Lindmann 1974:155, Winer 1970:216-218).
Im Fall von einer Gruppe pro Faktorstufenkombination tritt dann allerdings die Schwierigkeit auf, eine herkömmliche Bestimmung der Fehlervariation nicht durchführen zu können, eben weil nur ein Meßwert pro Zelle vorliegt (cf. Groeben 1972 als Beispiel für diesen Fall).
Diese Schwierigkeit kann "methodisch sauber" behoben werden, da in einem solchen Fall (n-faktorielle Varianzanalyse) die Fehler - und n-fach Interaktionsvarianz konfundiert sind und somit diese n-fach Interaktionsvarianz als Fehlervarianz anzusetzen ist (cf. u.a. Bortz 1977:396-400). (In einer dreifaktoriellen Varianzanalye mit einem Meßwert pro Zelle würde also die Dreifachinteraktion als Fehlervarianz angesetzt). Allerdings entfällt damit die n-fach Interaktion als zu prüfende Varianz, da sie als Prüfvarianz fungiert. Daraus ergibt sich dann auch der Nachteil dieses Verfahrens: Wenn die jeweilige n-fach Interaktion als Prüfvarianz fungiert und theorieabhängig sinnvoll interpretierbar ist, ergibt sich bei der Anwendung des Falls "ein-Meßwert-pro-Zelle" ein Informationsverlust.

1.2.2 Eine Alternative dazu liegt in der Erweiterung des eigentlichen Versuchsplans um einen zusätzlichen Faktor "Gruppe" (Keppel 1973:509-512). Damit wird es möglich, eventuelle Einflüsse der intakten Gruppen zu berücksichtigen, allerdings wird die eventuelle Wirkung des Gruppenfaktors nicht nur als Fehlervarianz generierende Quelle berücksichtigt, es sind also Einflüsse der theoretisch interessierenden Faktoren und die des Gruppenfaktors teilweise konfundiert. Darüber hinaus ergibt sich bei Anwendung dieses Verfahrens schnell ein zu großer unhandlicher Versuchsplan.

1.2.3 Dieser Unhandlichkeit und Größe des Versuchsplans kann zwar in vielen Fällen durch die Anwendung unvollständiger, mehrfaktorieller Versuchspläne begegnet werden und es liegen hier auch zahlreiche effektive Designanlagen vor, die Effekte von Fehlervarianz generierenden Quellen berücksichtigen, aber alle diese Möglichkeiten leisten keine "reine" (nicht konfundierte) Abbildung der Fehlerquelle "Gruppen" in der jeweiligen Prüfvarianz. Speziell Meßwiederholungsdesigns bieten, ihre theoretische Indikation vorausgesetzt, vielfältige Möglichkeiten zur Eliminierung von Störeinflüssen.

Wenn wir an dieser Stelle zusammenfassen, so zeigen sich unterschiedliche Möglichkeiten der durch eine spezifische Designanlage kontrollierbaren Einflüsse von intakten Gruppen auf Fehlervarianzen. (Den Fall der designunabhängigen Kontrolle von Störvariablen - Kovarianzanalyse - betrachten wir hier nicht).

Dabei zeichnen sich drei Kriterien ab, nach denen die Wahl des geeigneten Versuchsplans zu treffen ist:

1. Anzahl der Versuchspersonen / Komplexität des Versuchsplans
2. Objekttheoretische Indikation - Informationsinteresse
3. Konfundierungsgrad von Stör- und Experimentaleffekten

Rekapitulieren wir die jeweils sehr kurz vorgestellten Möglichkeiten, so stellen wir fest, daß bei den <u>designabhängigen Verfahren der Varianzanalyse keines existiert, das eine nicht konfundierte Berücksichtigung von Stör- und Experimentaleinflüssen gewährleistet, ohne dabei parallel Informationsverlust oder Stichprobenvergrößerung zu implizieren.</u> (Cf. auch Glass, et al. 1970:501-509, die eine übersichtliche Darstellung der Problematik liefern und weitere Literatur angeben!).

2. DIE IDEE DES "GRUPPEN-INNERHALB-STUFEN-DESIGNS"

Damit ist die Indikation für die "Gruppen-innerhalb Stufen-Varianzanalyse" (GIS) formuliert:

Die Berücksichtigung der Einflüsse intakter Gruppen auf Fehlervarianz <u>ohne Konfundierung</u> von Experimental- und Fehlereinfluß, <u>ohne Stichprobenvergrößerung</u> und <u>ohne Informationsverlust</u> durch Aufgabe einer Interaktion als zu prüfende varianzgenerierende Quelle (Lindquist 1953: 172-187, Myers 1972: 227-235).

Das GIS-Design integriert die sonst alternativen Möglichkeiten, die Gruppe als experimentelle Einheit mit ihrem Einfluß auf die Fehlervariation zu berücksichtigen und gleichzeitig die Fehlervariation <u>innerhalb</u> der Gruppen

einzubeziehen. Wir haben also ein subjektbezogenes Design mit zwei Fehlerkomponenten: Die Komponente "innerhalb Gruppen" (oder "zwischen Subjekten") und die Komponente "zwischen Gruppen" (oder "innerhalb Zelle").
Zunächst wollen wir die Argumentation der GIS-Idee verdeutlichen, um dann Vorteile und Einsatzmöglichkeiten des Designs zu diskutieren.

2.1 (Die folgende Darstellung orientiert sich an Lindquist 1953:174-177)
Angenommen folgender eindimensionaler Fall liegt vor:
Der vollständige Datensatz einer Studie besteht aus a Zellen eines Faktors, jede Zelle besteht ihrerseits aus Gruppen, insgesamt gibt es k Gruppen in den a Zellen.

1. Normalfall unter Vernachlässigung von Gruppen innerhalb Zellen

$$\mathbf{QS}_{tot} = \mathbf{QS}_{treat} + \mathbf{QS}_{fehler} \qquad (1)$$

2. Vernachlässigung der Zellen und alleinige Berücksichtigung der Gruppen

$$\mathbf{QS}_{tot} = \mathbf{QS}_{zwischen\ Gruppen} + \mathbf{QS}_{innerhalb\ Gruppen} \qquad (2)$$

3. Innerhalb einer Zelle j ist dann die $\mathbf{QS}_{tot_j}$ die Summe aus der "zwischen Gruppen" und "innerhalb Gruppen" Komponente:

$$\mathbf{QS}_{tot_j} = \mathbf{QS}_{zwischen_j} + \mathbf{QS}_{innerhalb_j} \qquad (3)$$

4. Für alle a Zellen ergibt sich dann:

$$\sum_{j=1}^{a} \mathbf{QS}_{tot_j} = \sum_{j=1}^{a} \mathbf{QS}_{zwischen\ Gruppen_j} + \sum_{j=1}^{a} \mathbf{QS}_{innerhalb\ Gruppen_j} \qquad (4)$$

5. Weil $\sum_{j=1}^{a} \mathbf{QS}_{\text{zwischen Gruppen}_j} = \mathbf{QS}_{\text{zwischen Gruppen innerhalb Zellen}}$

und weil

$\sum_{j=1}^{a} \mathbf{QS}_{\text{innerhalb Gruppen}_j} = \mathbf{QS}_{\text{innerhalb Gruppen}}$, gilt:

$$\mathbf{QS}_{\text{Fehler}} = \mathbf{QS}_{\text{zwischen Gruppen innerhalb Zelle}} + \mathbf{QS}_{\text{innerhalb Gruppen}} \quad (5)$$

6. Aus (1) und (5) folgt:

$$\mathbf{QS}_{\text{tot}} = \mathbf{QS}_{\text{treat}} + \mathbf{QS}_{\text{zwischen Gruppen innerhalb Zellen}} + \mathbf{QS}_{\text{innerhalb Gruppen}} \quad (6)$$

7. Da (2) und (6), gilt:

$$\mathbf{QS}_{\text{zwischen Gruppen}} = \mathbf{QS}_{\text{treat}} + \mathbf{QS}_{\text{zwischen Gruppen innerhalb Zellen}}$$

also:

$$\mathbf{QS}_{\text{zwischen Gruppen innerhalb Zellen}} = \mathbf{QS}_{\text{zwischen Gruppen}} - \mathbf{QS}_{\text{treat}} \quad (7)$$

Dieses Ergebnis kann auch algebraisch hergeleitet werden, cf. Lindquist 1953:175f. und Kapitel 2.2.

Wir erhalten so folgende Komponenten der ANOVA-Tafel (cf. S. 7), dabei ist:

X = ein Meßwert einer VP

a = Zellenzahl

k = totale Gruppenzahl innerhalb Treatment

M = Gesamtmittelwert

M_j = Mittelwert der Zelle j

M_{ij} = Mittelwert der Gruppe i in der Zelle j

n_{ij} = VPN Anzahl in Gruppe i in Zelle j

n_j = VPN in Zelle j

u_j = Gruppenzahl in Zelle j

N = totale Anzahl VPN

T = Summe aller Meßwerte der VPN

T_j = Summe aller Meßwerte einer Zelle j

T_{ij} = Summe aller Meßwerte der Gruppe i in Zelle j

Quelle der Variation	Freiheitsgrade	Quadratsummen (QS)	Mittlere Quadratsummen (MQ)	F-Werte
Treatment	a-1	$QS_{treat} = \sum_{j=1}^{a} T_{\cdot j}^2 / n_{\cdot j} - T^2/N$	$MQ_{treat} = \frac{QS_{treat}}{a-1}$	$\frac{MQ_{treat}}{MQ_{zGiZ}}$
Gruppen innerhalb Zellen	k-a	$QS_{zGiZ} = \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{u_j} T_{\cdot ij}^2 /$	$MQ_{zGiZ} = \frac{QS_{zGiZ}}{k-a}$	$\frac{MQ_{zGiZ}}{MQ_{iG}}$
Subjekte innerhalb Gruppen	N-k	$QS_{iG} = \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{u_j} \sum X^2$	$MQ_{iG} = \frac{QS_{ig}}{N-k}$	
		$- \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{u_j} T_{\cdot ij}^2 / n_{\cdot ij}$		
Total	N-1	$QS_{tot} = \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{u_j} \sum X^2 - T^2/N$		

Als Prüfgröße dient die Fehlervarianz MQ_{zG} (bei konstantem n und u in Gruppen und Zellen als Voraussetzung (cf. dazu 2.2.)).
Dieses mittlere Quadrat berücksichtigt zwei Fehlerquellen: Unterschiede zwischen den Gruppen und Unterschiede zwischen den Individuen (cf. Lindquist 1953:182-184).
Darüber hinaus kann mit dem $F = MQ_{zGiZ} \,/\, MQ_{iG}$ der Gruppeneffekt innerhalb Zellen auf Signifikanz geprüft werden.
Mit diesem F wird "das Gruppenproblem" kontrollierbar, wie folgendes längere Zitat noch einmal verdeutlicht:
"However, in some situations, the groups within treatments design might be used initially because differences between groups are suspected but not known to exist. If this F proves non-significant, we might then, on the assumption of no group differences, regard this design as simple randomized design. However, the assumption of no group differences should be supported by a priori considerations as well as shown tenable by the test based on the ratio $ms_{GwA} \,/\, ms_{wG}$. In this case, the sums of squares for groups within treatments and for within groups could be added together to give the sum of squares for within treatments, and the sum of these sums of squares could be divided by the sum of their degrees of freedom to give the mean square for within treatments. This mean square would then be used as the error term in testing the significance of the treatment differences." (Lindquist 1953:186)
Zusammengefaßt bedeutet dies: Durch den F-Wert mit den Komponenten Zähler = mittleres $\text{Quadrat}_{\text{zwischen Gruppen innerhalb Zellen}}$ und Nenner = mittleres $\text{Quadrat}_{\text{innerhalb Gruppen}}$ kann das Signifikanzniveau des Gruppeneinflusses bestimmt werden und es gibt dann zwei Möglichkeiten der weiteren Analyse:

1. Bei nicht-signifikantem "Gruppen-F" eine Zusammenlegung der beiden Fehlerkomponenten und eine Überprüfung von Haupt- und Interaktionseffekten im einfach randomisierten Design (a) oder trotzdem die Beibehaltung der Prüfgröße MQ_{zGiZ} und damit die exakte und unkonfundierte Bestimmung der Treatmenteffekte (b)
2. Bei signifikantem "Gruppen-F" das Verfahren 1b.

Die Designvorteile zeigen sich z.B. im Zusammenhang mit Kovarianzanalysen, wo bei einer nicht-zufälligen Aufteilung der VPN auf die Treatments die Berechtigung der Anwendung der Kovarianzanalyse umstritten ist (cf. Diehl 1977:336f.).
Gerade in Fällen, wo die Berücksichtigung von Kontrollvariablen die Präzi-

sion von Experimenten erhöhen soll und wo andererseits die skizzierten Stichprobenprobleme unvermeidbar sind, liegen Vorteile dieses Designs. Wenn man die unterschiedlichen Leistungen und Schwierigkeiten der Verfahren zur Reduktion von Fehlervarianz noch einmal überdenkt (cf. Keppel 1973:511-516 (Keppel vergleicht Blockdesign, Kovarianzanalyse und Varianzanalyse mit Differenzwerten); Feldt 1958 (Feldt vergleicht faktorielle Kontrolle, Kovarianzanalyse und Varianzanalye mit Differenzwerten)), werden die Einsatzmöglichkeiten dieses "Gruppen innerhalb Treatments Design" offensichtlich: Sie liegen darin, eine Entscheidungsbasis für die Effektivität und Angemessenheit statistischer Verfahren zu haben, die Kontrollvariablen berücksichtigen. Diese Entscheidungsbasis ist deshalb als besonders effizient zu beurteilen, weil die Prüfvarianz hier alle möglichen Fehlerkomponenten berücksichtigt, nämlich Unterschiede zwischen VPN in einer Gruppe und Unterschiede zwischen Gruppen in einer Zelle und gleichzeitig die exakte Bestimmung der F-Werte der Experimentalfaktoren und der Interaktionen garantiert.

2.2.

2.2.1. Algebraische Grundlagen der Varianzanalyse

2.2.1.1. Abkürzungen

Im folgenden werden folgende Schreibweisen benutzt :

i)	M	:= Mittelwert
ii)	Mijk	:= mehrfach indizierter Mittelwert
iii)	<ijkgh>	:= Summe über die angegebenen Indices mit i = 1,...,I / j = 1,...,J /.../ h = 1,...,H
iv)	X	:= Meßwert (die Angabe von Indices wird unterdrückt)
v)	*	:= Multiplikationsoperator. Bei Gewährleistung der Eindeutigkeit kann "*" auch ausgelassen werden.
vi)	**	:= Potenzoperator

2.2.1.2 Rechenregeln

Gegeben seien Meßwerte Xijk...lmn. Die Reduzierung der Indices durch Summenbildung mit gleichzeitiger Division durch das Produkt der Summenindexobergrenzen bedeutet die Überführung von indizierten Größen in Mittelwerte über diese Größen:

<i>Xijk...lmn = I*Mjk...lmn

oder

<ijk>Mijkg = IJK*Mg

Sei (A1,...,An) eine Menge algebraischer Ausdrücke. Der Operator "!"**S bildet alle Kombinationen S - facher Produkte der Elemente von (A1,...,An) unter der Einschränkung:
Sei Ai*Ak*...*Am ein solches Produkt, dann gilt : i < k < ... < m für alle diese Produkte. Der Operator "!" summiert noch über alle S - fachen Produkte.

Beispiel 1 : (A1,A2,A3)! = A1 + A2 + A3 (1 - fache Produkte)

Beispiel 2 : (A1,A2,A3,A4)!! = A1*A2 + A1*A3 + A1*A4 +
A2*A3 + A2*A4 +
A3*A4

Damit gilt die Regel :

(A1,...,Ai,Aj,Ak,...,An)!! = Aj*(A1,...,Ai,Ak,...,An)! +
(A1,...,Ai,Ak,...,An)!!

2.2.1.3 Formale Anforderungen an eine Varianzzerlegung

Gegeben seien Meßwerte Xijk...lmn. Als Varianzwurzel bezeichnen wir die Differenz zwischen einer indizierten Größe W und einer durch Summation indexreduzierten Größe W'; W und W' sind durch Mittelwertbildung aus X hervorgegangen.

Eine Varianzzerlegung drückt die Varianzwurzel der ganzen Meßwertmenge T = (Xijk...lmn – M) als Summe von Einzelvarianzwurzeln aus :

$$(1) \quad T = (W1 - W1') + \ldots + (Wn - Wp')$$

Diese Summenzerlegung muß natürlich algebraisch korrekt sein. Die zweite und formal schwierigere Bedingung ist die Forderung, daß mit (1) auch die Summe der Varianzen (Wa – Wa')**2 über alle Indices identisch $\langle$ ijk...lmn $\rangle$ (T**2) sein muß; dies bedeutet das Wegfallen aller Kovariantherme.

$$(2) \quad \langle ijk...lmn \rangle (T^{**}2) = \langle ijk...lmn \rangle (\langle p \rangle (Wp - Wp')^{**}2)$$
$$= \langle ijk...lmn \rangle ((\langle p \rangle (Wp - Wp'))^{**}2)$$

Dabei müssen nach Prüfung der algebraischen Korrektheit die Ausdrücke der Einzelvarianzen als Fehlervarianzen interpretierbar sein.
Der Freiheitsgrad (hier fungierend als Gewichtungsfaktor einer Einzelvarianz) df einer Einzelvarianz (Wp – Wp') berechnet sich mit p = ijk..l und p' = k...l direkt zu

$$(3) \quad df\,(Wijk..l - Wk..l) = I^*J^*K^*..^*L - K^*..^*L$$

Die der Gleichung (1) entsprechende Zerlegung der Freiheitsgrade ist damit automatisch korrekt.

2.2.2 Das Design "Gruppen innerhalb Stufen" GIS

2.2.2.1 Struktur der Meßwerte

Gemessen wird die Wirkung von Faktoren F1,..,Fn mit je S1,...,Sn Stufen (Ausprägungen) auf eine abhängige Variable unter der Annahme, daß jede Stufekombination s1,...,sn in genau G Gruppen zerfällt. Damit wird also das einfache n – faktorielle Design erweitert um den Einfluß der Gruppen g1,..,gG, gemessen durch eine sinnvolle Einzelvarianz.
Wir setzen im folgenden voraus, daß die Anzahl der Meßwerte je "Gruppe innerhalb Stufenkombination (GIS)" für alle GIS konstant ist bzw. sinnvoll auf einen konstanten Wert H aufgefüllt werden kann.

2.2.2.2 Das GIS-Design für den 1-faktoriellen Fall

Gegeben sind Meßwerte Xigh mit i = 1,..,I für die Stufen des Faktors
g = 1,..,G für die Gruppen
h = 1,..,H für die Meßwerte innerhalb einer GIS

Zur Veranschaulichung der Regeln in 2.2.1 geben wir hier die Definitionen der in der Varianzzerlegung verwendeten Mittelwerte Wp und Wp' explizit an.

$$
\begin{aligned}
Mig &= <h>(Xigh) / H \;-->\; H^*Mig = <h>(Xigh) \\
Mi &= <g>Mig / G \\
M &= <i>Mi / I = <igh>(Xigh) / (IGH)
\end{aligned}
$$

Mit den Abkürzungen T := Totalvarianz ,
ZS := Varianz zwischen Faktorstufen
GIS := Varianz zwischen Gruppen innerhalb einer Stufenkombination
IG := Varianz innerhalb der Gruppen

schreibt sich die Zerlegung wie folgt :

Name	Term	df	A
T	Xigh - M	IGH - 1	
IG	Xigh - Mig	IGH - IG	1
ZS	Mi - M	I - 1	2
GIS	Mig - Mi	IG - I	3

(Abb. 2.2.2.2.1)

Die Bedingung (2.2.1.3.1) ist trivial erfüllt. Bedg. (2.2.1.3.2) rechnet sich sofort wie folgt:
(Wir benutzen hier und im folgenden den oben definierten Ausdruck

$$(A1 + ... + An)^{**}2 = A1^{**}2 + ... + An^{**}2 + 2^*(A1,...,An)!!\ )$$

$$
\begin{aligned}
<h>T^{**}2 &= H^*(A1^{**}2 + A2^{**}2) + <h>A3^{**}2 + 2<h>(A1,A2,A3)!! \\
&= \quad " \qquad\qquad " \qquad + \quad 2^*Rest
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
<h>Rest &= (A2+A3)^*<h>A1 + H^*A2^*A3 \\
<gh>Rest &= \qquad\quad =0 \quad + H^*A2^*<g>(Mig-Mi) \\
&= \qquad\qquad\qquad\qquad =0 \\
&= 0\ .
\end{aligned}
$$

Dabei wurde gerechnet : $<h>A1 = <h>(Xigh - Mig) = H^*Mig - H^*Mig = 0$
und entsprechend $<g>(Mig - Mi) = G^*Mi - G^*Mi = 0$

Die Forderung nach Wegfall aller gemischten Terme (Kovarianzen) ist damit erfüllt; die Formulierung des Berechnungsalgorthmus wird weiter unten vorgenommen.

2.2.2.3 Das GIS Design für 2 Faktoren (triviale Erweiterung)

Wir erweitern das Design aus (Abb. 2.2.2.2.1) bei Hinzunahme eines weiteren Faktors (die beiden Faktoren sollen A und B heißen mit den Laufindices i und j von 1 bis I bzw. J) wie folgt:

Name	Term	df	A
T	X – M	IJGH – 1	
ZSA	Mi – M	I – 1	1
ZSB	Mj – M	J – 1	2
ZSAB	Mij – M – (ZSA + ZSB)	IJ – I – J + 1	3
GISA	Mig – Mi	IG – I	4
GISB	Mjg – Mj	JG – J	5
GISAB	Mijg – Mij – (GISA + GISB)	IJG – IJ – GI – GJ + I + J	6
IG	X – Mijg	IJGH – IJG	7

(Abb. 2.2.2.3.1)

Damit wird Bedingung (2.2.1.3.2) wie folgt kontrolliert:

T**2 = A1**2 + ... + A7**2 + 2*(A1,...,A7)!!
= 2*Rest
<h>Rest = H*(A1,...,A6)!! + (A1,...,A6)!*<h>A7
=0
<hg>Rest = H*(A1,A2,A3)!*<g>(A4,...,A6)! + H*<g>(A4,..,A6)!!
+ HG*(A1,..,A3)!!
= 0 + H*<g>(A4,..,A6)!!
+ HG*(A1,...,A3)!!

Die Summation über g separiert (immer) die ZS – Anteile von den GIS – Anteilen. Der Nachweis von ‹ ij › (A1,...,A3)!! kann in jedem Lehrbuch der Varianzanalyse nachgelesen oder leicht nachgerechnet werden. Solange in den ZS – Anteilen der Index g nicht auftritt, kann eine Prüfung auf Wegfall der Kovarianzen beschränkt werden auf die Prüfung von : ‹ ijk...lmng › (alle GIS – Anteile)!! oder kürzer ‹ ijk...lmng › (GIS)!! .

```
< jg>(GIS)!!/H = <g>A4<j>(A5+A6) + <jg>(A5*A6)
               = <g>A4*0        + <jg>(A5*A6)
<ijg>(GIS)!!/H = <jg>A5<i>A6
               = <jg>A5*(IMjg - IMj - IMg + IM - IMjg + IMj)
               = <jg>((Mjg - Mj)(IM - IMg))
               = IJ(GM**2 - <g>(Mg**2))
```

```
Wegen <g>( (Mg - M)**2 ) = <g>(Mg**2) - 1/G * (<g>Mg)**2
und   (<g>Mg)**2 = G**2 * M**2
folgt sofort
```

```
<ijg>(GIS)!!   = -IJH<g>( (Mg - M)**2 )
```

Die triviale Erweiterung des GIS – Bereichs führt auf einen nichtverschwindenden Kovarianz– term, der allerdings mit
(Mg – M)**2 = (Mg – M)(Mg – M) zu einer zusätzlichen Varianz degeneriert ist.
Vor Überlegungen bzgl einer nichttrivialen Erweiterung des Designs steht der Test der trivialen Erweiterung auf 3 Faktoren.

2.2.2.4 Triviale Erweiterung des Designs auf 3 Faktoren

Gegeben sind Meßwerte X = Xijkgh mit Faktor A (i = 1,I)
Faktor B (j = 1,J)
Faktor C (k = 1,K)
und den Gruppen (g = 1,G) mit den Meßwerten je GIS (h = 1,H).

Name	Wert	df	A
T	X – M	IJKGH – 1	
IG	X – Mijkg	IJKGH – IJKG	1
ZSA	Mi – M	I – 1	2
ZSB	Mj – M	J – 1	3
ZSC	Mk – M	K – 1	4
ZSAB	Mij – M – (ZSA + ZSB)	IJ – I – J + 1	5
ZSAC	Mik – M – (ZSA + ZSC)	IK – I – K + 1	6
ZSBC	Mjk – M – (ZSB + ZSC)	JK – J – K + 1	7
ZSABC	Mijk – M – (ZSA + ZSB + ZSC + ZSAB + ZSAC + ZSBC)	IJK – IJ – IK + I + J + K – 1	8
GISA	Mig – Mi	IG – I	9
GISB	Mjg – Mj	JG – J	10
GISC	Mkg – Mk	KG – K	11
GISAB	Mijg – Mij – (GISA + GISB)	IJG – IJ – IG – JG + I + J	12
GISAC	Mikg – Mik – (GISA + GISC)	IKG – IK – IG – KG + I + K	13
GISBC	Mjkg – Mjk – (GISB + GISC)	JKG – JK – JG – JK + J + K	14
GISABC	Mijkg – Mijk – (GISA + GISB + GISC + GISAB + GISAC + GISBC)	IJKG – IJK – IJG – IKG – JKG + IJ + IK + JK + G + JG + KG – I – J – K	15

(Abb. 2.2.2.4.1)

Eine ähnliche Rechnung wie in (2.2.2.3) führt auf den Ausdruck:

<k>Rest/H = <g>A9<k>(A10,...,A15)! + <gk>(A10,...,A15)!!
= <g>A9<k>(A10,...,A15)! + <g>A10<k>(A11,...,A15)!
+ <g>A12<k>(A11,A13,A14,A15)! +
<gk>(A11,A13,...,A15)!!
= <g>A9<k>(Mgik – Mijk – Mgi + Mi) +
<g>A10<k>(Mgijk – Mijk – Mgi + Mi – Mgj + Mj) +
<g>A12<k>(Mgijk – Mijk – Mgij + Mij) (=0)
<gk>(A11,A13,...,A15)!!

<ijk>Rest/H = <ig>A9<jk>(Mgijk – Mijk – Mgi + Mi) + (=0)
<gijk>(A10*(A11 + ... + A15) +
<gijk>(A11,A13,...,A15)!!
= <gj>A10<ik>(Mgijk – Mijk – Mgi + Mi – Mgj + Mj) +
<gijk>(A11,A13,...,A15)!!
= – <gijk>(A9*A10) +
<gk>A11<ij>(Mgijk – Mijk – Mijg + Mij – Mgk + Mk +
<gijk>(A13,...,A15)!!
= – <gijk>(A9*A10) + <gijk>(A11*(Mij – Mijg)) +
<gik>A13<j>(Mgijk – Mijk – Mgij + Mij – Mgik + Mik + Mgi – Mi) +
<gjk>A14<i>A15
= – JK* <gi>(A9*(Mg – M)) + IJ* <gk>(A11*(M – Mg)) +
I* <gjk>(A14*(Mg – M))
= – 3*IJK<g>((Mg – M)**2)

Damit gilt : Rest = – 6*IJKH ‹ g › ((M – Mg)**2). Wie bei der 2faktoriellen trivialen Erweiterung ergibt sich ein zusätzlicher Varianzterm (6 – fach negativ) als Korrektur zur ursprünglichen Varianzzerlegung. Hierbei fällt auf, daß die jeweilige Anzahl der GIS – Varianzen ohne die Varianz der größten Wechselwirkung exakt der Anzahl der sich ergebenden Korrekturterme entspricht :

2 Faktoren – – › GISA,GISB mit Rest = – 2*IJH ‹ g › ((Mg – M)**2)
3 Faktoren – – › GISA,GISB,GISC,GISAB,GISAC,GISBC
mit Rest = – 6*IJKH ‹ g › ((Mg – M)**2)

Hier folgt die Hypothese:"Jeder GIS – Varianzanteil außer derjenige mit der komlexesten Wechselwirkung muß um den Term (Mg – M) in der Varianzwurzel korrigiert werden".

2.2.2.5 Versuch einer Erweiterung der GIS-Zerlegung um eine zusätzliche Korrektur (MG-M)*Y

Wir versuchen am Beispiel der 2faktoriellen GIS – VA den auftretenden Korrekturterm (Mg – M) als zusätzlichen Varianzanteil in die Zerlegung einzuführen; dabei wird mit einer reelen Gewichtung Y gearbeitet.

Name	Wert	A
T,IG und alle ZS wie in Abb.2.3.1		
GISA	Mig – Mi	4
GISB	Mjg – Mj	5
GISY	Y*(M – Mg) (die Vorzeichenumkehr ist unerheblich)	6
GISABY	Mijg – Mij – (GISA + GISB + GISY)	7

(Abb. 2.2.2.5.1)

Damit ergibt sich sofort der Ansatz :

<jg>Rest/H = <g>A4<j>(A5,..,A7)! + <jg>(A5,...,A7)!!
= <g>A4<j>(Mijg – Mij – Mig + Mi) + (=0)
<jg>(A5,...,A7)!!
<ijg>Rest/H = <jg>A5<i>(Mijg – Mij – Mig + Mi – Mjg + Mj) + <ijg>(A6*A7)
= <ijg>((Mjg – M –)*(Mi – Mig)) + <ijg>(A6*A7)
= – IJ<g>((M – Mg)**2) – Y(Y – 1)IJ<g>((M – Mg)**2)
<ijg>Rest = – 2IJH(1 + Y(Y – 1))*<g>((M – Mg)**2)

Fordern wir zunächst das Wegfallen des Korrekturterms und des Varianzterms A6. Damit folgt sofort:
IJH*<g>(A6**2) + <ijg>Rest = 0
IHJ*Y*Y*<g>((M – Mg)**2) – 2IHJ(1 + Y(Y – 1))*<g>((MMg)**2) = 0
Y**2 – 2(1 + Y**2 – Y) = 0
Y1 = 1 + IMG
Y2 = 1 – IMG mit IMG: = imaginäre Einheit
Damit existiert keine reele Lösung.

Wir fordern auch noch:
IHJ<g>(A6**2) + <ijg>Rest = IHJ<g>((Mg – M)**2)
Y1 = 1 + IMG*(2**0.5)
Y2 = 1 – IMG*(2**0.5)

Der Versuch, nur den Rest wegfallen zu lassen scheitert auch:
<ijg>Rest = 0
<g>((Mg – M)**2) = 0 oder
Y1 = 0.5 + IMG*(0.75**0.5)
Y2 = 0.5 – IMG*(0.75**0.5)

Eine Erfüllung der Bedingung (2.2.1.3.2) durch Einführen eines zusätzlichen Varianzanteils ist damit nicht zu gwährleisten.

2.2.2.6 Erweiterung der GIS-Zerlegung um additive Anteile in den Varianzanteilen mit nicht-maximaler Ordnung

In Anlehnung an die Hypothese in (2.2.2.4) versuchen wir eine allgemeine additive Erweiterung der Varianzanteile GIS mit nicht maximaler Wechselwirkung; dabei soll der Erweiterungsterm Eg allgemein nur vom Index g abhängen und identisch für beide Anwendungen sein:

Name	Wert	A
T,IG und alle ZS wie in Abb.2.3.1		
GISA	Mig − Mi + Eg	4
GISB	Mjg − Mj + Eg	5
GISAB	Mijg − Mij − (GISA + GISB)	6

(Abb. 2.2.2.6.1)

Wir prüfen wieder nur den Restterm ‹ g › Rest/H = ‹ g › (GIS)!!/H wie folgt:

$$
\begin{aligned}
<gj>Rest/H &= <gj>(\ A4(A5+A6)\ ) \quad + <gj>(A5^*A6) \\
&= -<gj>(\ A4^*Eg\ ) \quad + <gj>(A5^*A6) \\
<ijg>Rest/H &= -<ijg>(\ A4^*Eg\ ) \quad + <gj>(\ A5^*<i>(\ Mi-Mig\ )\ ) \\
&\qquad\qquad - <ijg>(\ A5^*Eg) \\
&= -<g>(\ Eg^*<ij>(A4+A5)\ ) + <jg>(\ A5^*(IM-IMg)\ ) \\
&= 2IJ<g>(\ Eg^{**}2\ ) + IJ<g>(\ Eg^*(Mg-M)\ ) \\
&\quad - IJ<g>(\ (Mg-M)^{**}2\ )
\end{aligned}
$$

Fordern wir nun : $<ijg>Rest/H = 0$ (Wegfall aller Kovarianzen) , dann folgt sofort

$<g>(\ (Eg + 0.25^*(Mg-M))^{**}2\ ) = <g>(\ (9/16)^*(Mg-M)^{**}2\ )$

oder für alle g : $Eg = -0.25^*(Mg-M) +- 0.75^*(Mg-M)$

und damit $Eg1 = 0.5^*(Mg-M)$ und $Eg2 = -(Mg-M)$

Damit führt der allgemeine Ansatz einer additiven Erweiterung in den GIS-Termen mit nicht-maximaler Ordnung exakt zu der in (2.2.2.4) geäußerten Hypothese.

Es bleibt noch die Anwendung auf den 3faktoriellen Fall zu zeigen. Wir definieren damit die Varianzwurzeln wie folgt.

Name	Wert	A
T	X - M	0
IG	X - Mijkg	1
ZSA	Mi - M	2
ZSB	Mj - M	3
ZSC	Mk - M	4
ZSAB	Mij - M - (ZSA + ZSB)	5
ZSAC	Mik - M - (ZSA + ZSC)	6
ZSBC	Mjk - M - (ZSB + ZSC)	7
ZSABC	Mijk - M - (ZSA + ZSB + ZSC + ZSAB + ZSAC + ZSBC)	8
GISA	Mgi - Mi - Eg	9
GISB	Mgj - Mj - Eg	10
GISC	Mgk - Mk - Eg	11
GISAB	Mgij - Mij - Eg - (GISA + GISB)	12
GISAC	Mgik - Mik - Eg - (GISA + GISC)	13
GISBC	Mgjk - Mjk - Eg - (GISB + GISC)	14
GISABC	Mgijk - Mijk - (GISA + GISB + GISC + GISAB + GISAC + GISBC)	

(Abb. 2.2.2.6.2)

Damit ist zu prüfen, ob ‹ ijkg › Rest/H = 0 wird :

<ijkg>Rest/H = <ig>(A9* <jk>((A10,...,A15)!)) (: = X1)
+ <jg>(A10* <ik>((A11,...,A15)!)) (: = X2)
+ <kg>(A11* <ij>((A12,...,A15)!)) (: = X3)
+ <gij> (A12* <k>((A13,...,A14)!)) (: = X4)
+ <gik> (A13* <j>((A14,A15)!)) (: = X5)
+ <gjk> (A14* <i>(A15)) (: = X6)

X1 = JK<g>((Mg - M)<i>(Mgi - Mi - Mg + M)) = 0
X2 = 0
X3 = 0
X4 = K<g>((Mg - M)<ij>(Mgij - Mij - Mgi - Mgj + Mi + Mj + Mg - M)) = 0
X5 = 0
X6 = 0

Damit halten wir fest:
Für den 2- und -3faktoriellen Fall müssen alle die Gruppenstruktur berücksichtigenden Terme der Varianzwurzelzerlegung (GIS-Terme) nach der trivialen (der einfachen Varianzzerlegung folgenden) Erweiterung aufgebaut und um den additiven Faktor - (Mg-M) erweitert werden; dies ist in (Abb. 2.2.2.6.2) für den 3faktoriellen Fall explizit dargestellt.

2.2.2.7 Übergang von 1faktoriellem zu 2,3faktoriellem Fall

Es fällt auf, daß das beim 2 - und - 3faktoriellem notwendige Korrekturglied $-(Mg - M)$ beim 1faktoriellen Fall fehlt. Formal muß die Forderung gestellt werden, daß bei Reduktion des mehrfaktoriellen Designs auf das 1faktorielle durch Summierung über die überschüssigen Indizes eine Identität der GIS - Varianzwurzeln gezeigt werden muß :

2faktoriell :

$$<j>(GISA + GISB + GISAB) = <j>(Mijg - Mij) = J(Mig - Mi) = GIS{:}1fakt. * J$$

Bis auf eine zu vernachlässigende Konstante J gehen beide Designs ineinander über.

3faktoriell :

$$<jk>(GISA + GISB + GISC + GISAB + GISAC + GISBC + GISABC) =$$
$$<jk>(Mijkg - Mijk) = JK(Mig - Mi) = GIS{:}1fakt. * JK$$

2.2.3 Algorithmen zur Berechnung

2.2.3.1 Freiheitsgrade df

Die Kalkulation der Freiheitsgrade einer Varianzwurzel berechnet für jede indizierte Größe in der Varianzwurzel die Anzahl der durch diese Größe dargestellten Werte durch Multiplikation aller Indexobergrenzen. Der Freiheitsgrad der ganzen Varianzwurzel berechnet sich dann als Summe dieser Produkte unter Berücksichtigung der Vorzeichen. Eine nichtindizierte Größe M wird durch das leere Produkt dargestellt und mit einer 1 repräentiert. Folgendes Beispiel verdeutlicht das Verfahren sofort :

$$A = Mijk + Mlmn - Mgxyz + M$$

Dann berechnet sich df zu

$$df = IJK + LMN - GXYZ + 1$$

2.2.3.2 Varianzen

Sei Q = Q1 + Q2 + ... + Qn eine Varianzwurzel mit v1,...,vn := Indexmengen der Einzelwerte V1,...,Vn; jede dieser Indexmengen vk schreibt sich als Teilmenge der Menge aller in vorliegendem Design gültigen Indizes (i1,....,it). Damit sei wk die Komplementmenge zu vk : wk = (i1,...,it)/v1; die Obergrenzen der Indizes sind entsprechend I1,...,It.
Entsprechend sind die Produkte aller Indexobergrenzen einer Teilmenge vk bzw. wk von (i1,...,it) die Ausdrücke Vk bzw. Wk.
PMk sei noch das Vorzeichen des k-ten Einzelausdrucks in der Varianzwurzel.
Mit diesen Vereinbarungen gilt für alle Varianzwurzeln :

<i1,...,it>(V**2) = <z=1,n>(Vz<vz>((<wz> X)**2)*PMz)
/(I1*...*It)

Ein Beispiel verdeutlicht diesen Algorithmus sofort :

Betrachte GIS:1fakt. = Mgi - Mi
Die Menge aller in diesem Design erlaubten Indices ist hier
(i,g,h).
Es ergeben sich Q1 = Mgi mit v1=(i,g) und w1 = (h) und PM1 = +1
Q2 = Mi mit v2=(i) und w2 = (g,h) und PM2 = -1
Damit ist ausführlich
<igh>((Mig - Mi)**2) = (GI<gi>((<h> X)**2)*(+1) +
I<i> ((<hg>X)**2)*(-1)
)/(IGH)

Dies wurde für alle Varianzwurzeln bis einschließlich des 3faktoriellen Designs bestätigt. Der Algorithmus bietet eine einfache Konstruktionsmethode zur Formulierung von Berechnungsalgorithmen mit geringem Rechenaufwand.

2.3 Wir wollen abschließend noch auf zwei "Besonderheiten" der GIS-Varianzanalyse eingehen, die während der mathematischen Entwicklung des zwei-und dreifaktoriellen Falls aufgefallen sind:

a) Bei ungleichen Gruppenstärken muß das zufallsgenerierte Auffüllen der Anzahl der Meßwerte pro Gruppe auf einen für alle Gruppen konstanten Wert sinnvoll möglich sein (cf. Lindquist 1953:184).

b) Wie in Kapitel 2.2 gezeigt wurde (cf. 2.2.2.6), entfällt bei einer Reduktion des mehrfaktoriellen GIS-Designs auf den einfaktoriellen Fall der bei den trivialen Erweiterungen aufgetretene Term -(Mg-M) wie gefordert.

   Dieses Korrekturglied bildet die "Interaktionen des Gruppenfaktors" mit den Experimentaleffekten ab. Hier zeigt sich erneut der Vorteil der Leistungen der GIS-Varianzanalyse insofern, als dieses Korrekturglied bzw. seine inhaltliche Dimension bei der Interpretation der Ergebnisse <u>nicht</u> berücksichtigt werden muß, da das GIS-Design <u>alle</u> Wirkungen des "Gruppenfaktors" mit anderen Faktoren als Treatmenteffekte eliminiert und in den entsprechenden Fehlerterm miteinbezieht.

Im Rahmen dieser Arbeit konnten wir die theortische Ausweitung des GIS-Designs auf den n-faktoriellen Fall leider noch nicht leisten, da dazu der <u>allgemeine</u> Beweis der Reduktionsmöglichkeit des Korrekturglieds -(Mg-M) aussteht. <u>Theoretische Evaluation</u> und <u>Demonstration der Leistungen</u> der GIS-Varianzanalyse (das Rechnerprogramm VAGIS für diese Varianzanalyse* ist am HRZ Bielefeld implementiert, cf. Eckgold 1984)) werden zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen.

*Anfragen bitte an einen der beiden Autoren

LITERATUR

Bortz, J. 1977. Lehrbuch der Statistik. Berlin-Heidelberg-New York: Springer.

Diehl, J.M. 1977. Varianzanalyse. Frankfurt/M.: Fachbuchhandlung für Psychologie.

Eckgold, F. 1984. VAGIS - Handbuch: Varianzanalyse für Gruppen in Stufen Design. Version TR440.1. Anlage zum DFG-Abschlußbericht Das "Gruppen innerhalb Treatment" Design.

Feldt, L.S. 1958. A Comparison Of The Precision Of Three Experimental Designs employing a concomittant Variable. in: Psychometrika 23, 1958, 4, 335-353.

Glass, G.V., Stanley, J.C. 1970. Statisticl Methods In Education and Psychology. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

Groeben, N. 1972. Die Verständlichkeit von Unterrichtstexten. Münster: Aschendorff.

Keppel, E. 1973. Design and Analysis. A Researcher's Handbook. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

Klauer, K.J. 1973. Das Experiment in der pädagogischen Forschung. Düsseldorf: Schwann.

Klauer, K.J. 1979. Über Möglichkeiten der Experimentalforschung in Schulklassen. in: N. Kluge u. H. Reidel (Hrsg.) 1979. Das Experiment in der Erziehungswissenschaft. Darmstadt: WB.

Lindman, H.R. 1974. Analysis of variance in complex experimental designs. San Francisco: Freeman.

Lindquist, E.F. 1953. Design And Analysis of Experiments in Psychology and Education. Boston: Houghton Mifflin Company

Mittenecker, E. 1973[8]. Planung und statistische Auswertung von Experimenten. Wien: Verlag Franz Dentike.

Myers, J.L. 1972. Fundamentals of Experimental Designs. Boston: Allyn und Bacon, Inc.

Winer, B.J. 1970. Statistical Principles In Experimental Designs. London-New York-Sydney-Toronto: McGraw-Hill.