

Institut für Fluid- und Thermodynamik  
Lehrstuhl für  
Fluiddynamik und Strömungstechnik  
Universität Siegen

# Vorlesung

# „STRÖMUNGSLEHRE“

# Zusammenfassung

WS 2008/2009

Dr.-Ing. Jörg Franke



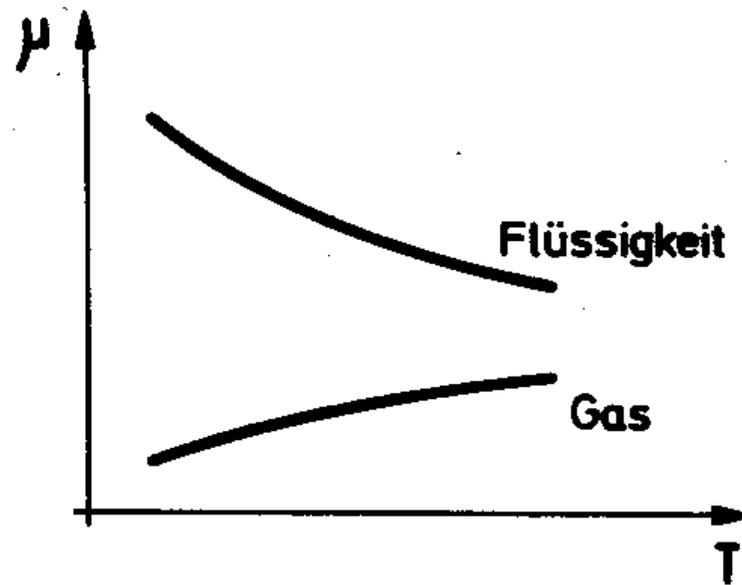
# Bewegung von Fluiden (= Flüssigkeiten und Gase)

- **Hydro- und Aerostatik**
  - => Druckverteilung in ruhenden Fluiden
  - => Druckverteilung in als Starrkörper rotierenden Fluiden
- **Reibungsfreie Strömungen**
  - => Euler- und Bernoulli Gleichung
- **Strömungen mit Reibung I**
  - => Impulssatz
- **Strömungen mit Reibung II**
  - => Druckverluste in Leitungssystemen, Rohrströmung



# Stoffeigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen

## Dynamische Viskosität $\mu$ (innere Reibung)



## Kinematische Viskosität $\nu$

$$\nu = \mu / \rho$$



# Stoffeigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen

Flüssigkeiten als inkompressibel ( $\rho = \text{konst.}$ )

Zustandsgleichung für ideale Gase

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{m} \cdot T \quad \mathbf{R} = \frac{R}{m} = c_p - c_v \quad ; \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

T = absolute Temperatur

R = allgemeine (molare) oder universelle Gaskonstante

**R** = spezifische Gaskonstante

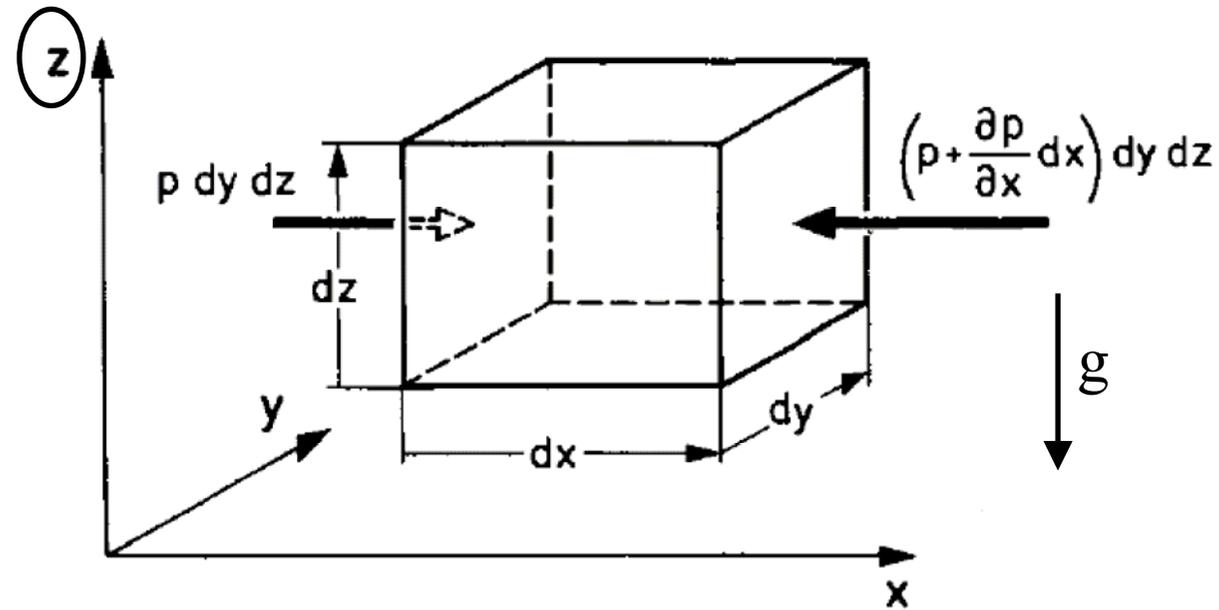
m = Molmasse in g/mol

$c_p$  = spezifische Wärme bei konstantem Druck

$c_v$  = spezifische Wärme bei konstantem Volumen



# Hydro- und Aerostatik



$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f_z$$

Massenkraft:

$$\vec{f} = \{f_x, f_y, f_z\}$$

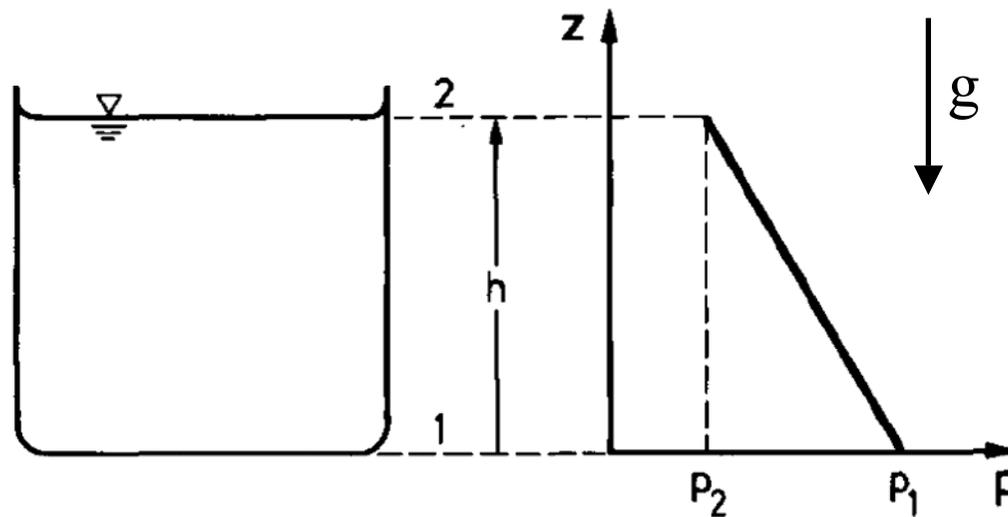


# Hydro- und Aerostatik

Druckverteilung in ruhenden, inkompressiblen Fluiden

=> Nur Schwerkraft:  $\vec{f}_s = \{0, 0, -g\}$

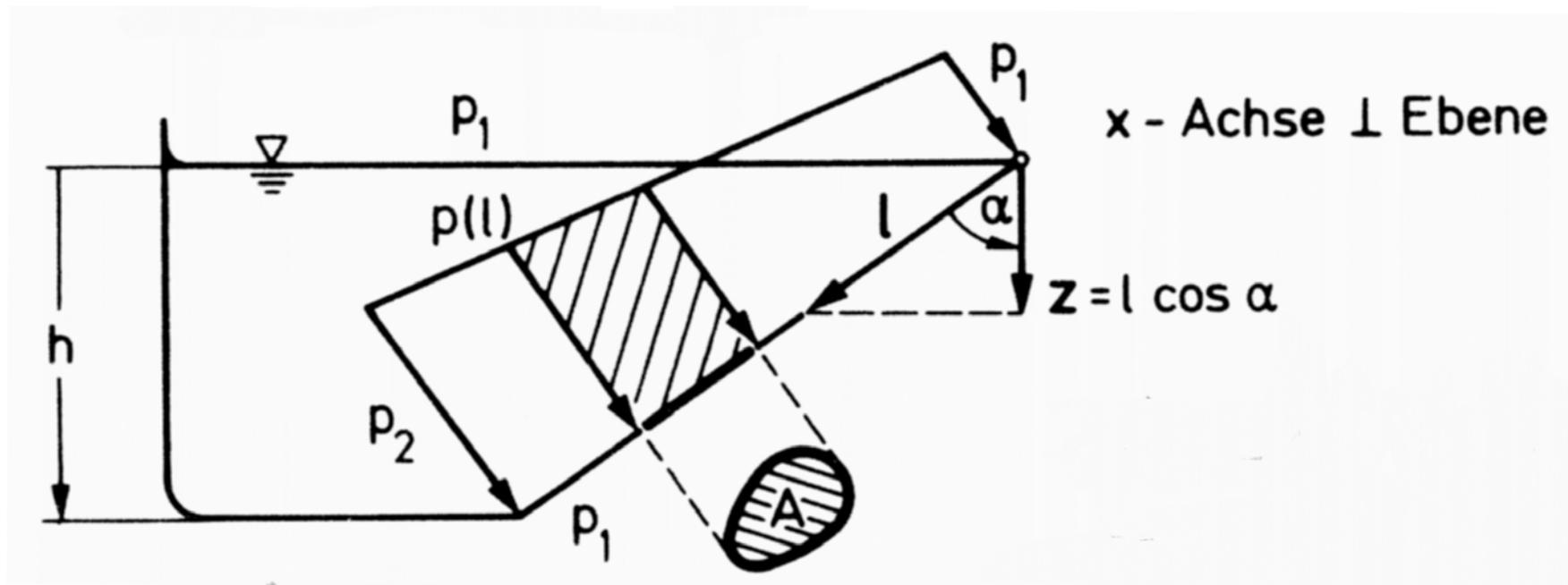
$$p_1 = p_2 + \rho g h$$



# Hydro- und Aerostatik

Druckverteilung in ruhenden, inkompressiblen Fluiden

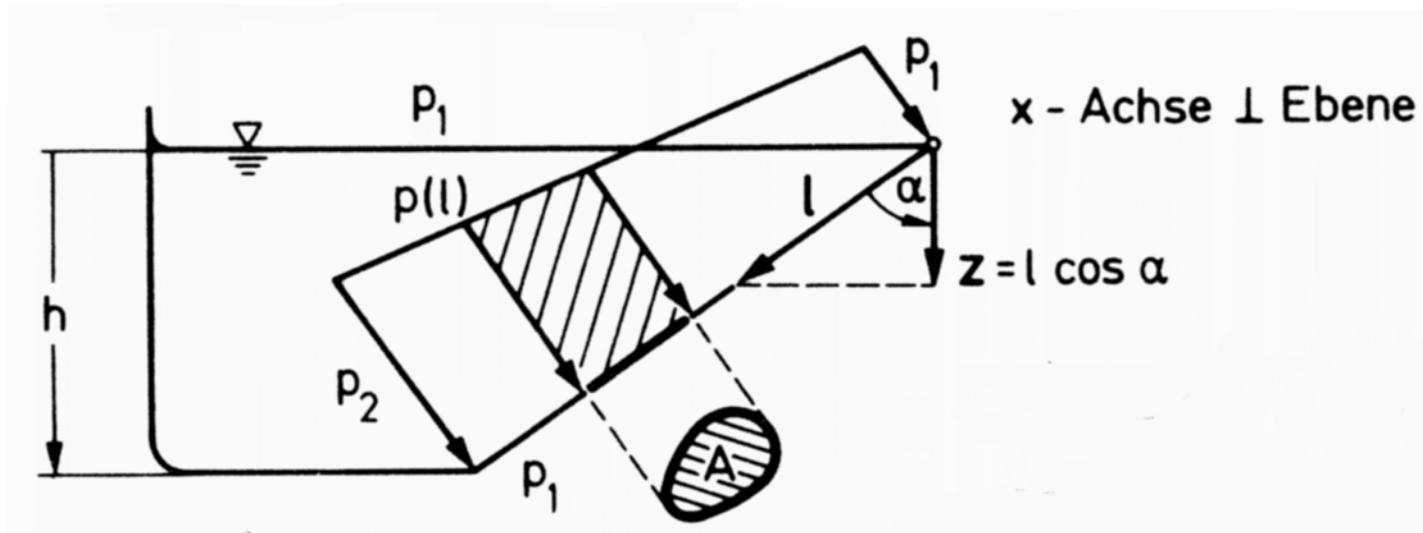
=> Anwendung z.B. Berechnung der (Druck-) Kraft



# Hydro- und Aerostatik

Druckverteilung in ruhenden, inkompressiblen Fluiden

⇒ Anwendung z.B. Berechnung der (Druck-) Kraft  
(wirkt immer SENKRECHT zur Fläche!)



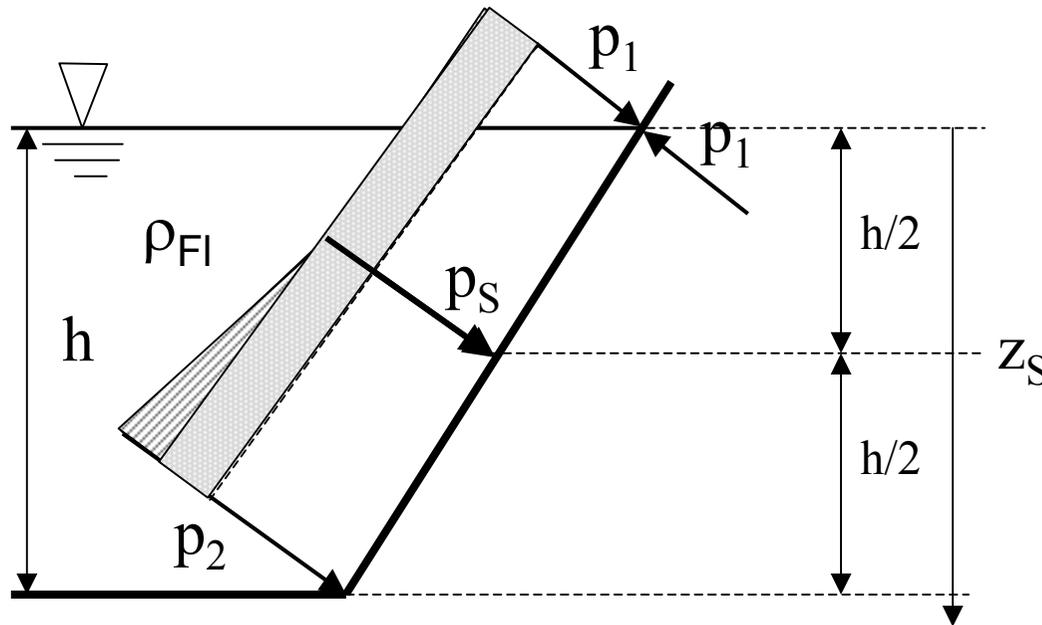
Druckkraft entweder durch Integration über Fläche, ODER

# Hydro- und Aerostatik

Druckverteilung in ruhenden, inkompressiblen Fluiden

⇒ Anwendung z.B. Berechnung der (Druck-) Kraft

$$\left| \vec{F}_D \right| = p_s \cdot A \quad p_s = p_1 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot z_s$$



Für Moment:

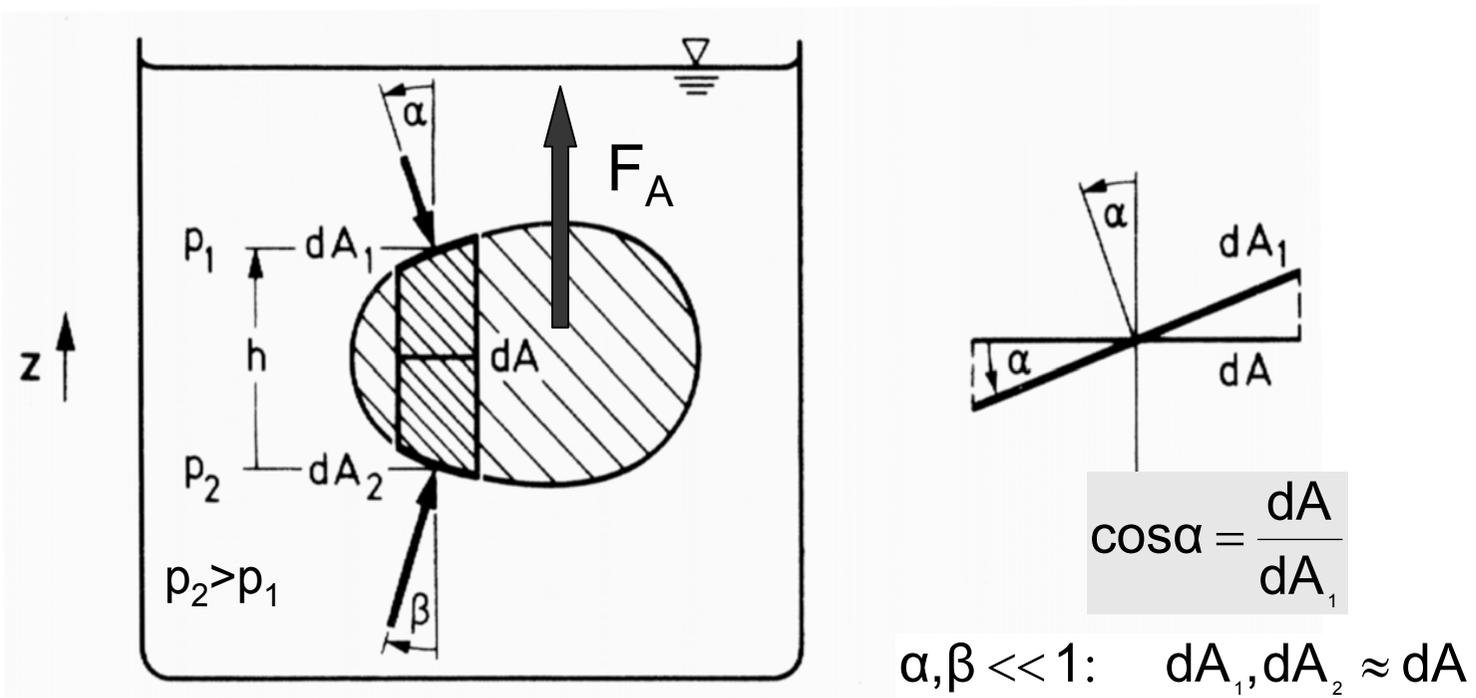
Der Angriffspunkt dieser Druckkraft  $F_{res}$  liegt stets unterhalb des Flächenschwerpunktes

ODER: Moment durch Integration!



## Hydrostatischer Auftrieb. Druckkraft auf gekrümmte Flächen.

Auf Grund der hydrostatischen Druckverteilung erfährt ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper einen **AUFTRIEB** (= resultierende Druckkraft auf den Körper!)

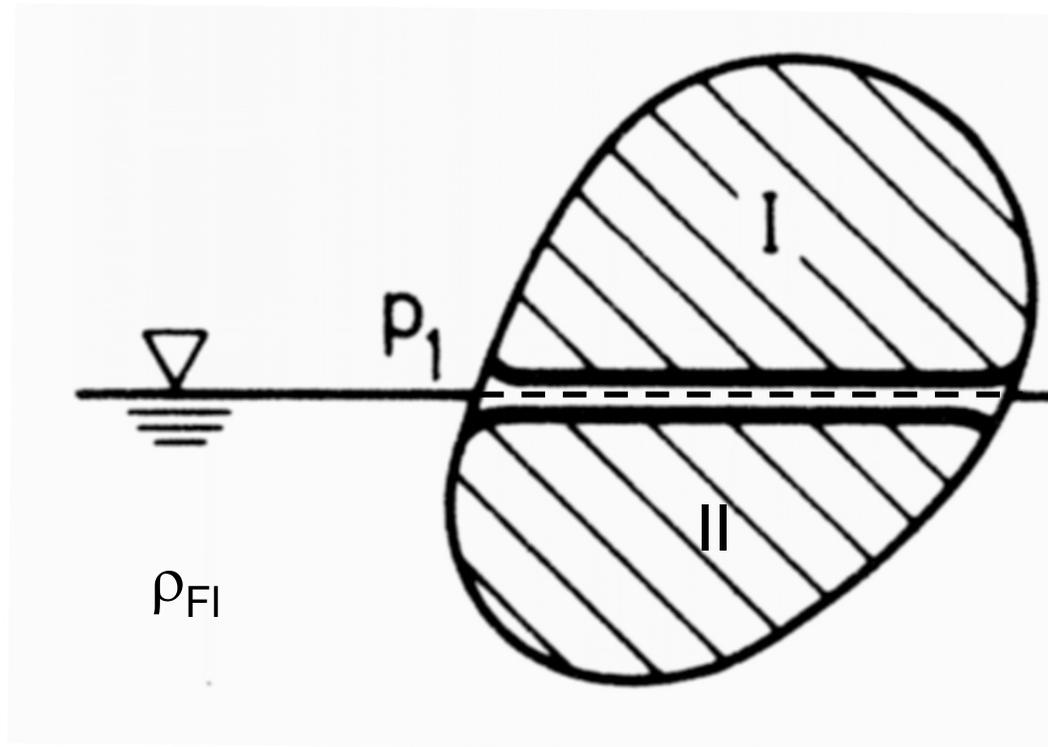


Auftrieb = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V_{\text{Körper}}$$



Das Archimedische Prinzip gilt auch für teilweise eingetauchte Körper



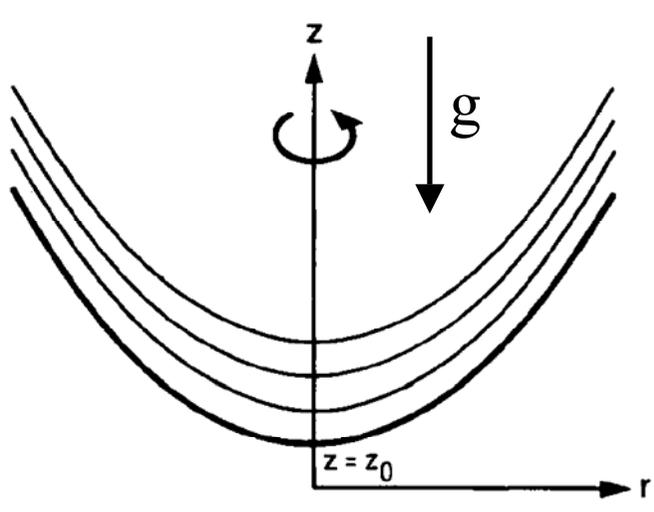
auf Volumen  $V_I$  wirkt überall  $p_1 \rightarrow F_{Dres} = 0$

$$\text{Auftrieb} = F_{Dres} = \rho_{FI} \cdot g \cdot V_{II}$$

# Hydro- und Aerostatik

Druckverteilung in als Starrkörper rotierenden, inkomp. Fluiden

=> Schwerkraft und Zentrifugalkraft:  $\vec{f}_s = \{0, 0, -g\}$



$$\vec{f}_z = \{\omega^2 x, \omega^2 y, 0\}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$p(x, y, z) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) - g \rho z + \text{konst.}$$

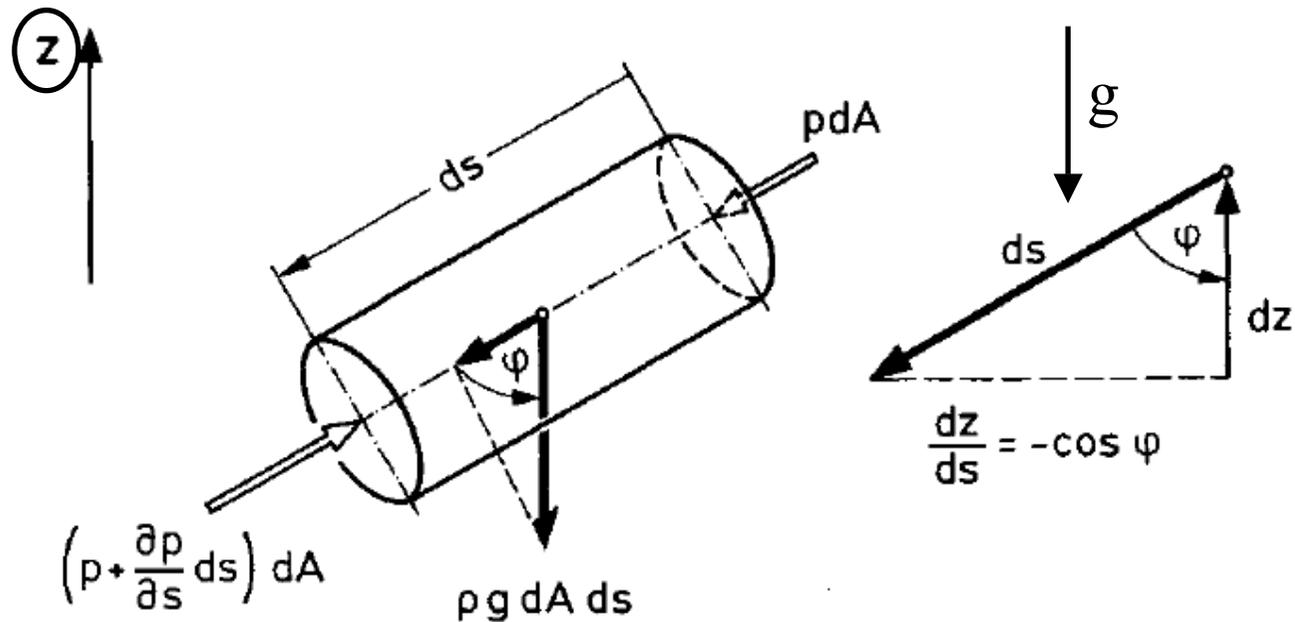


# Reibungsfreie Strömungen

Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung):

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2 = \text{konst} \quad \boxed{\dot{m} = \rho \cdot c \cdot A = \text{konst}}$$

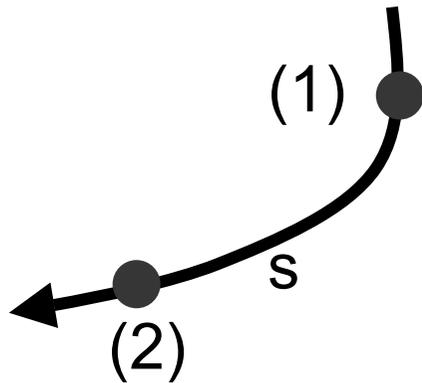
Kräftebilanz längs Stromfaden:



## Reibungsfreie Strömungen

=> EULER Gleichung: 
$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{s}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{s}} - g \cdot \frac{dz}{ds}$$

Integration längs des Stromfadens => Bernoulli Gleichung:



$$\frac{c^2}{2} + \int^p \frac{dp}{\rho} + g \cdot z = \text{konst.}$$

Stationärer Fall!



Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{dp}{\rho}$$

in der Bernoulli-Gleichung

a) Isobar:  $\int \frac{dp}{\rho} = 0$

b) Isochor:  $\rho = \text{konst.}$  (inkompressibel)

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho}$$

c) Isotherm:  $T = \text{konst.}$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{R}{m} \cdot T \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$

d) Isentrop:

$$\int \frac{dp}{\rho} = -\frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]$$

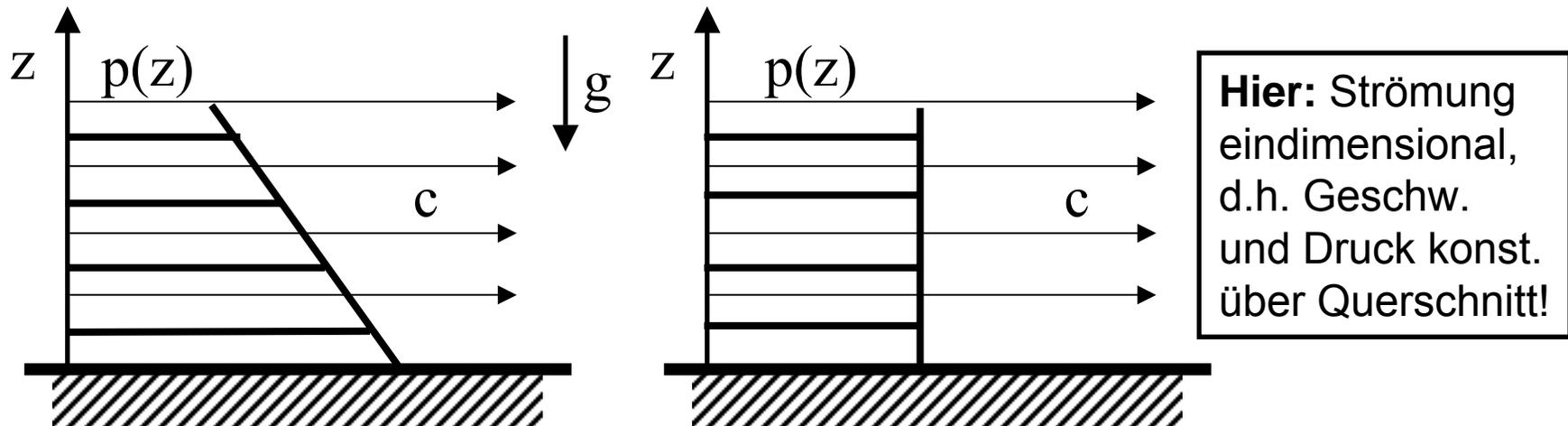


# Reibungsfreie Strömungen

Aus Gleichgewicht senkrecht zum Stromfaden:

Gekrümmte Stromfäden üben Kräfte aufeinander aus!

⇒ Bei parallelen Stromfäden ist Druck quer zum Stromfaden konstant, **WENN keine Schwerkraft!** Sonst Druck über Hydrostatik (=> Bernoullikonstante variiert von Stromfaden zu Stromfaden).



## Die verschiedenen Druckbegriffe und ihre Messung

- stationäre, inkompressible Strömung im Schwerfeld
- Bernoulli-Gleichung liefert Verknüpfung von Druck  $p$  und Geschwindigkeit  $c$  längs Stromfaden:

$$\frac{\rho}{2} \cdot c^2 + p + \rho \cdot g \cdot z = \text{konst.}$$

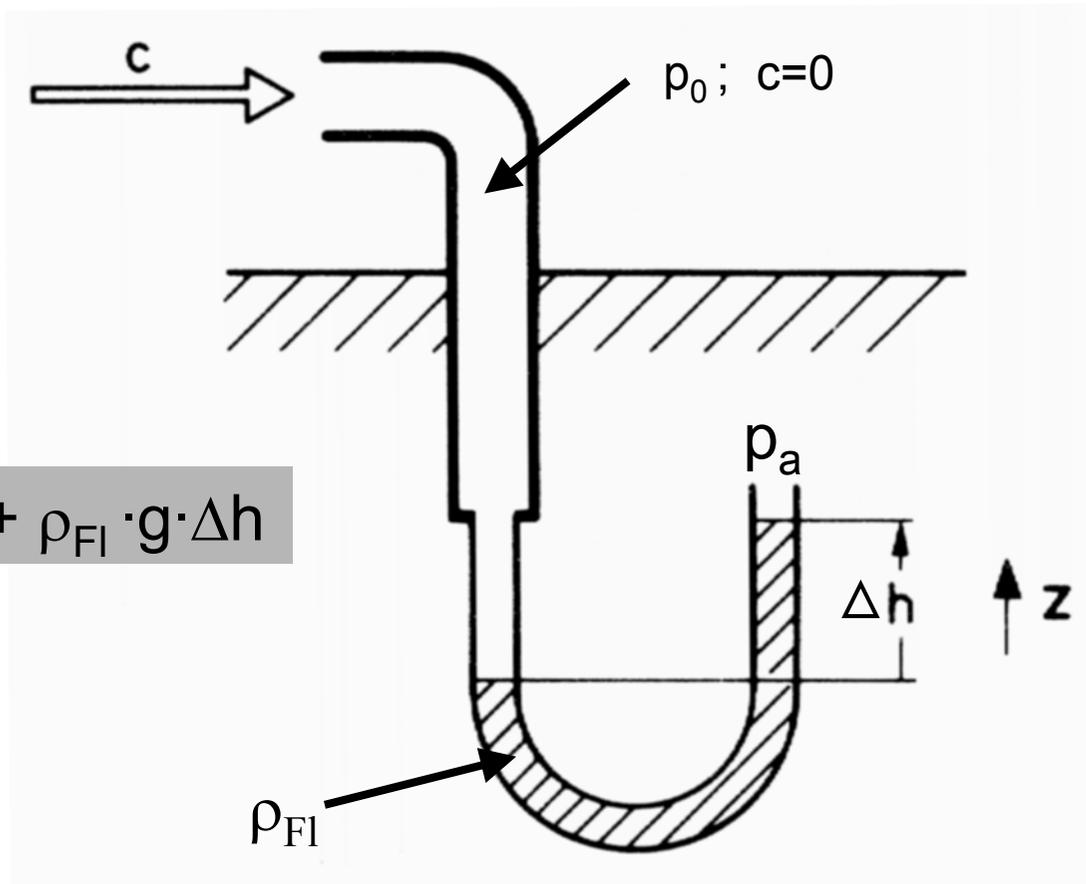
<u>Bezeichnungen:</u>	$p = p_{\text{stat}}$ :	<u>statischer</u> Druck
	$\frac{\rho}{2} \cdot c^2 = p_{\text{dyn}}$ :	<u>dynamischer</u> Druck
	$p = p_0$ :	Ruhe-/Gesamtdruck



# Messung des Ruhe- oder Gesamtdruckes

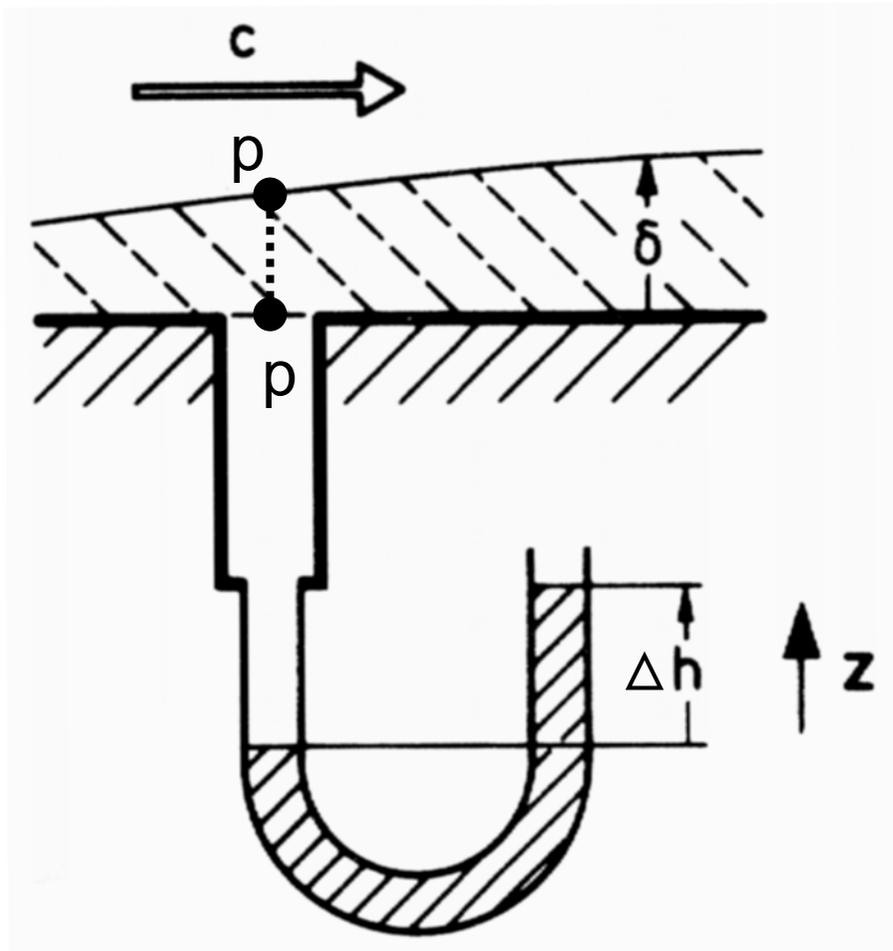
--- mit PITOT-Sonde (Hackensonde)

$$p_0 = p_a + \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot \Delta h$$



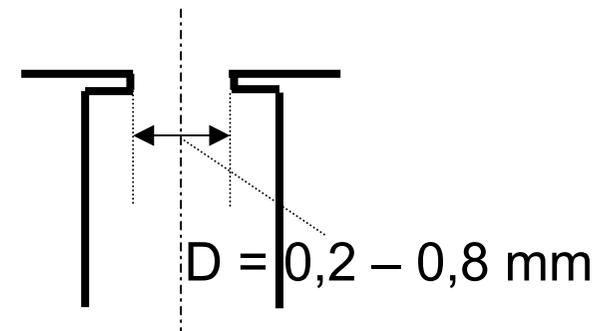
# Messung des statischen Druckes

---über Wandanbohrung



---Druck am Grenzschichttrand prägt sich der Grenzschicht bis zur Wand auf

Detail der Wandanbohrung:



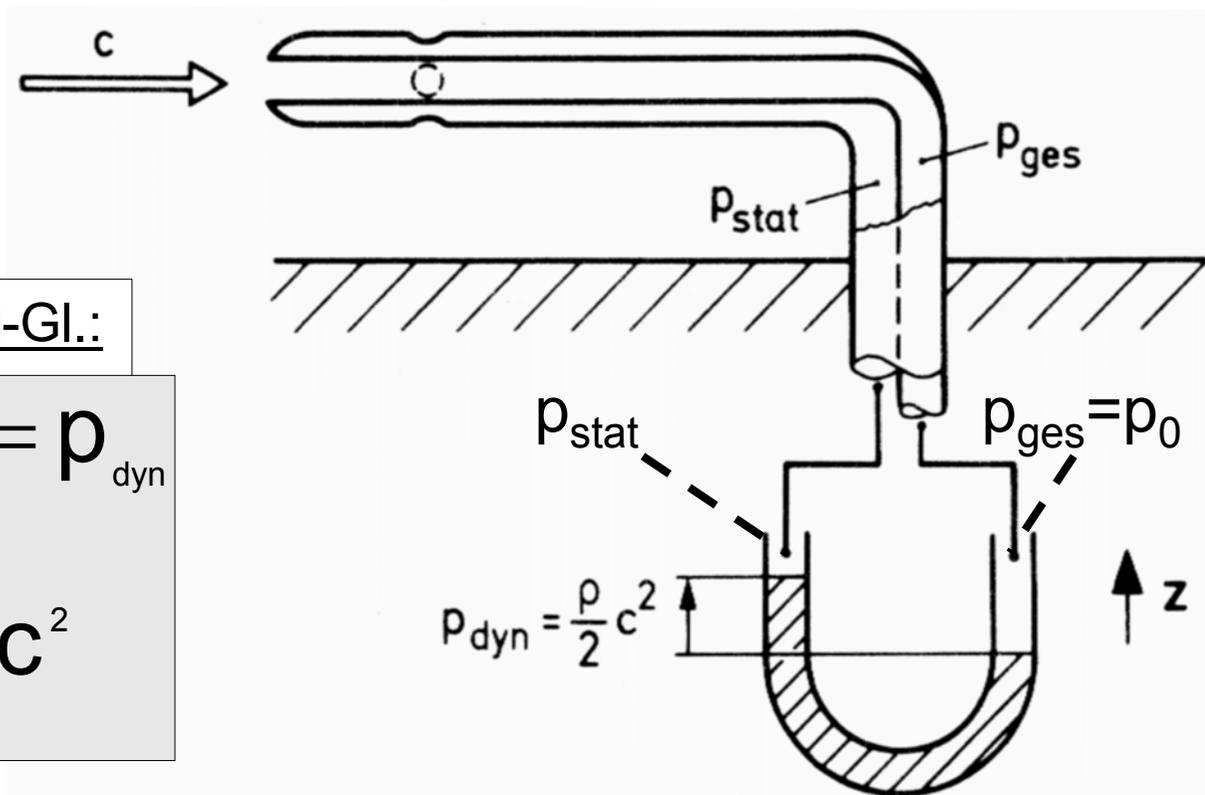
# Messung des dynamischen Druckes

- mit PRANDTL-Rohr (Prandtl-Sonde, Prandtl'sches Staurohr)
- Kombination aus Pitot-Rohr und statischer Drucksonde

Aus Bernoulli-Gl.:

$$p_0 - p_{\text{stat}} = p_{\text{dyn}}$$

$$p_{\text{dyn}} = \frac{\rho}{2} \cdot c^2$$



# Strömungen mit Reibung I – Impulssatz

Massenerhaltung in integraler Form:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV + \int_A \rho \cdot (\vec{w} \cdot \vec{n}) \cdot dA = 0$$

Massenänderung  
im Innern von V

Massenstrom durch die  
Oberfläche A von V

Für stationäre Strömung:

$$\dot{m}_{\text{resultierend}} = \int_A \rho \cdot (\vec{w} \cdot \vec{n}) \cdot dA = 0$$



# Impulssatz mit Anwendungen

Vorraussetzung: stationäre Strömungen (Reibung möglich)

$$\vec{F}_I + \sum \vec{F}_A = 0$$

**Nur Daten auf Rand (A) des Kontrollraums (V) notwendig!**

• **Impulskraft**  $\vec{F}_I = - \int_A \rho \cdot \vec{w} \cdot (\vec{w} \cdot \vec{n}) \cdot dA$  ins Innere gerichtet  
parallel zu  $\vec{w}$

• Äußere Kräfte (z.B. Gewichtskraft, **Druckkraft**)

$$\vec{F}_D = - \int_A p \cdot \vec{n} \cdot dA$$

ins Innere gerichtet  
parallel zu  $\vec{n}$



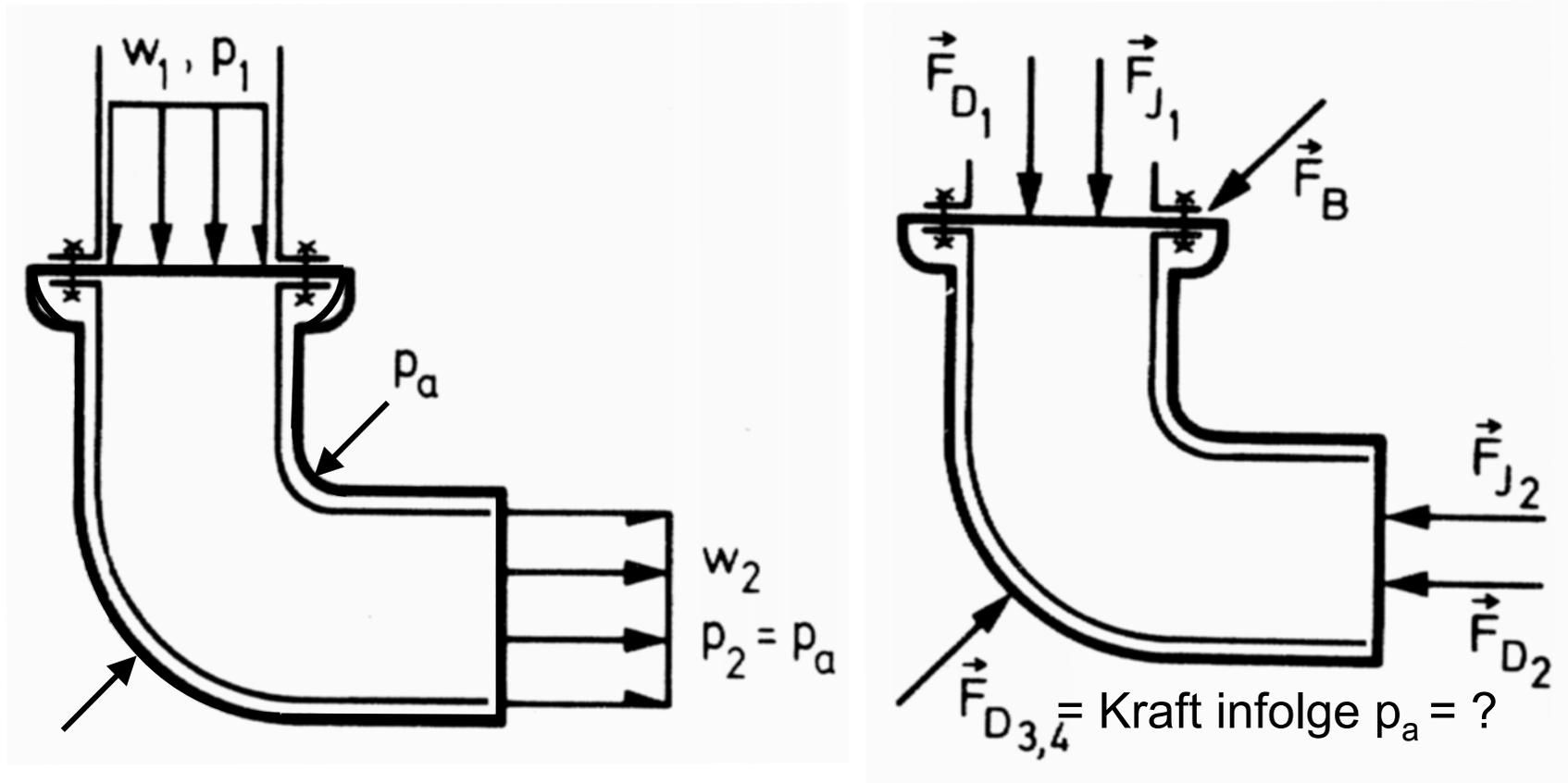
# Impulssatz mit Anwendungen

## Vorgehensweise:

1. Wahl des Kontrollraums (V) (Erfahrung; gesuchte Größen freischneiden; gegebene Größen)
2. Eintragen der angreifenden Kräfte
3. Aufstellen des Impulssatzes (Kräftebilanz)
4. Berechnung der einzelnen Kräfte
5. Auflösen nach der gesuchten Kraft (Vektor => Betrag und Richtung, bzw. Komponenten)



## Rohrkrümmer frei ausblasend



**Vor.:** stationär, inkompressibel, **ohne Schwerkraft**

Geschwindigkeiten  $w_1$ ,  $w_2$  und die Drücke  $p_1$ ,  $p_2$  seien bekannt und konstant über die Querschnitte 1 und 2.

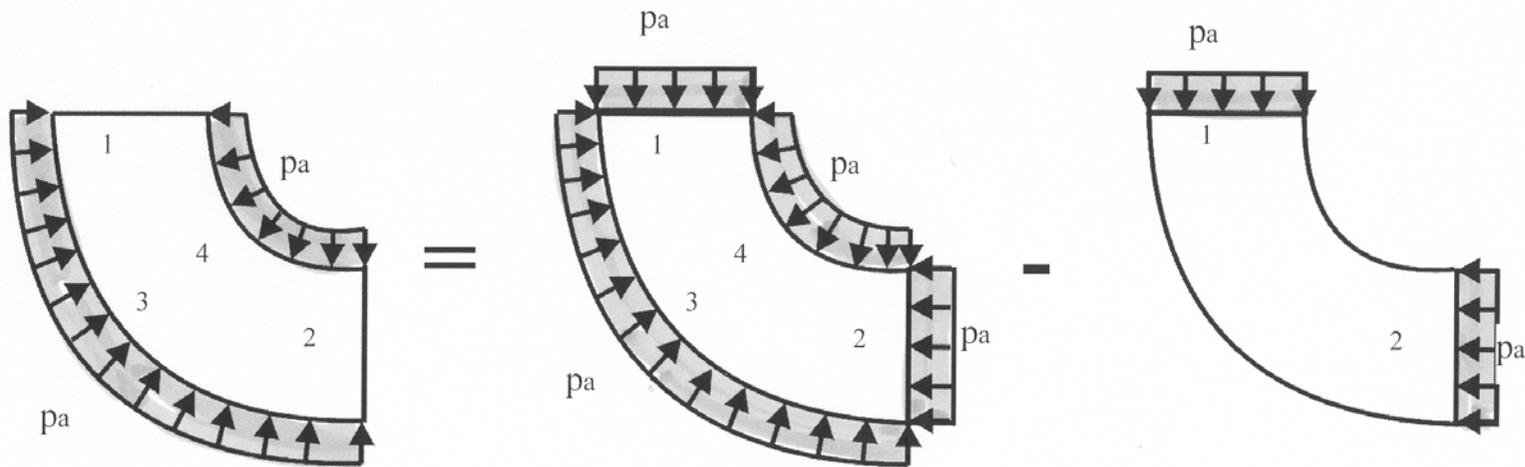
**Gesucht:** Die Haltekraft  $F_B$ , mit der der Krümmer in (1) angeflanscht werden muß.



## 2. Geändertes Problem:

## Rohrkrümmer sei frei ausblasend

Bestimmung der Druckkraft  $F_{D3,4}$  infolge des Außendruckes  $p_a$  auf den Krümmerrmantel:

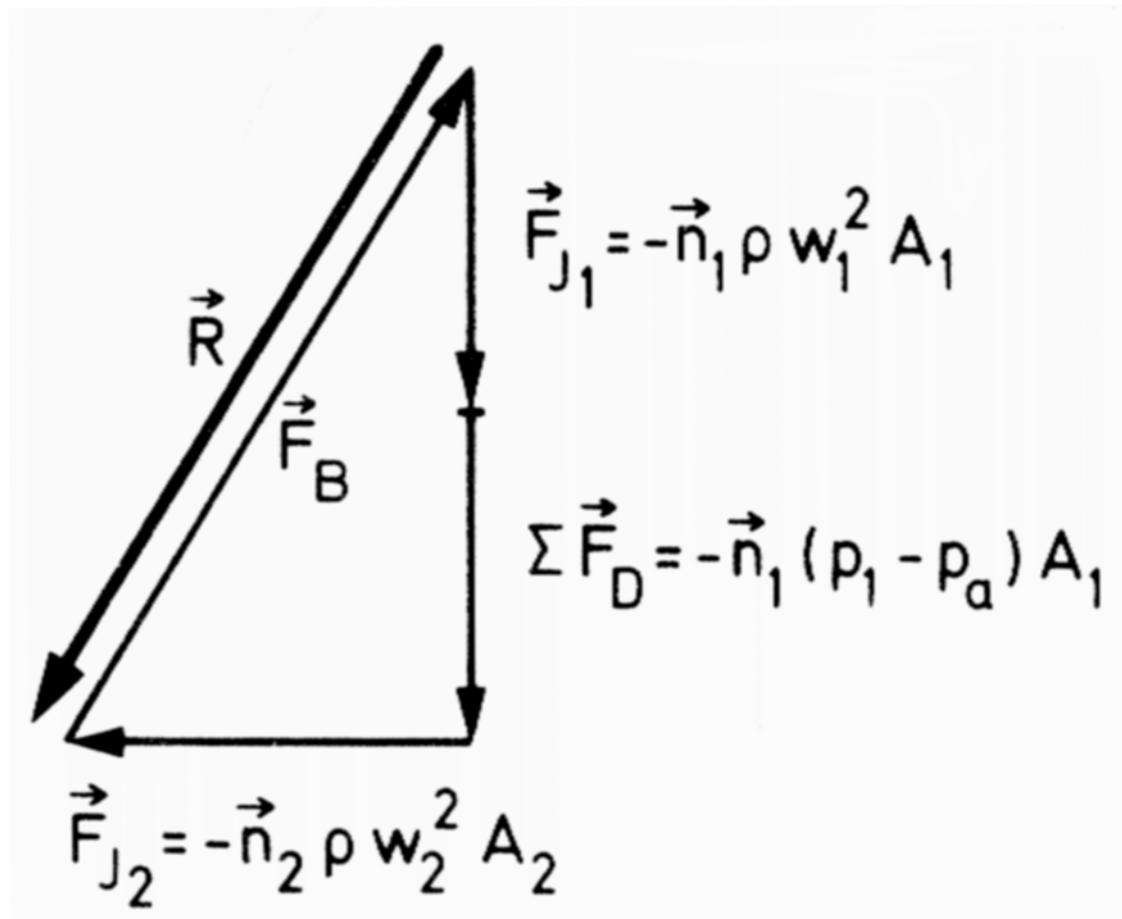


$$\vec{F}_{3,4} = - \underbrace{\int_{A1+A2+A3,4} p_a \cdot \vec{n} \cdot dA}_{= 0, \text{ da geschlossene Oberfläche}} - \left\{ - \int_{A1} p_a \cdot \vec{n} \cdot dA - \int_{A2} p_a \cdot \vec{n} \cdot dA \right\}$$

$$= +p_a \cdot \vec{n}_1 \cdot A_1 + p_a \cdot \vec{n}_2 \cdot A_2$$

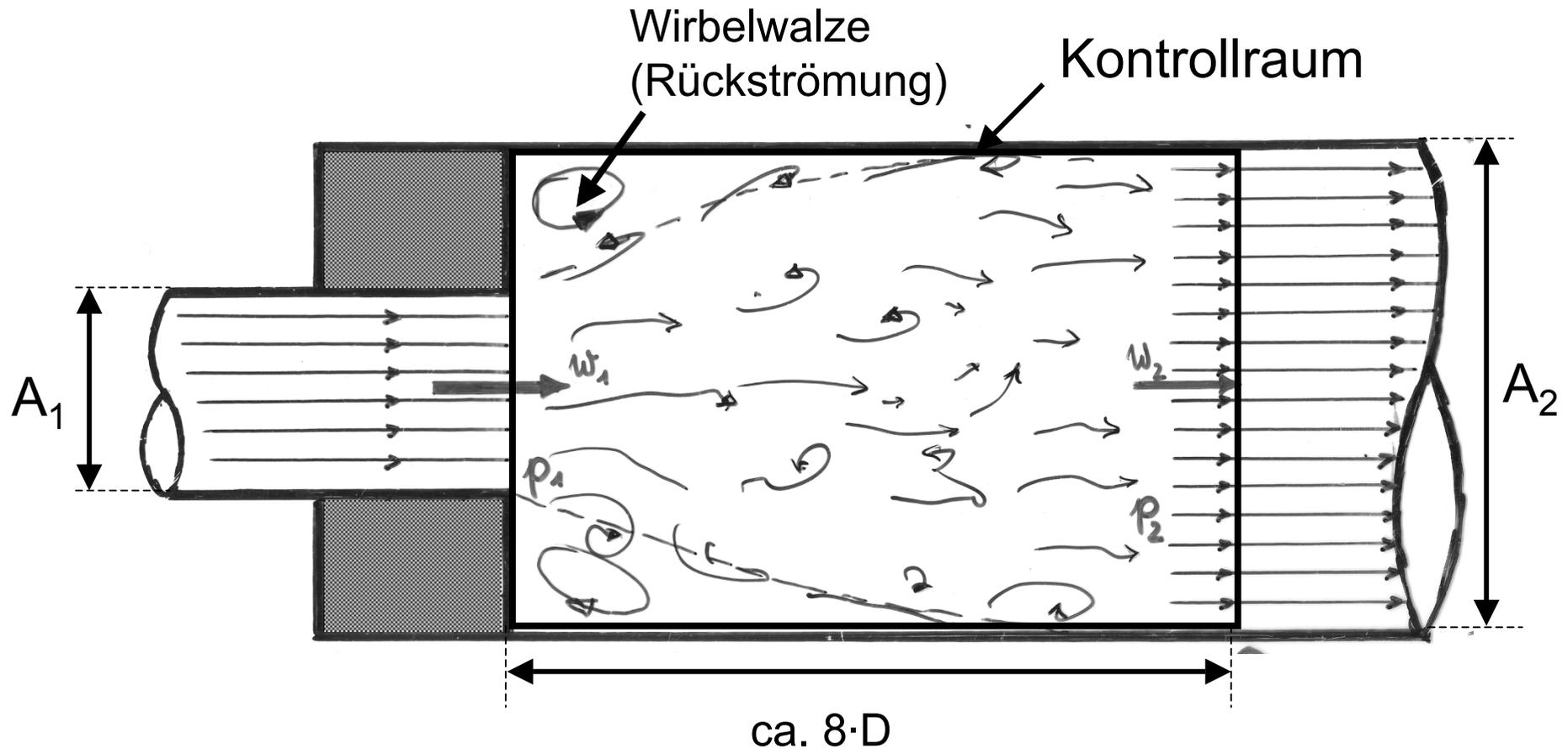
## 2. Geändertes Problem: Rohrkrümmer sei frei ausblasend

Graphische Addition der Kraftvektoren:



# CARNOTscher Stoßdiffusor

= plötzliche Erweiterung



Frage: Welcher Druckverlust tritt infolge der plötzlichen Erweiterung auf?  
inkompressible Strömung:  $\rho = \text{konstant}$

$$\Delta p_{Carnot} = \frac{\rho}{2} \cdot \underbrace{w_1^2}_{c_m^2} \cdot \underbrace{2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)}_{\zeta_V}$$



## Strömungen mit Reibung II – Druckverluste

Vorr.: Stationäre Strömung eines reibungsbehafteten, inkompressiblen, NEWTONschen Fluids

⇒ Allgemeine Form des Druckverlusts (ohne Schwerkraft)

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \zeta_V$$

$c_m$ :	volumetrischer Mittelwert der Geschwindigkeit
$\zeta_V$ :	Verlustkoeffizient

⇒ Allgemeine Form des Druckverlusts (mit Schwerkraft)

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_m^2 \cdot \zeta_V \pm \rho g h$$

mit:  $h$  = Höhendifferenz zwischen 1 und 2  
Vorzeichen aus Hydrostatik ( $c_m = 0$ )



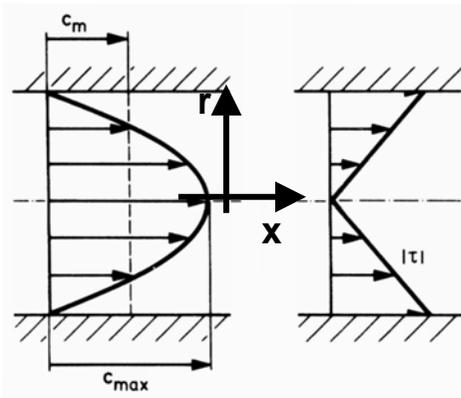
## Strömungen mit Reibung II – Druckverluste

Ausgebildete Rohrströmung (Einbauten wie Krümmer additiv):

- Laminar ( $Re_D < 2300$ ): HAGEN-POISEUILLE Strömung

$$\zeta_V = \frac{L}{D} \cdot \lambda_{lam} \quad \text{mit} \quad \lambda_{lam} = \frac{64}{Re_D} \quad \text{und} \quad Re_D = \frac{c_m \cdot D}{\nu}$$

analytische Berechnung von  $c(r)$  und  $\tau(r)$ :



$$c(r) = \frac{\Delta p}{L} \cdot \frac{R^2}{4 \cdot \mu} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = c_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$c_{\max} = 2 \cdot c_m$$

$$\tau(r) = \mu \frac{dc}{dr} = -2c_{\max} \frac{r}{R^2}$$



## Strömungen mit Reibung II – Druckverluste

Ausgebildete Rohrströmung (Einbauten wie Krümmer additiv):

- Turbulent ( $Re_D > 2300$ ): zeitliche Mittelwerte!

$$\Delta \bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \frac{\rho}{2} \cdot \bar{c}_m^2 \cdot \zeta_V \quad \text{mit} \quad \zeta_V = \frac{l}{D} \cdot \lambda_{turb}$$

hydraulisch glatte Rohre:

Blasius Formel:  
(bis  $Re_D \approx 10^5$ )

$$\lambda_{turb} = \frac{0,3164}{(Re_D)^{\frac{1}{4}}} \quad Re_D = \frac{\bar{c}_m D}{\nu}$$

Prandtl Formel:  
(bis  $Re_D \approx 3 \cdot 10^6$ )

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{turb}}} = 2 \cdot \log_{10} \left\{ Re_D \cdot \sqrt{\lambda_{turb}} \right\} - 0,8$$



# Strömungen mit Reibung II – Druckverluste

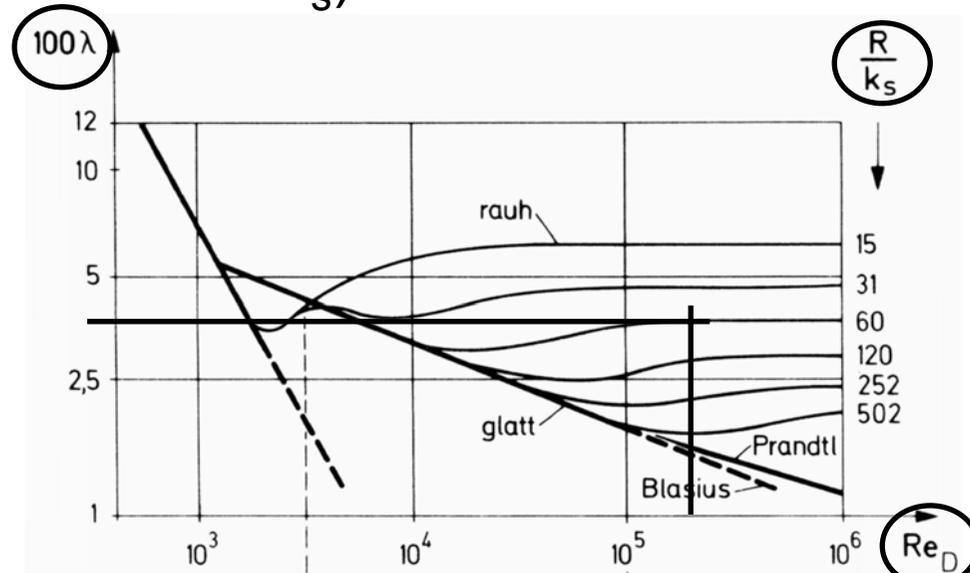
Ausgebildete Rohrströmung (Einbauten wie Krümmer additiv):

- Turbulent ( $Re_D > 2300$ ): zeitliche Mittelwerte!

$$\Delta \bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \frac{\rho}{2} \cdot \bar{c}_m^2 \cdot \zeta_V \quad \text{mit} \quad \zeta_V = \frac{l}{D} \cdot \lambda_{turb}$$

raue Rohre (Sandkornrauheit  $k_s$ ):

NIKURADSE  
Diagramm



# Klausuren

## Klausur im Fach "Einführung in die Fluid- und Thermodynamik Teil: Fluiddynamik" WS 2008/09 (1. Termin)

Datum: Samstag, 31. Januar 2009  
Räume: PB-A 117  
Beginn: 8:25 Uhr  
Dauer: 2 Stunden

### Wichtige Hinweise:

Als **Hilfsmittel** in der Prüfung sind zugelassen:

Vorlesungsskript, Vorlesungsmitschriften, Übungsaufgaben + Lösungen, alte Klausuraufgaben + Lösungen, Taschenrechner und Formelsammlungen.

## Klausur im Fach "Strömungslehre" WS 2008/09 (1. Termin)

Datum: Donnerstag, 5. Februar 2009  
Räume: PB-C 101 (AULA)  
PB-A 406  
Beginn: 15:30 Uhr  
Dauer: 2 Stunden

### Wichtige Hinweise:

Als **Hilfsmittel** in der Prüfung sind zugelassen:

Vorlesungsskript, Vorlesungsmitschriften, Übungsaufgaben + Lösungen, alte Klausuraufgaben + Lösungen, Taschenrechner und Formelsammlungen.

Die **Teilnahme an der Klausur** ist nur nach ordnungsgemäßer Anmeldung via Internet oder im Prüfungsamt möglich.



**Viel Erfolg und DANKE für die – meist – ungeteilte  
Aufmerksamkeit.**

