Mathematisches Denken

Begegnungen von Mathematik und Philosophie



Das Romseminar 2017

Arbeitsgemeinschaft Funktionalanalysis
Eberhard Karls Universität Tübingen

&

Funktionalanalysis und Philosophie der Mathematik
Universität Siegen

&

DreMatrix Gruppe der Fakultät Informatik/Mathematik
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

&

Arbeitsbereich Analysis
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Organisation:

Britta Dorn	<britta.dorn@uni-tuebingen.de>
Gregor Giesen	<grgi@fa.uni-tuebingen.de>
Markus Haase	<haase@math.uni-kiel.de>
Michael Korey	<michael.korey@skd.museum>
Rainer Nagel	<rana@fa.uni-tuebingen.de>
Gregor Nickel	<nickel@mathematik.uni-siegen.de>
Markus Wacker	<wacker@informatik.htw-dresden.de>

Redaktion:

Gregor Giesen	<grgi@fa.uni-tuebingen.de>
Reinhardt A. W. Maier	<rema@fa.uni-tuebingen.de>

Internet:

https://www.romseminar.de

Inhaltsverzeichnis

1 Paradoxien des Unendlichen **1**
René Rogge, Marius Schumacher, Tim Waring

2 Was sind und was sollen Probleme? **11**
Erma Kurtagić

3 Vögel und Frösche - Mathematik aus verschiedenen Perspektiven **19**
Viktoria Kühner, Kari Küster

4 Das vierdimensionale Paradies – Dante e la Matematica **29**
Annachiara Piubello

5 The effectiveness of mathematics as a philosophical problem **35**
Jan van Neerven

6 Mathematik – Eine Form der Erkenntnis **47**
Daniel Rompf

7 Mathematik als göttliche Eingebung **57**
Riana Cojocaru, Tim Krake

8 Mathematik in China **77**
Jens Borgemeister

9 Kategorientheorie – eine Alternative zur Mengenlehre? **81**
Thomas Röhl

10 Die dunkle Seite - Über die angewandte Mathematik **85**
Niko Schmidt

11 Experimentelle Mathematik **95**
Patrick Hermle

12 Die Mathematik in der Künstlichen Intelligenz **103**
Arwed Steuer

13 Kurzer Beispielstitel **109**
Wiete Keller, Henrik Valett

Vorwort

So kann also die Mathematik definiert werden als diejenige Wissenschaft, in der wir niemals das kennen, worüber wir sprechen, und niemals wissen, ob das, was wir sagen, wahr ist.

Bertrand Russell (1872–1970)

Dem pessimistischen, vermutlich aber auch nur ironischen *statement* Bertrand Russells zum Trotz wagte das Romseminar 2017 zwar nicht, eine alternative Definition von „Mathematik“ zu geben, jedoch in vielfältiger Weise der schlichten Frage nachzugehen: „Was ist das eigentlich, Mathematik?“

Seit mehr als 6000 Jahren wird die menschliche Kulturgeschichte von Mathematik begleitet, machen Menschen auf unterschiedlichstem Niveau Mathematik. Als (moderne) Mathematiker denken wir uns Mathematik (aus), denken wir mathematische Objekte und denken über deren Beziehungen untereinander nach. Aber was ist eigentlich der Gegenstand bzw. was sind die Objekte dieses Denkens? Existieren sie auch unabhängig von diesem Denken, werden sie entdeckt oder geschaffen? Und was ist die charakteristische Art und Weise, wie sich dieses Denken vollzieht? Was kennzeichnet ein solches „mathematisches Denken“ und hat es auch außerhalb der Mathematik seine Berechtigung?

Ausgehend von diesen und verwandten Fragen wurde im Romseminar der Versuch unternommen, einmal nicht nur „Mathematik zu denken“, sondern *über* Mathematik *(nach)*zudenken, also im besten Sinne Philosophie der Mathematik zu betreiben. Unter anderem ging es dabei um folgende Aspekte:

- In welchem Sinne „gibt“ es Zahlen, Kreise, Dreiecke, stetige Funktionen, Integrale...?
- Was ist ein mathematischer Beweis? Was und wie beweist ein mathematischer Beweis? Können z.B. Bilder beweisen?
- Welche Streitfragen gab und gibt es unter Mathematikern? Welche Rolle spielen Widersprüche für die Mathematik?
- Was heißt es, Mathematik anzuwenden, und warum bzw. inwiefern funktioniert das (oft)?
- Gibt es schöne und hässliche Mathematik und welche Rolle spielen ästhetische Wertungen für die mathematische Praxis?
- Welche unterschiedlichen Stile gibt es in der Mathematik?

- Welche Rolle spielt die Mathematik für moderne Gesellschaften? Gibt es „gute“ bzw. „schlechte“ Mathematik? Unter welchen normativen Vorgaben wird Mathematik betrieben?

Im Jahr 2017 wurde das Romseminar bereits zum elften Mal in Kooperation der Hochschulen in Dresden, Siegen und Tübingen veranstaltet, zum zweiten Mal war auch eine Gruppe aus Kiel dabei, so dass das Seminar nun Studierende aus allen vier Himmelsrichtungen Deutschlands zusammenführt. Der vorliegende Band enthält die schriftliche Ausarbeitung einiger der im Romseminar 2017 gehaltenen studentischen Vorträge und repräsentiert so die Vielfalt der Themen.

Ein vielseitiges Begleitprogramm mit philosophisch-mathematischen Begegnungen an sonst nicht zugänglichen Orten in Rom bereicherte dieses insgesamt 22. Romseminar. Ein ganz herzlicher Dank gilt dem Direktor der *Deutschen Akademie Villa Massimo*, Dr. Joachim Blüher, für die immer wieder neue und überraschende Facetten der Akademie erschließende virtuose Führung, Frau Dr. Susanne Kubersky-Piredda, für die beeindruckende Führung durch das Programm der Fresken in der *Villa Zuccari*, dem Bibliothekar der ehrwürdigen *Bibliotheca Apostolica Vaticana*, Dr. Adalbert Roth für faszinierende Einblicke in mittelalterliche Handschriften und Pater David Brown für die ebenso kurzweilige wie tiefgründige Führung durch die Vatikanische Sternwarte in *Castel Gandolfo*. Ein besonderer Dank gilt dottoressa Carla Perazzoli und Prof. Dr. Klaus Engel für die perfekte Gestaltung der Samstagsexkursion an den *Lago di Nemi* und nach *Genzano di Roma*.

Das Romseminar durfte auch im Jahr 2017 die bewährte Gastfreundschaft Römischer Institutionen genießen und auf diese Weise verschiedene interessante Orte der Stadt jenseits der touristischen Hauptrouten erkunden. Im einzelnen gilt unser Dank der *Deutschen Akademie Villa Massimo*, der *Bibliotheca Hertziana*, der *Bibliotheca Apostolica Vaticana* und vor allem der traditionsreichen *Accademia Nazionale dei Lincei*.

Für die finanzielle Unterstützung danken wir schließlich dem DAAD, dem Departement Mathematik der Universität Siegen, dem Mathematischen Institut der Universität Tübingen, dem Akademischen Auslandsamt, der Fakultät Informatik der HTW Dresden, der Firma d-fine sowie den großzügigen Spendern unter den ehemaligen Teilnehmern des Romseminars.

Mathematik ist Tapferkeitsluxus der reinen Ratio, einer der wenigen, die es heute gibt.

Robert Musil *(1880–1942)*

Markus Haase, Kiel
Rainer Nagel, Tübingen
Gregor Nickel, Siegen
Markus Wacker, Dresden

Programm

Montag, 27. Februar 2017 – Accademia dei Lincei / Baffetto

9^{00} Begrüßung, Vorstellungsrunde

10^{00} René Rogge, Marius Schumacher, Tim Waring
Unendlich viele Wege führen nach Rom

11^{30} Martin Giesbrecht
Die konstanten Motivationen der Mathematik — drei Motive

13^{30} Marco Petrella
Mathematisches Genie: zufälliger Segen oder notwendige Voraussetzung?

14^{30} Erma Kurtagic
Was sind und was sollen Probleme?

15^{30} Viktoria Kühner, Kari Küster
Vögel und Frösche – Mathematik aus verschiedenen Perspektiven

18^{00} Cena da ‚Baffetto'

Dienstag, 28. Februar 2017 – Deutsche Akademie Rom Villa Massimo

9^{30} Dr. Joachim Blüher (Villa Massimo)
Führung durch die Villa Massimo

10^{30} Annachiara Piubello
Das vierdimensionale Paradies – Dante e la matematica

11^{30} Prof. Dr. Jan van Neerven (TU Delft)
„The unreasonable effectiveness of mathematics" als philosophisches Problem

14^{00} Anna Lesnych
Mit mathematischem Denken zum Durchblick – Die Entdeckung der Zentralperspektive

15^{00} Daniel Rompf
Mathematik eine Form der Erkenntnis – Ernst Cassirers Philosophie der Mathematik

16^{00} *Kleinkunstbühne in der Villa Massimo*

Mittwoch, 1. März 2017 – Bibliotheca Hertziana (Max–Planck–Institut für Kunstgeschichte)

9^{30} Riana Cojocaru, Tim Krake
Mathematik als göttliche Eingebung – Ramanujan, Hardy und wir

11^{00} Jens Borgemeister
Mathematik in China – eine andere Mathematik oder nur ein anderer Zugang zu DER Mathematik?

12^{00} Dr. Marieke von Bernstorff (Bibliotheca Hertziana)
Führung durch die Fresken in der Villa Zuccari und den Lesesaal der Bibliotheca Hertziana

14^{00} Thomas Röhl
Kategorientheorie – eine Alternative zur Mengenlehre?

Donnerstag, 2. März 2017 – Accademia dei Lincei/ Bibliotheca Apostolica Vaticana/ Domus Romane di Palazzo Valentini/ Instituto Il Rosario

9^{00} Niko Schmidt
Die dunkle Seite – Über die angewandte Mathematik

10^{00} Patrick Hermle
Experimentelle Mathematik – die Auswirkung des Experiments in der Mathematik

11^{00} Arwed Steuer
Hirn trifft Maschine – Mathematik in der künstlichen Intelligenz

13^{30} Suellen Dutra-Pereira
Wenn Mathematik revolutionär wird – Newton und Emilie Du Chatelet oder über die Beziehung zwischen Mathematik und Metaphysik im 18. Jahrhundert

17^{00} *Führung durch die Bibliotheca Apostolica Vaticana*
Führung durch die Domus Romane di Palazzo Valentini

20^{00} Gregor Nickel, Michael Korey, Markus Wacker, Markus Haase
Mathematisches Denken Be-schreiben. Literarische Begegnungen mit Mathematik

Freitag, 3. März 2017 – Petrusgrab/ Accademia dei Lincei

12^{15} Führung Petrusgrab

14^{30} Wiete Keller, Henrik Valett
Ist mathematische Wahrheit zeitbedingt?

16^{00} Abschlussgespräch

Samstag, 4. März 2017 – Castel Gandolfo/ Palazzo Sforza-Cesarini/ Lago die Nemi/ Genzano di Roma

11^{00} Besuch von Castel Gandolfo
Pater David Brown
Führung durch die Sternwarte des Vatikan

15^{00} Michael Korey
Lieblingslinsen – Eine Forschungsexpedition auf der Suche nach den weltältesten Fernrohren

16^{30} Wanderung zum Lago di Nemi

19^{00} Cena sociale *Rifugio al Vecchio Fienile*

Paradoxien des Unendlichen

René Rogge, Marius Schumacher, Tim Waring



1.1 Was ist die Unendlichkeit?

Die Frage nach der Unendlichkeit stellen sich schon die meisten Kinder bei der Betrachtung des Sternenhimmels. Im Studienverlauf der Mathematik wird sie hingegen nur noch selten gestellt und Studenten rechnen oft unhinterfragt mit dem

Unendlichen. Dabei haben Philosophen und Mathematiker schon in der Antike versucht, das Wesen des Unendlichen zu ergründen. In dem folgenden Text werden wir versuchen, uns der Unendlichkeit über einen kleinen Umweg zu nähern. Um besonders die für den Verstand verblüffenden Eigenschaften von unendlichen Mengen zu beleuchten, und aufzuzeigen, wieso das Thema der Unendlichkeit für die Philosophie und Mathematik so wichtig und gleichzeitig schwer zu fassen war, werden wir anhand von Paradoxien den Begriff der Unendlichkeit thematisieren.

Ein Paradox führt bei Menschen zu einem Staunen und Zweifeln an den eigenen Anschauungen:

> *„Paradox" ist dem Wortsinne nach etwas, das der gängigen Meinung (griech. doxa=Meinung), dem angewöhnten Glauben zuwiderläuft; [...] Paradoxien kollidieren gleichermaßen mit angeblich gesunden Urteilen wie mit eingewurzelten Vorurteilen.* [Heu08, S. 155]

Bei dem Begriff der Unendlichkeit tauchen besonders viele paradoxe Behauptungen auf, welche sich zudem noch sehr gut begründen lassen. Bernhard Bolzano schrieb dazu:

> *Gewiss die meisten paradoxen Behauptungen, denen wir auf dem Gebiete der Mathematik begegnen, sind Sätze, die den Begriff des Unendlichen entweder unmittelbar enthalten oder doch bei ihrer versuchten Beweisführung in irgendeiner Weise sich auf ihn stützen.* [Bol55, S. 1]

Schon in der Antike wurden Paradoxien des Unendlichen thematisiert. Deswegen wird im Folgenden mit einer der berühmtesten Paradoxien von Zenon von Elea begonnen, sowie der Antwort von Aristoteles auf diese Paradoxie. Im Mittelalter wird die Frage nach der Unendlichkeit dann häufig in Verbindung mit dem Göttlichen gebracht, wie in dem Abschnitt über Nikolaus von Kues gezeigt wird. In der Neuzeit wurde ein wirkmächtiges Buch über Paradoxien des Unendlichen von Bolzano veröffentlicht, aus welchem drei Themenpunkte genauer betrachtet werden. Mit Cantor beginnt dann auf der mathematischen Ebene ein neuer Abschnitt für das Thema der Unendlichkeit, da es ihm gelang einige wichtige Eigenschaften zu beweisen. Abschließend wird noch auf eine zeitgenössische Paradoxie in der Mengenlehre kurz eingegangen, um aufzuzeigen, dass das Thema auch noch heute von Relevanz ist.

1.2 Zenon und das Teilungsparadoxon

Die wohl ältesten und bekanntesten Paradoxien des Unendlichen wurden von dem griechischen Philosophen Zenon von Elea formuliert. Er lebte ungefähr vom Jahre 490 bis 430 v.Chr. und war der Schüler von Parmenides (vgl. [Sch09, S. 784]).

Seine Paradoxien wurden nicht nur in der Antike viel diskutiert, sondern sind auch heute noch den meisten Mathematikstudenten bekannt. Eines davon ist das Teilungsparadoxon, bei dem ein Läufer, bevor er sein Ziel erreicht, erst die Hälfte der Strecke ablaufen muss und anschließend jedes Mal die Hälfte der übrig bleibenden Strecke. Hierdurch scheint es, als ob der Läufer sein Ziel nie erreicht, da er ja keine unendlich vielen Strecken ablaufen kann. Trotzdem weiß jeder, dass der Läufer in der

Realität die gesamte Strecke durchlaufen würde, obwohl auch die Argumentation von Zenon schlüssig erscheint. Analog lässt sich sogar argumentieren, dass der Läufer sich schon beim Start gar nicht von der Stelle bewegt. Er müsste ja vor dem Durchlaufen einer Strecke die Hälfte der jeweiligen Strecke schon durchlaufen haben. Zenon versuchte durch diese Paradoxie die Widersprüche von Raum, Zeit und Bewegung aufzuzeigen (vgl. [Sch09, S. 785]). Er baute somit mathematische Überlegungen in seine Philosophie ein und begann dadurch die Diskussion um das Kontinuum.

Das Teilungsparadoxon ist durch die Texte von Aristoteles erhalten geblieben, welcher im nächsten Abschnitt thematisiert wird.

1.3 Aristoteles und die potentielle Unendlichkeit

In den Jahren 384 bis 322 v. Chr. lebte der Philosoph Aristoteles, welcher das Teilungsparadoxon von Zenon untersucht und kommentiert hat. Aristoteles begegnet dem Paradoxon, indem er zwischen dem Kontinuierlichem, wie etwa einer Strecke, und dem Zählbarem, wie zum Beispiel Punkten, unterscheidet. Dieses zeigt sich besonders an den folgenden beiden Textstellen aus seinem Buch „Physik“:

> *[...] in so einem Zusammenhängenden sind zwar unendlich viele Halbstücke enthalten, nur nicht in Wirklichkeit, sondern bloß der Möglichkeit nach [...]*
> [Ari88, 263a]

> *Wer eine fortlaufende Bewegung macht, hat nebenbei auch Unendliches durchlaufen, im eigentlichen Sinne aber nicht. Es trifft der Linie doch nur nebenbei zu, unendlich viele Halbstücke zu sein, ihr wesentliches Sein ist ganz etwas anderes.*
> [Ari88, 263b]

Die Philosophie des Aristoteles ist naturphilosophisch geprägt und auf diese Weise versucht er auch sich dem Begriff des Unendlichen zu nähern. Er beobachtet seine Umwelt und bezieht aus dieser Schlussfolgerungen.

Da es technisch gar nicht möglich sei, eine Strecke unendlich oft zu teilen, erkennt Aristoteles der Strecke die Eigenschaft, unendlich viele Teilstrecken zu besitzen, nicht wirklich an, sondern nur der Möglichkeit nach. Dies schreibt er allem Zählbaren zu und somit auch den Zahlen, welche seiner Meinung nach zwar der Möglichkeit nach unendlich groß werden, es aber nie sind. Das ist die Auffassung, welche hinter dem Begriff des potentiell Unendlichem steckt, dass etwas zwar der Möglichkeit nach unendlich groß wird, jedoch nicht wirklich ist. Den Begriff des potentiell Unendlichen hat vor allem Aristoteles geprägt hat.

Mit dieser Auffassung war das Paradoxon von Zenon für Aristoteles kein Paradox mehr, da Strecken ihrem Wesen nach nicht aus unendlich vielen Teilstrecken bestehen können und ein sich bewegender Gegenstand für eine endliche Strecke auch nur eine endliche Zeit benötigt. (Nennung: VI 9 (239b11-14), beschrieben in VIII 8 263a4-11)

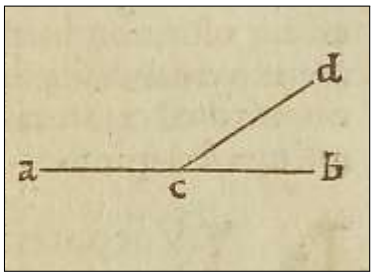


Abbildung 1.1: Quelle: [Kue89, De docta ignorantia, p.13]

1.4 Nikolaus von Kues und der und der Zusammenfall der Gegensätze im Unendlichen

Im späten Mittelalter kamen neue Diskussionen über das Unendliche auf. Vor allem Theologen im europäischem Raum beschäftigten sich mit der Frage, was das Unendliche sei, da sie Gott als ewig, allmächtig und allwissend betrachteten. All diese Eigenschaften involvieren Unendlichkeit.

Nikolaus von Kues, auch Cusanus genannt, war ein aus Kues an der Mosel stammender Theologe. Er hat von 1401 bis 1464 gelebt und mit Hilfe der Mathematik versucht, Schlüsse über das Unendliche zu ziehen.

In einer seinen Beschreibungen untersucht er einen immer größer werdenden Kreis und folgert: „[...] wenn also die Krümmung der gekrümmten Linie, je mehr diese der Umkreis eines größeren Kreises wird, sich verringert, so ist der Umkreis des größten Kreises, der nicht mehr größer sein kann, am wenigsten gekrümmt, daher am meisten gerade“ [Kue89, De docta ignorantia, p.235].

Cusanus schlussfolgert, dass im Unendlichen Gegensätze zusammenfallen, welche für unseren Verstand nicht vereinbar sind: „Das aber übersteigt unsere ganze Einsicht, die auf dem Weg des Verstandes das Widersprechende in seinem Ursprung nicht zusammenbringen kann“. [Kue89, De docta ignorantia, p.207]

An anderer Stelle beschreibt er den Zusammenfall von größtem und kleinstem Winkel:

> *Du siehst es deutlich, wenn du von C eine bewegliche Linie CD ausgehen läßt. Solange diese Linie einen Winkel mit CA und einen anderen mit CB bildet, ist keiner der größte oder der kleinste, denn er kann immer noch größer sein; er kann insoweit größer sein als der andere besteht, und darum ist ein Winkel nicht früher der größte, als der andere der kleinste ist. Und das kann nicht geschehen, solange es zwei Winkel sind. Wenn also die Zweiheit der Winkel aufhören soll, dann wirst du nichts anderes sehen als die Linie CD über der Linie AB, d. h. du wirst keinen Winkel sehen. Und so muß der größte und zugleich kleinste Winkel vor der Zwei und nach der einfachen Linie liegen. Aber er kann nicht aufgezeichnet werden.* [Kue89, De docta ignorantia, p.13]

Die Folgerung, dass Gegensätze zusammenfallen, war für Aristoteles paradox. Für Cusanus ist dies jedoch lediglich ein Bereich, dem unser Verstand nicht folgen kann.

Der Begriff des aktual Unendlichen beinhaltet die Auffassung, dass man von etwas Unendlichem als Ganzes reden kann und, dass diese eventuell auch existiert.

Die Diskussion, ob das Unendliche als potentiell oder aktual aufgefasst werden kann oder darf, hat nie aufgehört, und noch heute gibt es verschiedene philosophische Ausrichtungen, die verschiedene Standpunkte in dieser Hinsicht vertreten.

1.5 Bolzano und die Frage nach dem Wesen des Unendlichen

Bernhard Bolzano wurde am 5.10.1781 in Prag geboren und lebte dort bis zum 18.12.1848. Er galt als einer der wichtigsten Logiker des 19. Jahrhunderts (vgl. [Sch09, S. 106])

Nach seinem Tod wurde das Buch „Paradoxien des Unendlichen“ veröffentlicht, aus welchem im Folgenden drei Aspekte dargestellt werden. Zuerst werden fehlerhafte Versuche der Beschreibung des Unendlichen aufgezeigt, um die Schwierigkeit des Unendlichen für den menschlichen Verstand zu verdeutlichen. Danach wird eine Klassifizierung von unendlichen Mengen vorgenommen, welche an sich schon ein Paradox darstellt. Anschließend werden Bolzanos Argumente untersucht, die der Frage nachgehen, wie es zu fehlerhaften Vorstellungen des Unendlichen kommt.

> *Doch auch so manche andere Erklärungen von dem Unendlichen [...] kann ich nicht umhin, als unrichtig zu verwerfen* [Bol55, S. 9]

Bolzano spricht sich gegen das Dogma von Aristoteles aus, der das Unendliche als eine „wachsende, nie es erreichende Größe“ [Bol55, S. 8] beschrieb. Nach seiner Meinung braucht „eine wahrhaft unendliche Größe [...] eben nicht veränderlich zu sein“ [Bol55, S. 8]. Bolzanos Verständnis des Unendlichen entspricht somit schon wesentlich mehr unserer heutigen mathematischen Sichtweise.

Nach Bolzano hätten Cauchy und andere Mathematiker einmal in einer Veröffentlichung das Unendliche definiert als „eine veränderliche Größe [...] deren Wert unbegrenzt wächst und füglich größer werden könne als jede gegebene, noch so große Größe“. Unter einer veränderlichen Größe versteht Bolzano allerdings eher eine „bloße Vorstellung einer Größe“ die nicht nur einen einzelnen Wert annimmt, sondern gleichzeitig schon eine Möglichkeit von unendlich vielen Werten darstellt, welche „in ihrer Großheit selbst sich unterscheidender Größen unter sich befaßt“ [Bol55, S. 9]. Er kritisiert somit, dass das Unendliche immer als etwas Wachsendes aufgefasst werden müsse.

Aus der Definition von Cauchy resultiere außerdem, dass die „Grenze eines unbegrenzten Wachsens [...] die unendliche Größe [sei]“ [Bol55, S. 9]. Nach Bolzano kann das Unendliche nicht als eine Grenze dargestellt werden. Um seine Argumentation zu verdeutlichen benutzt er eine Analogie zum unendlich Kleinen. Wenn die Grenze des unendlichen Wachsens die Unendlichkeit sei, müsse das Nichts, also die Null, die Grenze der unendlichen Abnahme sein. Dieses würde nach Bolzano aber noch nicht mal Cauchy behaupten wollen (vgl. [Bol55, S. 10]).

Eine weitere falsche Definition des Unendlichen wurde von Spinoza und „vielen anderen Philosophen und Mathematikern angenommen“ [Bol55, S. 10]. Sie hätten das Unendliche als etwas angesehen, zu dem nichts weiteres mehr hinzugefügt

werden könne. Dieses sei nach Bolzano zu eng definiert worden, da Mathematiker zu unendlichen Mengen sogar noch weitere unendlich große Mengen hinzufügen könnten, oder sogar eine unendliche Menge in unendliche viele unendlich große Mengen zerlegt werden kann (vgl. [Bol55, S. 74]).

Das Unendliche könne allerdings auch nicht als das aufgefasst werden als das, was größer als alles Endliche ist. Bei dieser Definition würde es sich um eine Tautologie handeln. Etwas Endliches könnte immer durch eine Zahl beschrieben werden. Sobald aber das Unendliche als eine Zahl angesehen würde, müsste sie schon größer sein als sie selbst (vgl. [Bol55, S. 12]). Resultierend ergibt sich, dass das Endliche und das Unendliche vom Wesen her unterschiedlich sind. Dieses lässt sich auch daran erkennen, dass durch Zahlen immer auch Verhältnisse ausgedrückt werden können. Vergleicht man eine Zahl allerdings mit dem Unendlichen werde sie im Verhältnis automatisch unendlich klein, egal wie groß die Zahl gewählt wurde (vgl. [Bol55, S. 22]). Auf diese unterschiedlichen Eigenschaften von endlichen und unendlichen Mengen wird noch im dritten Abschnitt genauer eingegangen.

Diese exemplarischen Schwächen in den verschiedenen Definitionen des Unendlichen zeigen auf, dass die auf den ersten Blick trivialen Definitionen berühmter Mathematiker und Philosophen nicht die eigentliche Essenz des Unendlichen bestimmen können. Im nächsten Schritt wird deswegen nach einer Eigenschaft gesucht, die auf alle unendlichen Mengen zutrifft.

Bei dieser Eigenschaft handelt es sich gleichzeitig um eine Paradoxie, da sie der geläufigen Vorstellung von Mächtigkeiten von Mengen grundlegend widerspricht.

Durch Vergleich der Anzahl der Elemente in zwei endlichen Mengen, kann sehr einfach festgestellt werden, ob diese Mengen die gleiche Mächtigkeit aufweisen. Bei unendlichen Mengen kann dieses Verfahren nicht mehr angewandt werden. Hier nutzen Mathematiker den Trick der Paarbildung. Es wird versucht jedem Element in sinnvoller Weise ein Element aus der anderen Menge zuzuweisen. Gelingt dies für alle Elemente der beiden Mengen, sind sie gleichmächtig. So ist es zum Beispiel möglich jeder natürlichen Zahl auch eine gerade Zahl zuzuordnen:

1	2	3	4	...
2	4	6	8	...

Hier zeigt sich auch direkt eine Paradoxie, die durch dieses Verfahren nur bei unendlichen Mengen auftritt. Bei der Menge der geraden Zahlen handelt es sich um eine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen. Dennoch besitzen die beiden Mengen, wie oben skizziert, dieselbe Mächtigkeit. Ein häufiges Beispiel, welches diese Paradoxie noch klarer darstellt, ist die Bijektion zwischen $[0, 1]$ und den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Diese Paradoxie bildet tatsächlich eine Äquivalenz zu den unendlichen Mengen, wie Dedekind im Jahre 1888 formal zeigte:

> *Sind A und B Mengen, dann gilt: A ist unendlich genau dann, wenn es eine Teilmenge $B \subseteq A$ ($B \neq A$) mit $|A| = |B|$ gibt.* [Are13, S. 125]

Zu diesem Paradox schrieb auch schon Bolzano:

> *Übergehen wir nun zur Betrachtung einer höchst merkwürdigen Eigenheit, die in dem Verhältnisse zweier Mengen, wenn beide unendlich sind, vorkommen*

> *kann, ja eigentlich immer vorkommt, die man aber bisher zum Nachteil für die Erkenntnis mancher wichtigen Wahrheiten der Metaphysik sowohl als Physik und Mathematik übersehen hat und die man wohl auch jetzt [...] in einem solchen Grade paradox finden wird, daß es sehr nötig sein dürfte, bei ihrer Betrachtung länger zu verweilen.* [Bol55, S. 27,28]

Bolzano blieb allerdings nicht nur bei dieser innermathematischen Überlegung, sondern versuchte noch zu begründen, welchen Fehler unser Verstand bei dieser abwegigen Eigenschaft macht. Dass echte Teilmengen eine kleine Mächtigkeit besitzen, ist eine Eigenschaft, die „nur eben in ihrer Endlichkeit liegt, bei den unendlichen also wegfällt“ [Bol55, S. 31]. Er kritisiert damit unsere Intuition, welche Eigenschaften überträgt, obwohl die Objekte unterschiedliche Grundvoraussetzungen besitzen. Bei einer unendlichen Menge fällt die Eigenschaft eines letzten Elementes weg und dadurch kann die Paarbildung immer weitergeführt werden, selbst wenn es sich um echte Teilmengen handelt: „sondern es gibt, kraft der Erklärung einer unendlichen Menge, an und für sich kein solches letzteres Ding in [der Menge] A“ [Bol55, S. 32,33].

Bolzano gibt noch für weitere Paradoxien des Unendlichen Argumente, die deren Entstehung und Fehler aufzeigen. Um seinen Standpunkt für das aktual Unendliche im grundlegenden Streit um unendliche Mengen zu belegen, zeigt er eine naheliegende Analogie auf.

Gegner der aktualen Unendlichkeit würden häufig behaupten, dass „eine unendliche Menge nie in ein Ganzes vereinigt, nie in Gedanken zusammengefasst werden kann“ [Bol55, S. 15]. Diesem entgegnet Bolzano, dass man nicht von jedem einzelnen Gegenstand eine Vorstellung haben müsse, um sich die Menge vorstellen zu können. So kenne man auch nicht jeden Einwohner Prags, könne sich aber die Menge der Bewohner denken. Man brauche nur einen geeigneten Gattungsbegriff um eine unendliche Menge denkbar zu machen, wie zum Beispiel „die Menge aller Sätze oder Wahrheiten an sich“ [Bol55, S. 10].

So wie bei Übertragung von Eigenschaften zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen ist es nach Bolzano auch eine falsche Übertragung, wenn die Frage gestellt wird, wie sich eine Gerade aus ausdehnungslosen Punkten zusammensetzen könne. Durch den Verstand gelangten Philosophen zu der Auffassung, dass „alles Ausgedehnte seinem Begriffe nach aus Teilen zusammengesetzt sein müsse“ [Bol55, S. 71]. Diese Teile wiederum müssten aber selbst wieder ausgedehnt sein, da andernfalls die Zusammenfassung zu einem Ganzen unendlich viele Lücken aufweisen müsste. Genau umgekehrt zum Teilmengenparadox, wo eine Eigenschaft von Endlichen ins Unendliche übertragen wird, wird hier davon ausgegangen, dass man eine Eigenschaft des Unendlichen nicht auf das Endliche übertragen könne: „eine Eigenschaft, die allen Teilen mangelt, auch nicht dem Ganzen zukommen könne“ [Bol55, S. 72]. Um diesen Fehler aufzuzeigen benutzt Bolzano wieder eine Analogie:

> *Eine Beschaffenheit, die allen Teilen mangelt, soll auch dem Ganzen nicht zukommen dürfen? Gerade umgekehrt! [...] Ein Automat hat die Beschaffenheit bestimmte Bewegungen eines lebenden Menschen [...] nachzuahmen, die einzelnen Teile aber [...] entbehren dieser Eigenschaft.* [Bol55, S. 72]

Ein weiteres Problem sieht Bolzano darin, dass viele Mathematiker eine falsche Vorstellung von Punkten hätten. Der Verstand würde die Vorstellung eines Punktes

aus den Anschauungen ableiten und schlussfolgern, dass ein Punkt eine linke, bzw. rechte Seite haben müsste (vgl. [Bol55, S. 73]). Mit dieser Vorstellung müsste in einer Geraden jeder Punkt einen direkten Nachbarpunkt besitzen, welche sich jeweils berühren. Dieses wäre allerdings ein Widerspruch, da sich selbst zwischen diesen Punkten noch unendlich viele weitere Punkte befänden. Im Umgang mit dem Unendlichen ist somit Vorsicht geboten, falls man versucht, sich die Eigenschaften aus den Anschauungen abzuleiten. Dächte man sich die Punkte einer Geraden so, dass sie „für jede hinreichend kleine Entfernung gewisse Nachbarn erhält" [Bol55, S. 75], würden sich die falschen Vorstellungen aufheben: „und beides verträgt sich, nur recht verstanden, sehr wohl" [Bol55, S. 75].

1.6 Cantor und die verschiedenen Ebenen der Unendlichkeit

Georg Cantor (1845–1918) gilt als einer der ersten Befürworter der Verwendung aktual unendlicher Gesamtheiten in der Mathematik. Mit 27 Jahren kommt er durch seine Arbeiten mit Häufungspunkten zu dieser Haltung.

Jahre später setzt er sich intensiver mit dem Unendlichen auseinander und entwickelt konkrete mathematische Regeln dafür. Er benennt die erste transfinite Ordinalzahl mit ω, und zeigt ihre grundlegenden Eigenschaften: So ist beispielsweise die Addition mit ω assoziativ, aber nicht kommutativ. Georg Cantor gilt somit als Vorreiter der transfiniten Ordinalzahlen.

Mithilfe seines ersten Diagonalarguments zeigt er, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dieselbe Kardinalität haben. Im Jahr 1877 beweist er mit seinem zweiten Diagonalargument, dass diese Kardinalität sich von der der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ unterscheidet, und zeigt somit, dass es verschieden große Unendlichkeiten gibt. Damit änderte sich das Bild der Unendlichkeit, da es nicht mehr die eine Unendlichkeit gab, sondern die Möglichkeit geschaffen wurde, zwischen verschiedenen Unendlichkeiten zu unterscheiden. Besonders auf die Mathematik hatte Cantor dadurch einen großen Einfluss (vgl. [Mes83, S. 85ff]).

1.7 Banach-Tarski und ein Paradox der heutigen Mengenlehre

Um zu zeigen, dass in unserer heutigen, streng axiomatisierten Mengenlehre immer noch Paradoxien des Unendlichen auftreten, kann das Banach-Tarski-Paradoxon herangezogen werden.

Wir betrachten im Folgenden einen Spezialfall, in dem gezeigt wird, dass es möglich ist, eine dreidimensionale Einheitskugel, also eine Kugel mit Radius 1, so zu zerschneiden und wieder zusammenzusetzen, dass zwei solche Einheitssphären entstehen. Es entsteht bei diesem Verfahren, welches unter anderem auf dem Auswahlaxiom basiert, eine zweite Einheitssphäre aus dem Nichts. Die beiden entstandenen Einheissphären stimmen mit der Originalen perfekt überein, ohne das dabei etwas hinzufügt werden muss.

Ein Beweis dieser Paradoxie beruht auf einer Technik, bei welcher die Kugel Punkt für Punkt farblich separiert und wieder zusammensetzt wird. Dabei wird ein Verfahren benutzt, das in einer ähnlichen Weise unter dem Namen „Hyperwebster-Paradoxie“ bekannt ist.

Der Hyperwebster

Der Hyperwebster ist die theoretische Konstruktion eines absolut vollständigen Lexikons. In diesem Lexikon kommt jedes Wort vor, welches wir mit unserem Alphabet schreiben können, wobei wir als Wort jegliche Kombination aus unseren 26 Buchstaben verstehen. So sind „ananas“, sowie „aaabzresww“ beides Wörter im Hyperwebster, unabhängig davon, ob sie eine Bedeutung in unserer Sprache besitzen. Ebenfalls zugelassen sind unendlich lange Wörter.

Teilt man den Hyperwebster in 26 Einzelbände auf, die jeweils alle Wörter mit demselben Anfangsbuchstaben enthalten, erhält man folgende Struktur:

In Band 1 stehen alle Wörter, die mit dem Buchstaben „a“ anfangen, im Band 2 alle mit Anfangsbuchstaben „b“ usw. In jedem Band steht also ein Bruchteil des gesamten, vollständigen Hyperwebsters.

Betrachten wir Band 1 getrennt von den anderen, so sind dort alle Wörter lexikographisch geordnet: a, aa, aaa, . . . , ab, aba , abaa. . . , . . . , abaaaaa. . . , . . . , ac. . . , . . . , azaaa. . . , azzzzzz. . .

Entfernt man nun von jedem Wort den ersten Buchstaben, nämlich das erste „a“, erhält man: , a, aa, ... , b, ba , baa. . . , . . . , baaaaa. . . , . . . , c. . . , . . . , zaaa. . . , zzzzzz. . .

Im neuen, veränderten Band 1 steht nun paradoxerweise wieder jedes Wort, dass auch im vollständigen Hyperwebster steht, nicht nur diejenigen, die mit Buchstaben „a“ anfangen. Es entsteht somit paradoxerweise aus einer echten Teilmenge der Ursprungsmenge, ohne das Hinzufügen neuer Elemente, die Ursprungsmenge selbst.

1.8 Zusammenfassung

Es wurde an einigen Beispielen gezeigt, dass das Unendliche und seine Paradoxien schon immer für den menschlichen Verstand schwer zu begreifen waren. Wie zum Beispiel Nikolaus von Kues gehen einige Philosophen gehen davon aus, dass sich das Unendliche am Rande des menschlichen Erkenntnisvermögen befindet:

> *Das aber übersteigt unsere ganze Einsicht, die auf dem Weg des Verstandes das Widersprechende in seinem Ursprung nicht zusammenbringen kann, da wir uns auf dem Boden dess, das uns von Natur offenbar wird, bewegen.*
>
> [Kue89, De docta ignorantia, S. 207]

Die Probleme mit dem Unendlichen scheinen sich durch alle Zeiten zu ziehen und auch in unser heutigen strengen Mathematik nicht ganz verschwunden zu sein. Allerdings hat es den Anschein, dass die heutigen Paradoxien nicht mehr so stark in den philosophischen oder theologischen Diskurs eingehen, sondern eher innermathematisch behandelt werden.

Auch wenn das Unendliche eine wahre Fundgrube für Paradoxien zu sein scheint, soll der Begriff des Unendlichen zum Abschluss noch wieder in das richtige Licht gerückt werden. Denn natürlich rechnen Mathematiker tagtäglich ohne Probleme damit und kommen zu stimmigen Ergebnissen. Schon Bolzano schrieb dazu:

> *[...] der Lehre von dem Unendlichen so viele wichtige Mängel [...] vorwerfen mögen: so ist es doch bekannt, daß man meistens ganz richtige Ergebnisse erhählt, wenn man die Regeln [...] [mit] Vorsicht befolgt.* [Bol55, S. 64]

Literatur

[Are13] Arens, Tilo: *Grundwissen Mathematikstudium: Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Springer Spektrum, 2013.

[Ari88] Aristoteles: *Physik, Bücher V (E) - VIII (H)*, Band 381 der Reihe *Philosophische Bibliothek*. Meiner, Hamburg, 1988.

[Bol55] Bolzano, Bernhard: *Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851*. Hamburg, 1955.

[Heu08] Heuser, Harro: *Unendlichkeiten: Nachrichten aus dem Grand Canyon des Geistes*. Vieweg+Teubner (GWV), 1. Auflage, 2008.

[Kue89] Kues, Nikolaus von: *Philosophisch-theologische Schriften: Lateinisch-deutsch*. Herder, Wien, 2. Nachdruck der 1964 ersch. 1. Auflage, 1989.

[Mes83] Meschkowski, Herbert: *Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 2. Auflage, 1983.

[Sch09] Schmidt, Heinrich; Gessmann, Martin: *Philosophisches Wörterbuch*. Kröner, Stuttgart, 23. Auflage, 2009.

Was sind und was sollen Probleme?

Erma Kurtagić



Mit Abbildung 2.1 (siehe S. 12) führen wir folgendes Experiment aus. Wir zeigen verschiedenen Personen in Rom das Bild und fragen sie, was ihrer Meinung nach in der Person auf dem Foto vor sich geht. Die einen würden uns sagen, dass die Person einen geliebten Menschen verloren hat und traurig ist. Andere könnten sagen, dass in Rom ganz unerwartet der Kaffee ausgegangen ist, und die Person nicht weiß, wie sie den Tag überstehen soll. Nun führen wir dieselbe Befragung an einer mathematischen Fakultät durch. Manche Mathematikstudenten werden fest davon überzeugt sein, dass es sich auf dem Bild um einen Leidensgenossen handelt, der eine Übungsaufgabe nicht lösen kann. Andere sehen in der Person jemanden, der einen wichtigen Beweis nicht versteht. Aber alle sind sich einig, dass auf dem Bild jemand zu sehen ist, der verzweifelt ist.

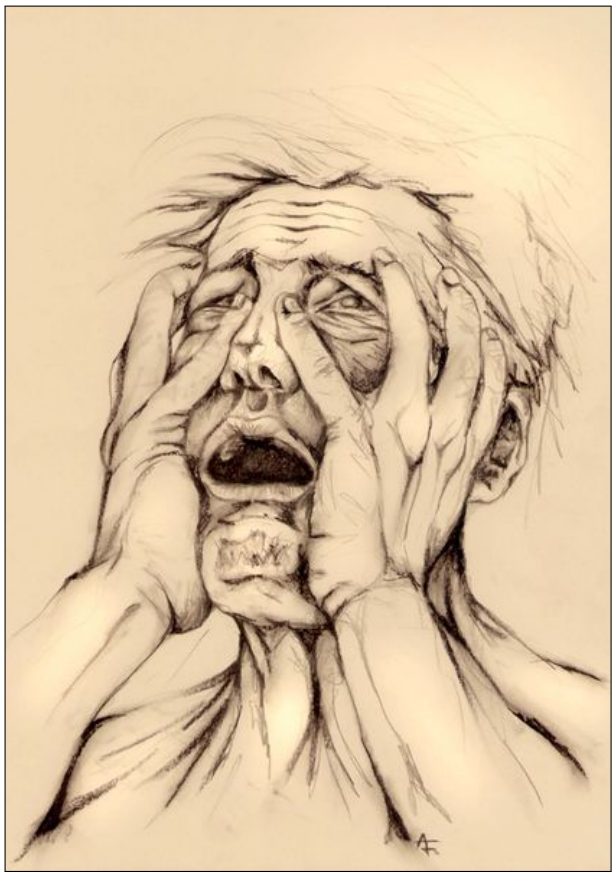


Abbildung 2.1

Dabei ist es interessant, dass mathematische Probleme in uns dieselben Gefühle erwecken können wie es richtigen Probleme machen. Im Folgenden beschränken wir uns aber nur auf Probleme mathematischer Natur.

2.1 Beispiele mathematischer Probleme

2.1.1 Königsberger Brückenproblem

Das Königsberger Brückenproblem ist der Klassiker unter den mathematischen Problemen. Das damalige Königsberg wurde durch sieben Brücken in vier Gebiete aufgeteilt. Die Frage, die sich stellte, war: Gibt es eine Möglichkeit durch Königsberg zu spazieren und dabei jede Brücke genau einmal zu passieren? Der Mathematiker LEONHARD EULER (1707–1783) fand nicht nur eine Antwort auf diese Frage. Er verallgemeinerte das Problem und entwickelte eine neue Methode, welche heute der modernen Graphentheorie zugeordnet wird. EULER erkannte, dass es sich um ein topologisches und nicht um ein geometrisches Problem handelt. Das bedeutet, dass die präzise Lage der Brücken keine Rolle für die Beantwortung der Frage spielt. Wichtig ist es dagegen zu wissen, welche Brücke welche Stadtteile miteinander verbindet. EULER fasste die Stadtteile als Knoten A, B, C und D auf und die sieben Brücken als Kanten zwischen den Knoten. Der Graph besteht aus den Kanten und

Knoten. Die Anzahl der Kanten, die jeweils vom Knoten ausgehen, wird der Grad des Knotens genannt. Dieser Grad ist ausschlaggebend für die Lösung des Problems.

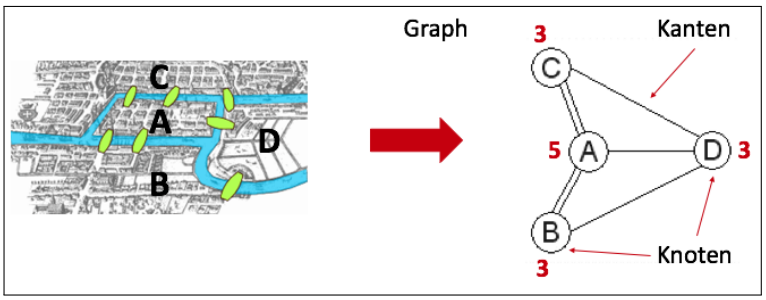


Abbildung 2.2

Knoten mit geradem Grad machen keine Probleme. Während des Durchlaufs kommt man in sie hinein und auch wieder heraus, wobei man jeweils zwei Kanten verbraucht. Bei Knoten mit ungeradem Grad wird es hingegen schwieriger. Da beim Königsberger Brückenproblem alle Knoten einen ungeraden Grad haben, ist es nicht möglich, beim Spaziergang jede Brücke genau einmal zu überqueren.

Die von Euler entwickelten Methoden finden heute zum Beispiel Anwendung bei der Planung von Verkehrsnetzen, elektrischen Netzwerken, und der Darstellung und Analyse chemischer Strukturen. Mehr dazu findet man in [Büs10].

2.1.2 Brachistochronenproblem

Beim Brachistochronenproblem sucht man den schnellstmöglichen Weg einer Kugel von einem Punkt A zu einem tiefer gelegenen und nach rechts verschobenen Punkt B. Dabei bewegt sich die Kugel unter dem Einfluss der Schwerkraft (s. Abb. 2.3). Der

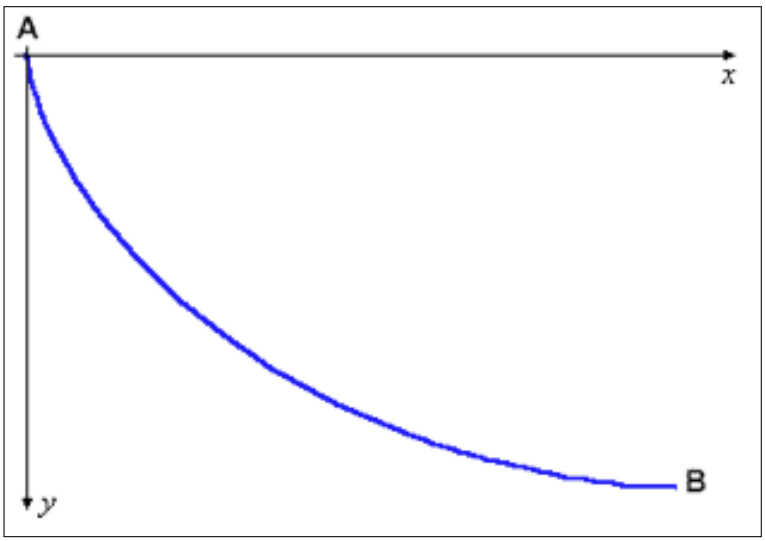


Abbildung 2.3

kürzeste Weg ist die Gerade durch A und B. Doch bereits Galileo Galilei (1564–1641)

erkannte, dass das nicht der schnellste Weg ist. Er vermutete den Kreisbogen zwischen A und B (vgl. [Bay96]). Später beschäftigte sich Johann Bernoulli (1667-1748) mit dem Problem und erkannte, dass der Kreisbogen lediglich eine gute Annäherung an den schnellsten Weg ist. Eine größere Geschwindigkeit erreicht die Kugel dagegen auf der Brachistochrone, bei welcher das Gefälle am Anfang größer ist und am Ende abnimmt. So gewinnt die Kugel zu Beginn eine ausreichend hohe Geschwindigkeit, um trotz niedriger Steigung am Ende des Weges das Ziel in kürzester Zeit zu erreichen. (vgl. [Bay96])

2.1.3 Keplersche Vermutung

Im Jahre 1611 stellte JOHANNES KEPLER (1571–1630) die Vermutung auf, dass die größtmögliche Dichte gleich großer Kugeln in einem Behältnis bei etwa 74% liegt. Dabei ordnet man die Kugeln so an, wie es der Obsthändler mit den Orangen macht (s. Abb 2.4). Beweisen konnte Kepler seine Vermutung nicht. 1831 zeigte CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), dass die Keplersche Vermutung wahr ist, wenn man die Kugeln in einem regelmäßigen Gitter anordnet (vlg. [Szp11]). LÁSZLÓ FEJES TÓTH (1915-2005) bewies 1953, dass es endlich viele Möglichkeiten gibt, die Kugeln anzuordnen, womit es im Prinzip möglich ist, alle Fälle durchzurechnen. Und genau das tat THOMAS HALES (geb. 1958). Er untersuchte vier Jahre lang die unterschiedlichen Fälle mit Hilfe von komplexen Computerberechnungen und legte 1998 einen Beweis vor, der 250 Seiten Aufzeichnungen und 3GB Computerprogramm, Daten und Ergebnisse beinhaltete. Die zwölf Gutachter, die diesen Beweis prüften, gaben 2003 bekannt, dass sie sich zu 99% sicher sind, dass der Beweis richtig ist. Die einprozentige Unsicherheit beruht darauf, dass die Gutachter nicht in der Lage waren, alle Computerberechnungen nachzuvollziehen, und somit nicht gewährleisten konnten, dass der Computer keinen Fehler gemacht hat. (vgl. [Nov15])



Abbildung 2.4

2.1.4 Hilbertsche Probleme

Man kann die Liste von bereits gelösten Problemen fortführen, oder sich die Frage stellen, welche Probleme sollten gelöst werden, damit die Mathematik voran getrieben wird? Genau dies fragte sich DAVID HILBERT (1862–1942) und erstellte eine Liste von den 23 wichtigsten Problemen. Diese präsentierte er 1900 in seiner Eröffnungsrede auf dem zweiten mathematischen Weltkongress in Paris, siehe [Hil01]. Zu Beginn motiviert er seine Zuhörer:

> *Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben?*

> *Welche neuen Methoden und neuen Tatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken – auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?*
> [Hil01]

Dass Probleme lebenswichtig für eine Wissenschaft sind, war Hilbert klar:

> *Solange ein Wissenszweig Überfluss an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbstständigen Entwicklung.* [Hil01]

Und deshalb appellierte er an seine Zuhörer, bevor er schließlich seine Liste an Problemen vorstellte:

> *Das ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!* [Hil01]

100 Jahre später erstellte das Clay Mathematics Institute in Cambridge zu Ehren von Hilbert eine neue Liste von Problemen, die sogenannten *Millenniums Probleme*. Näheres dazu findet man in [JC06].

2.2 Philosophische Fragen

Nun stellen wir drei eher philosophische Fragen.

2.2.1 Warum lösen Mathematiker Probleme?

Probleme lassen uns oft in Verzweiflung geraten. Auch wenn die Lösung eines Problems Glücksgefühle hervorruft, kann der Weg bis zu dieser Lösung sehr belastend sein. Es liegt also nahe, sich die Frage zu stellen, warum Mathematiker überhaupt Probleme lösen wollen? Was reizt uns daran? Wieso tun wir uns so etwas an? Haben wir etwa keine Probleme im richtigen Leben?

Ein Reiz könnte in den hohen Preisgeldern, die auf die Lösung mancher Probleme wie z.B. den Milleniums Problemen, ausgelegt sind. Doch für die Hilbertschen Probleme gab es keine Preisgelder, und trotzdem versuchten sich viele Mathematiker an ihrer Lösung.

Für Hilbert war Geld keine Motivation. Ihn trieb vielmehr der Ruhm und die Anerkennung an, die demjenigen zusteht, der eine Lösung findet (vgl. [Ste13]). Dasselbe galt auch für Johann Bernoulli. Nachdem er das Brachistochronenproblem löste, rief er in der Zeitschrift Acta Eruditorum die Mathematiker der ganzen Welt auf, sich diesem zu stellen:

> *Die scharfsinnigen Mathematiker des ganzen Erdkreises grüßt Johann Bernoulli, öffentlicher Professor der Mathematik.*
>
> *Da die Erfahrung zeigt, dass edle Geister zur Arbeit an der Vermehrung des Wissens durch nichts mehr angetrieben werden, als wenn man ihnen schwierige und zugleich nützliche Aufgaben vorlegt, durch deren Lösung sie einen berühmten Namen erlangen und sich bei der Nachwelt ein ewiges Denkmal setzen, so hoffte*

> *ich den Dank der mathematischen Welt zu verdienen, wenn ich nach dem Beispiele von Männern wie Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani und anderen, welche vor mir dasselbe taten, den ausgezeichnetsten Analysten dieser Zeit eine Aufgabe vorlegte, damit sie daran, wie an einem Prüfsteine, die Güte ihrer Methoden beurteilten, ihre Kräfte erproben und, wenn sie etwas fänden, mir mittheilen könnten, dann würde einem jeden öffentlich sein verdientes Lob von mir zu Teil geworden sein. ... Da nunmehr keine Unklarheit übrig bleibt, bitten wir alle Geometer dieser Zeit insgesamt inständig, dass sie sich fertig machen, dass sie daran gehen, dass sie alles in Bewegung setzen, was sie in dem letzten Schlupfwinkel ihrer Methoden verborgen halten. Wer es vermag, reiße den Preis an sich, den wir dem Löser bereit gestellt haben. Freilich ist dieser nicht von Gold oder Silber, denn das reizt nur niedrige und käufliche Seelen, von denen wir nichts löbliches, nichts nützliches für die Wissenschaft erwarten. Vielmehr, da Tugend sich selbst der schönste Lohn ist und Ruhm ein gewaltiger Stachel, bieten wir als Preis, wie er einem edlen Manne zukommt, Ehre, Lob und Beifall, durch die wir den Scharfsinn dieses großen Apollo öffentlich und privatim, in Schrift und Wort, preisen, rühmen und feiern werden.* [Bay96]

Seinem gutem Freund GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) schrieb er sogar persönlich und schickte ihm das Problem per Brief. LEIBNIZ antwortete BERNOULLI, dass er einen Reiz in dem Problem fand, es lockte ihn „durch seine Schönheit, wie der Apfel die Eva." [Bay96].

Gelöst wurde das Brachistochronenproblem schließlich von BERNOULLIS jüngerem Bruder JACOB BERNOULLI (1654-1705), LEIBNIZ, DE L'HOSPITAL (1661–1704) und WALTER GRAF VON TSCHIRNHAUSEN (1651–1708). Zudem tauchte in der britischen Philosophical Transactions eine anonyme Lösung unter dem Namen „ex ungue leonem" (lat. den Löwen von der Pranke her). LEIBNIZ behauptete erkannt zu haben, dass die Lösung von NEWTON stammt. (vgl. [Bay96])

Eine weitere Motivation, Probleme zu lösen, kann in dem Nutzen, der daraus resultiert, liegen. Manche Probleme werden von anderen Wissenschaften wie z.B. der Physik gestellt. Ein Beispiel dafür ist das Dreikörperproblem. HENRI POINCARÉ (1854–1912) wagte sich an das Problem und entwickelte dabei eine neue Theorie, die heute Chaostheorie genannt wird. Es ist allerdings fraglich, ob POINCARÉS Anreiz tatsächlich in dem Nutzen lag. Er, wie auch viele Mathematiker, möchten in erster Linie die Ungewissheit, dass es in einer mathematischen Theorie eine offene Lücke zu geben scheint, lösen. Sie wollen es nicht akzeptieren, dass sie etwas nicht wissen. Das Resultat ist dabei oft zweitrangig. (vgl. [Ste13])

2.2.2 Wie löst man Probleme?

Die nächste Frage ist, wie man Probleme löst. POINCARÉ z.B. arbeitete am Morgen und am Abend jeweils zwei Stunden aktiv an einem Problem. In der Zwischenzeit beschäftigte er sich mit anderen Dingen, während sein Unterbewusstsein weiter tüftelte. So kamen ihm über dem Tag blitzartige Ideen (vgl. [Ste13]).

Das Königsberger Brückenproblem zeigt, dass es sehr hilfreich sein kann, neue Methoden zu entwickeln. Dabei spielt auch das Verknüpfen von verschiedenen Gebieten, wie z.B. die Algebra mit der Analysis eine wichtige Rolle. Dies mag auf den

ersten Blick abschreckend sein, denn die wenigsten können von sich behaupten, ein Experte auf verschiedenen Gebieten zu sein. Dennoch zeigt uns dieser Punkt, dass die Mathematik im Gegensatz zu anderen Wissenschaften nicht in ihre einzelnen Teilgebiete zerfallen kann. Es ist notwendig, dass sie als Ganzes bestehen bleibt. Hilbert sagte dazu:

> *[...] die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganzes, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird.* [Hil01]

Für den Beweis der Keplerschen Vermutung ist der Computer ein sehr wichtiges Hilfsmittel gewesen. Ohne ihn wäre Hales wahrscheinlich bis heute zu keinem Ergebnis gekommen. Doch der Beweis der Keplerschen Vermutung ist Hales nicht genug. 2003 iniziierte er das Projekt **F**lys**p**e**k** (**F**inal **P**roof of **K**epler). Dieses verfolgt das Ziel, den Computer stärker in die Arbeitswelt des Mathematikers zu integrieren und den Menschen eines Tages vielleicht sogar komplett zu ersetzen (vgl. [Nov15]). In der ZEIT sagte Hales 2015 dazu:

> *Ich beschloss, eine Technologie zu entwickeln, die Gutachter weitgehend überflüssig macht. Ich wollte Menschen durch Computer ersetzen.* [Nov15]

Es reicht ihm nicht, dass Computer nur zur Überprüfung menschlicher Beweise eingesetzt werden:

> *Noch werden Computer nur zur Überprüfung menschlicher Beweise eingesetzt. Müssen sie in Zukunft auch die Lösungen finden, weil der Mensch an die Grenzen seines Intellekts stößt?* [Nov15]

Doch was bleibt dann noch den Menschen? Müssen Mathematiker sich plötzlich Gedanken über Arbeitslosigkeit machen? Hales sagt dazu lediglich:

> *Den Menschen bleibt, die künstliche Intelligenz zu erschaffen.* [Nov15]

2.2.3 Was kennzeichnet ein gutes Problem?

Über diese Frage hat sich Hilbert 1900 Gedanken gemacht:

> *Ein mathematisches Problem sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unsere Anstrengung nicht spotte; es sei uns ein Wahrzeichen auf den verschlungenen Pfaden zu verborgenen Wahrheiten - uns hernach lohnend mit der Freude über die gelungene Lösung.* [Hil01]

Wie schwierig nun ein Problem sein sollte, hängt von demjenigen ab, der sich ihm stellt. Hilbert wollte uns damit ans Herz legen, dass wir uns nach der Lösung des Problems mit Abbildung 2.5 identifizieren können.



Abbildung 2.5

Literatur

[Bay96] BAYREUTH, PETER BAPTIST: *Johann Bernoulli und das Brachistochronenproblem*, 1996.

[Büs10] BÜSING, CHRITINA: *Graphen- und Netzwerkoptimierung*. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 2010.

[Hil01] HILBERT, DAVID: *Mathematische Probleme*. Archiv für Mathematik und Physik 1, Seiten 44–63, 213–237, 1901.

[JC06] J. CARLSON, A. JAFFE, A. WILES: *The Millennium Prize Problems*. The Clay Mathematics Institute, 2006.

[Nov15] NOVOTNY, RUDI: *Das Orangen-Projekt*. DIE ZEIT, (27), 2015.

[Ste13] STEWART, IAN: *Vision of Infinity*. Basic Books, 2013.

[Szp11] SZPIRO, GEORGE G.: *Die Keplersche Vermutung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[Yan02] YANDELL, BENHAMIN H.: *The Honors Class*. A K Peters, Ltd., 2002.

Vögel und Frösche - Mathematik aus verschiedenen Perspektiven

Viktoria Kühner, Kari Küster



„Mathematisches Denken“ – das Thema des diesjährigen Romseminars legt die Frage nahe, auf welche Weise mathematische Inhalte von den Mathematikern gedacht und erdacht werden. Gibt es prägnante Unterschiede, die es ermöglichen, die Denker der Mathematik in verschiedene Typen einzuteilen? Wir möchten einen Ansatz von Freeman Dyson vorstellen.

3.1 Freeman Dyson - „Vögel und Frösche“

In seiner berühmten Einstein-Rede mit dem Titel „Vögel und Frösche“ kategorisiert Freeman Dyson verschiedene Arbeitsweisen, Motivationen und Denkmuster von Mathematikern. Einige Mathematiker seien Vögel, andere Frösche, laut Dyson. In der Einleitung der Rede heißt es:

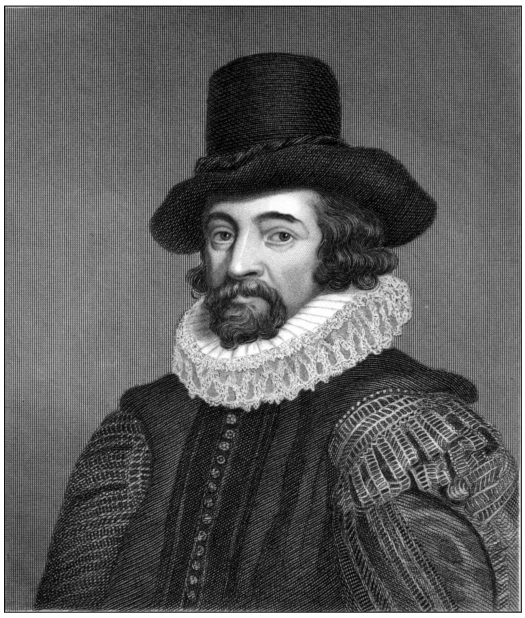


Abbildung 3.1: Francis Bacon



Abbildung 3.2: René Descartes

> *Some mathematicians are birds, others are frogs.*
>
> *Birds fly high in the air and survey broad vistas of mathematics out to the far horizon. They delight in concepts that unify our thinking and bring together diverse problems from different parts of the landscape.*
>
> *Frogs live in the mud below and see only the flowers that grow nearby. They delight in the details of particular objects, and they solve problems one at a time.*

Freeman Dyson ist ein US-amerikanischer Physiker und Mathematiker. Er wurde 1923 in Crowthorne, Berkshire, geboren. In den 1940er Jahren studierte er in Cambridge Mathematik, unter anderem bei Godfrey Harold Hardy. Nach Ende des zweiten Weltkriegs ging er nach Princeton in die USA, wechselte in die Theoretische Physik und ist seit den 1950er Jahren Professor am Institute for Advanced Study, Princeton, und US-amerikanischer Staatsbürger.

Dyson beschäftigt sich auch mit philosophischen Fragen und z.B. in jüngster Zeit auch mit dem Thema der globalen Erwärmung. Seine Rede „Vögel und Frösche“ enthält eine Auflistung einiger bedeutender Naturwissenschaftler, Philosophen und Mathematiker aus, die er einer der beiden Kategorien zuschreibt. Seine Abhandlung beginnt im 16. Jahrhundert mit den Philosophen Francis Bacon und René Descartes.

3.2 Francis Bacon und René Descartes

Laut Dyson lässt sich der Beginn der modernen Wissenschaft im 16. Jahrhundert festmachen. So unterscheidet er zwischen der englischen und der französischen Schule, deren unterschiedliche Herangehensweise und Motivation, Naturwissenschaft zu betreiben, auch heute noch sichtbar sei. Francis Bacon, ein englischer Philosoph, der von 1561–1626 lebte, ist sozusagen der „Urfrosch“. Als Wegbereiter des Empirismus

festigt er den Ansatz, dass wissenschaftliche Erkenntnisse auf Beobachtung und Experimente zurückzuführen sind. Wahr ist also, was wir mit den Sinnen beobachten können.

Ihm gegenüber steht René Descartes (1596–1650), französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler, der mit seinem rationalistischen Denken, dem Cartesianismus, als der „Urvogel" eine lange Linie von „Vögeln" in Frankreich begründete. Von ihm stammt der berühmte Ausspruch „Cogito, ergo sum". Nach seiner Auffassung sollte der Wissenschaftler durch bloßes Nachdenken vom Schreibtisch aus die Naturgesetze herleiten, die Logik als Werkzeug und das Wissen um Gott seien dabei ausreichend, um deren Korrektheit sicherzustellen.

3.3 Marie Curie

Eindeutig als Frosch auszumachen ist Marie Curie (1867–1934). Die Physikerin und Chemikerin hat gemeinsam mit ihrem Ehemann Pierre Curie die Elemente Polonium und Radium entdeckt und etablierte den Begriff „radioaktiv", für die Strahlung von Uranverbindungen. Sie erhielt 1903 einen anteiligen Nobelpreis für Physik und 1911 den Nobelpreis für Chemie. Dyson ordnet sie der Kategorie der Frösche ein, da sie für ihre Forschung ganz konkrete Experimente durchführte.



Abbildung 3.3: Marie Curie

3.4 David Hilbert

Ein großartiger Vogel, aber sicherlich auch genialer Frosch war David Hilbert (1862–1943), der hauptsächlich in Göttingen wirkte. Er leistete Beiträge in einer Vielzahl von mathematischen Gebieten und war Mitbegründer ganzer Forschungsgebiete, z.B. der Funktionalanalysis, wo er dem „Hilbert-Raum", seinen Namen lieh.

Hilbert brachte die Mathematik durch seine formalistische Auffassung sehr viel weiter. Zu Beginn seines Wirkens war die Mathematik noch wenig gefestigt und der Stil eher prosaisch als formal. Er veranlasste schließlich eine kritische Analyse der Begriffsdefinitionen und des mathematischen Beweises und hatte mit seinem „Hilbertprogramm" nicht weniger als die vollständige Axiomatisierung der Mathematik zum Ziel. Allerdings erwies sich diese als nicht möglich, wie Kurt Gödel 1931 in seinen Unvollständigkeitssätzen zeigte. Trotzdem war die Entwicklung des Hilbertprogramms für die Mathematik außerordentlich fruchtbar und führte zu einem vertieften Verständnis von Mathematik, Logik und deren Grenzen.

Als einer der führenden deutschen Mathematiker wurde HILBERT gebeten, beim zweiten internationalen Mathematikerkongress im Jahr 1900 ein Grundsatzreferat zu halten. Er entschied sich für den Blick in die Zukunft statt der Würdigung bisheriger Errungenschaften der Mathematik, so stellte er eine Liste von 23 ungelösten mathematischen Problemen aus ganz verschiedenen Gebieten der Mathematik vor. Sein Vorhaben, hiermit die weitere Entwicklung der Mathematik zu beeinflussen, ist gelungen: Die Hilbertschen Probleme wurden zur Leitschnur ganzer Generationen von Mathematikern und hatten wesentlichen Einfluss auf die Mathematik des 20. Jahrhunderts. Die Lösung eines jeden Problems wurde als große Leistung gewürdigt.



Abbildung 3.4: DAVID HILBERT

Als ein „Vogel“, mit einem umfassenden Überblick über die gesamte Mathematik wählte HILBERT Probleme aus, an welchen sich die „Frösche“ abarbeiten konnten.

3.5 NICOLAS BOURBAKI

Hinter NICOLAS BOURBAKI verbirgt sich nicht etwa ein Mathematiker, sondern eine gesamtes Autorenkollektiv vorwiegend französischer Mathematiker, das unter diesem Pseudonym veröffentlichte.

1934 begann die Arbeit an einem vielbändigen Lehrbuch der Mathematik in französischer Sprache, den „Eléments de mathématique“. Zuletzt erschien im Jahr 2016 ein neuer Band über Algebraische Topologie. Die Gründungsmitglieder HENRI CARTAN, CLAUDE CHEVALLEY, JEAN DELSARTE, RENÉ DE POSSEL, JEAN DIEUDONNÉ und ANDRÉ WEIL fassten den Entschluss, eine Enzyklopädie der Mathematik zu erstellen, welche die gesamte nötige Information enthält und alles Unnötige außen vor lässt. Damit werden komplette Gebiete der Mathematik als erledigt angesehen. Ziel war es weniger, neues mathematisches Wissen zu schaffen, sondern bestehende mathematische Erkenntnisse neu aufzubereiten und in einen stringenten Zusammenhang zu stellen. Den von BOURBAKI angestrebten Überblick über die Mathematik kann man als ein entscheidendes Ereignis für die Vögel unter den Mathematikern bewerten. HILBERTS Formalismus fortführend sind Aufbau und Notation des Werks außerordentlich rigide und als Lehrbuch kaum einsetzbar. NICOLAS BOURBAKI hat den streng logischen Stil der heutigen Mathematik entscheidend mitgeprägt.

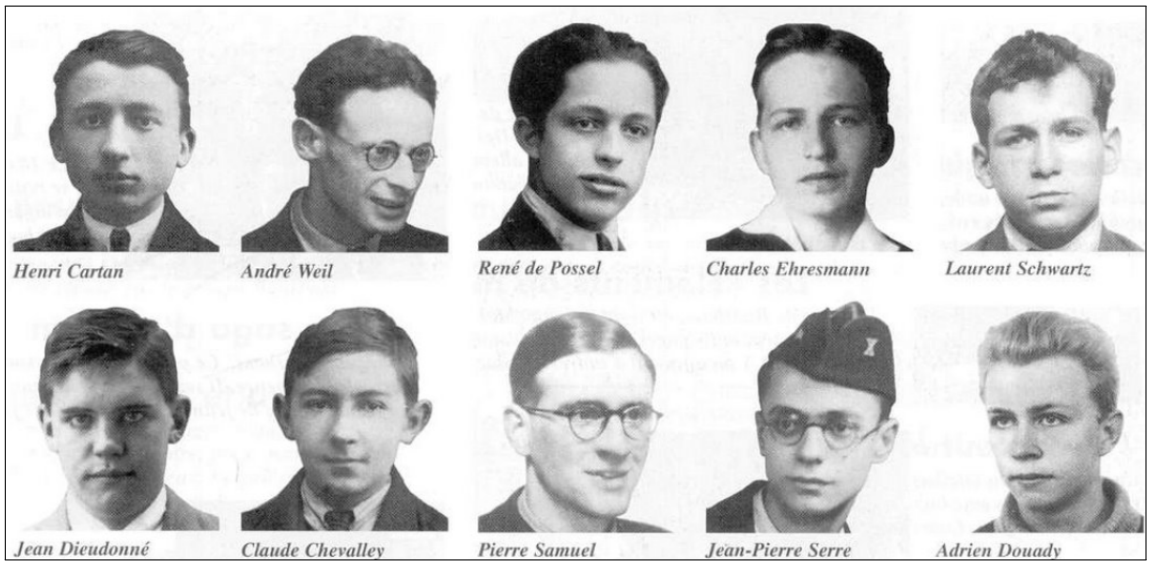


Abbildung 3.5: Einige Mitglieder von Bourbaki

3.6 John von Neumann - Frosch oder Vogel?

Einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts war John von Neumann, der 1903 bis 1957 lebte. Er war in verschiedenen Gebieten der Mathematik tätig, darunter die Mathematische Logik, Funktionalanalysis, Quantenmechanik und Spieltheorie. Außerdem zählt er zu den „Vätern" der Informatik.

Freeman Dyson ordnet John von Neumann eindeutig der Kategorie der „Frösche" zu.

Bereits in seiner Kindheit zeichnete John von Neumann sich durch seine überdurschnittliche Intelligenz und sein außergewöhnliches Gedächtnis aus. So sagt man ihm nach, er könne Goethes „Faust" auswendig.

Seine mathematische Karriere ist außerordentlich, bereits mit 17 Jahren veröffentlichte er seinen ersten mathematischen Artikel. Von 1926–1927 war er in Göttingen bei David Hilbert tätig, um dann ein Jahr später 1928 an der Universität Berlin der bis dato jüngste Privatdozent zu werden. In diesen Jahren beschäftigte er sich hauptsächlich mit der *Entwicklung der axiomatischen Mengenlehre* und der *Hilbertschen Beweistheorie*, was damals das aktuelle Forschungsgebiet der Gruppe um David Hilbert in Göttingen war.

Von Neumanns Beschäftigung mit der mathematischen Logik endet mit Gödels Unvollständigkeitssatz, der Hilberts Programm einen schweren Schlag versetzte. Gödel wird später enger Freund und Kollege von John von Neumann und Albert Einstein in Princeton, USA. Zu von Neumanns Forschungsgebieten in dieser Zeit gehört unter anderem die Quantenmechanik. Dabei leistete er einen immensen Beitrag zur Funktionalanalysis für unbeschränkte lineare Operatoren auf Hilberträumen. Von Neumann veröffentlichte das erste mathematisch durchdachte Buch zur Quantenmechanik. Ein anderes Gebiet, mit dem er sich beschäftigte, war die Spieltheorie. Außerdem ist er bekannt für seine Arbeit über Operatoralgebren, den sogenannten „von Neumann-Algebren" und seine Arbeit zur Ergodenhypothese, in Konkurrenz mit George David Birkhoff und Bernard Koopman.

Wieso wird JOHN VON NEUMANN von DYSON als Frosch bezeichnet, wenn er doch auf so vielen unterschiedlichen Gebieten der Mathematik Expertise vorzuweisen hatte?

Laut DYSON sollen Vögel hoch in der Luft fliegen und die mathematische Landschaft überschauen, so wie HILBERT zur Jahrhundertwende seine 23 zukunftsweisende Probleme vorstellte, Probleme, die die Frösche lösen können. Auch JOHN VON NEUMANN war eingeladen beim internationalen Mathematikerkongress 1954 in Amsterdam zu sprechen und eine Rede mit dem Titel „Unsolved Problems in Mathematics“ zu halten. Erhofft hatte man sich erneut eine Liste von Problemen, die die Richtung der Mathematik für die zukünftigen Jahrzehnte weisen sollten. Leider hat JOHN VON NEUMANN nur alte Resultate vorgestellt, und es wurde letztendlich auch kein Manuskript seines Vortrags abgedruckt.



Abbildung 3.6: John von Neumann

Ein Frosch gleicht also einem Problemlöser, der gerne im Detail arbeitet und ein Vogel fliegt über der mathematischen Landschaft und kann sehr weit nach vorne blicken, um Probleme zu finden, die dann von den Fröschen zu lösen sind. JOHN VON NEUMANN hat wohl mit seiner Rede in Amsterdam einen Froschmoment gezeigt, dennoch hatte er einen immensen Überblick über die verschiedensten Gebiete der Mathematik. Dies zeigt, dass diese Kategorisierung die Mathematiker nicht in zwei disjunkte Mengen zerlegen kann.

3.7 Paul Erdős

Mit einem Lebenswerk von 1486 mathematischen Arbeiten an denen über 500 Koautoren beteiligt waren, schafft der in Ungarn geborene Mathematiker PAUL ERDŐS einen Weltrekord und zählt zweifelsohne zu den wichtigsten und bemerkenswertesten Mathematikern des 20. Jahrhunderts. Er wurde 1913 in Budapest geboren und galt schon früh als mathematisches Wunderkind. 1938 musste er aufgrund seiner jüdischen Abstammung dem ungarischen Faschismus entfliehen und reiste in die USA. PAUL ERDŐS fand einen elementaren Beweis des „Primzahlsatzes“, wahrlich eine überragende Leistung, die kaum für möglich gehalten wurde. Gestorben ist PAUL ERDŐS 1996 im Alter von 83 Jahren.

ERDŐS ist vor allem durch seine vielen Vermutungen bekannt, von denen zahlreiche noch heute ungelöst sind. Andere wurden erst in jüngster Zeit gelöst. Ein Beispiel dafür ist das Green-Tao-Theorem oder das Erdős-Diskrepanzproblem, bewiesen unter anderem von TERENCE TAO, der im folgenden Abschnitt besprochen wird.

Die Struktur der mathematischen Beweise, ihre Schönheit und Einfachheit waren

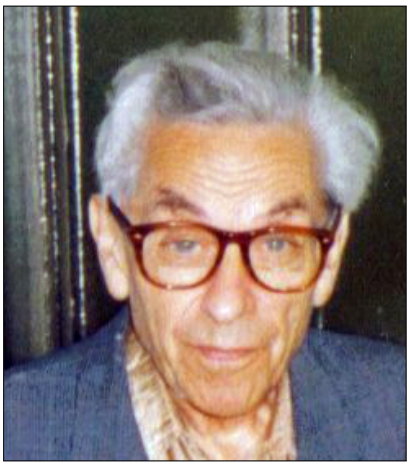


Abbildung 3.7: Paul Erdős

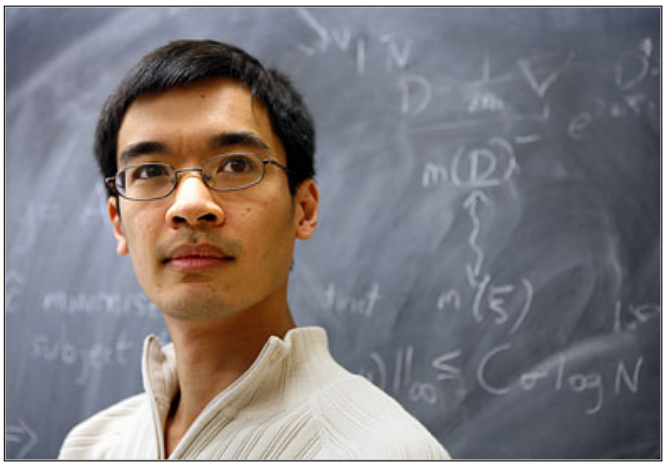


Abbildung 3.8: Terence Tao

für Paul Erdős essentiell, Dyson ordnet ihn deshalb den „Fröschen“ zu.

3.8 Terence Tao

Ein weiterer bedeutender Vogel ist der australische Mathematiker Terence Tao (*1975). Als mathematisches Wunderkind hatte er schon mit acht Jahren die mathematischen Fähigkeiten eines überdurchschnittlichen Studienanfängers. Heute ist er Fields-Medaillen-Träger und erzielte bedeutende Fortschritte auf einer Vielzahl von mathematischen Gebieten. Er löste beispielsweise eines der Erdős-Probleme und bewies das Green-Tao-Theorem. Der Beweis bringt verschiedenen mathematische Gebiete wie Ergodentheorie und Zahlentheorie zusammen und zeugt vom Weitblick und der Vernetzungsgabe eines mathematischen Vogels. Terence Taos Überblick zeigt sich z.B. auch in seinem Blog, wo er wichtige mathematische Neuerungen vorstellt und Artikel und Gedanken rund um die Mathematik formuliert.

3.9 Vögel und Frösche in anderem Gewand

Freeman Dyson ist nicht der einzige, der Mathematiker anhand ihrer Denk- und Arbeitsweise eingeteilt hat. Ähnliche Kategorien finden sich bei Gian Carlo Rota in „Indiscrete Thoughts“, (1997), welcher „Theorizers“, und „Problem Solvers“, einander gegenüber stellt. Timothy Gowers stellt in „The Two Cultures of Mathematics“, (2000) „Theory-builders“, and „Problem-solvers“, vor und David Mumford findet in „Math, Beauty and Brain Areas “, (2015) gar vier Kategorien: „Explorers“, „Alchemists“, „Wrestlers“, und „Detectives“. Vielleicht hat der Leser Lust, eigene Kategorien zu finden.



Some mathematicians are birds, ...



... others are frogs.





Mathematics needs both birds and frogs.

Literatur

[bou] `https://de.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki`.

[des] `https://de.wikipedia.org/wiki/René_Descartes`.

[Dys09] Dyson, Freeman: *Birds and frogs*. Notices of the AMS, **56**(2):212–223, 2009.

[Gow00] Gowers, Timothy: *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, Kapitel The Two Cultures of Mathematics. American Mathematical Society, 2000.

[hil] `https://de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert`.

[Maz12] Mazur, Susan: *An Interview With Freeman Dyson on the Origins of Life on Earth*, 2012.

[Mum] Mumford, David: *Math & Beauty & Brain Areas*. `http://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2015/MathBeautyBrain.html`.

[Rot97] ROTA, GIAN-CARLO: *Indiscrete Thoughts*. Birkhäuser Basel, 1997.

[tao] `https://de.wikipedia.org/wiki/Terence_Tao`.

[VN91] VON NEUMANN, JOHN: *Die Rechenmaschine und das Gehirn*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 1991.

[Zie00] ZIEGLER, GÜNTER M.: *Der Mann, der die Zahlen liebte. Die erstaunliche Geschichte des Paul Erdös und die Suche nach der Schönheit in der Mathematik.*, 2000.

Das vierdimensionale Paradies – Dante e la Matematica

Annachiara Piubello

4.1 Dante Alighieri



Dante Alighieri (1265–1321) ist der bedeutendste Dichter der italienischen Literatur und wird als „Sommo poeta“ (wichtigster Dichter) erinnert. Er machte das Italienisch zu einer Literatursprache. In seiner Zeit war nämlich Italien in viele Länder geteilt, in denen man verschiedene Dialekte, oder sogar Sprachen gesprochen hat. Nach seiner Meinung eignete sich jedoch keine dieser zum Schreiben und Dichten, weil sie zu unterschiedlich waren. Außerdem brauchte er eine „hohe“ Sprache dafür, um über Gott sprechen zu können. Deshalb hat er eine neue Sprache aus seinem Dialekt der Toskana gebildet und mit neuen Wörter ergänzt.

Dante hat sich aber nicht nur mit Literatur beschäftigt. In seinem Studium hat er ein großes Interesse für die Mathematik entwickelt. Vor allem war er an der Pythagoräischen Philosophie interessiert: er glaubte „alles ist Zahl“, das heißt, dass alle Dinge aus Zahlen bestehen und aus ihnen hervorgehen. Die Eins ist also der Ursprung von Allem. Außerdem dachte er, dass die Zahlen, oder analog die Geometrie, der Harmonie und der Perfektion des Universums entsprechen. Alles hatte eine katholische Interpretation, in dem die Zahl Eins Gott ist, aus dem alles hervorgeht. Das kann man in der Göttlichen Komödie sehr gut erkennen:

Tu credi che a me tuo pensier mei
da quel ch'è primo, cosi come raia
da l'un, se si conosce, il cinque e'l sei;

Du wähnest, dein Gedanke käm zu mir
Vom Urgedanken her, wie man entfalten Wohl
aus der Einzahl kann die Drei und Vier?

(PAR. XV 55-57)

4.2 Die göttliche Komödie: eine Reise durch die drei Reiche der jenseitigen Welt

4.2.1 Struktur

Die „Divina Commedia“ ist eine episch-narrative Erzählung in gereimten Elfsilblern, insgesamt 14.233 Versen, die nach dem Prinzip der terza rima gereimt sind. Die Komödie ist in drei Bücher („Cantiche“) eingeteilt: Inferno, Purgatorio und Paradiso. Jedes Buch enthält 33 Gesänge und die Hölle beginnt mit einem zusätzlichen Prolog, damit ist die Komödie in insgesamt hundert, eine sehr wichtige Zahl für die Christen, Gesänge geteilt.

4.2.2 Der Inhalt

Die Göttliche Komödie ist als eine große Vision gedacht, als ein persönliches Erlebnis des Dichters, der sich mitten im Leben, in der Osterwoche des Jubeljahres 1300, durch einen wilden, grauenvollen Wald irren sieht. Dort findet der Dichter die Tür der Hölle und beginnt seine Reise durch die drei Reiche der jenseitigen Welt.

Von VERGIL geleitet durchschreitet Dante die neun Kreise der trichterförmig Hölle. Je tiefer die beiden hinabsteigen, desto massiver werden die Sünden und Strafen. Am tiefsten Punkt der Hölle werden die Verräter Judas, Brutus und Cassius in ewiger Pein vom Satan selbst zermalmt.

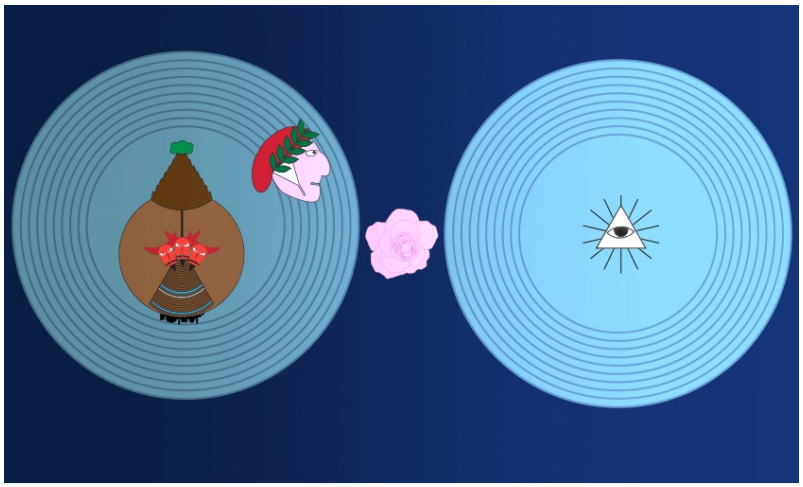
Im zweiten Teil der Göttlichen Komödie beginnt der Aufstieg über den Läuterungsberg (Purgatorio). In den neun Abteilungen des Berges büßen Menschen, in der Hoffnung erlöst zu werden, Stufe für Stufe ihre Sünden ab. Auf dem Gipfel erwartet den geläuterten Dichter der Einzug in das Paradies.

Die folgende Himmelfahrt ist von Beatrice, die von Dante geliebte Frau, geleitet. Zusammen gehen sie durch die neun paradiesischen Sphären, wo ihnen unter anderem Kirchenväter und Apostel begegnen. Ganz am Ende kommt Dante zum Empyreum, der letzte Himmel, und darf dort bis zum Gott aussteigen, der sich im Zentrum von neun Sphäre befindet aber gleichzeitig das ganze Universum umkreist.

4.3 Die Mathematik in der Komödie: das vierdimensionale Paradies

Als Dante zum Empyreum kommt, beschreibt er, was er sieht, folgendermaßen:

Le parti sue vivissime ed eccelse	*Der gleich an Licht und Kraft in jedem Teile,*
sì uniforme son, ch'i' non so dire	*So gleich, dass ich den Ort nicht schildern kann,*
qual Beatrice per loco mi scelse.	*Den Beatrice mir erkor zum Heile*
[...]	[...]
Luce e Amor d'un cerchio lui comprende,	*Wie alle er umschlingt, schlingt engverbündet*
sì come questo li altri; e quel precinto	*Sich Licht und Liebe auch um ihn: verstehen*
colui che 'l cinge solamente intende.	*Kann er dies Wunder nur, der es gründet.*



PAR. XXVII 100-102, 110-112

Aus diesem Zitat versteht man, dass der Ort, an dem Dante sich befindet, vollkommen symmetrisch ist, wie eine Sphäre. Der Dichter sagt dazu:

Non altrimenti il trïunfo che lude
sempre dintorno al punto che mi vinse,
parendo inchiuso da quel ch'elli 'nchiude"

Also erlosch jetzt des Triumphes Tanz
Um jenen Punkt, der alles hält umschlungen,
Wo alles scheinbar i h n umschlingt im Kranz.

PAR. XXX 10-13

Hier versteht man, dass Gott das Zentrum des Universums ist und er das gleichzeitig enthält. Wie können wir als Mathematiker dies interpretieren? Dazu brauchen wir eine kurze Wiederholung der Topologie.

Man kann die 2-Sphäre in der folgenden Art darstellen: zwei Kreisscheiben mit den Rändern zusammengeklebt. Das gilt auch in höheren Dimensionen: man kann die 3 Sphäre konstruieren, wenn man zwei vollen Kugeln an den Rändern identifiziert. Wenn wir uns einen Beobachter stellen, der in den Kugeln läuft, kann er sich direkt von einer Kugel zu der anderen bewegen und nichts davon spüren.

So kann man auch Dantes Paradies darstellen: der Dichter geht von einer Kugel (die ersten neun Himmel) zu der anderen (die Kugel mit Gott im Zentrum), alles ist genau symmetrisch und Gott ist das Zentrum eines Balls und enthält gleichzeitig alles (siehe Abbildung 13.1).

4.4 Andere Beispiele

In der Komödie kann man deutlich sehen, wie groß Dantes Interesse für die Mathematik war. Man findet viele Beispiele von Zahlensymbolik, die sehr wichtig für die Pythagoräer war. Die Dreiteilung des Werks und der Jenseitsreiche ebenso wie das Formschema der aus drei Versen bestehenden Terzine wird herkömmlich auf die Drei als Zahl der Trinität bezogen, während man in der Zahl der 33 Gesänge einerseits einen Bezug zur Dreizahl, aber auch einen Bezug zu den Lebensjahren Jesu erkannt hat.

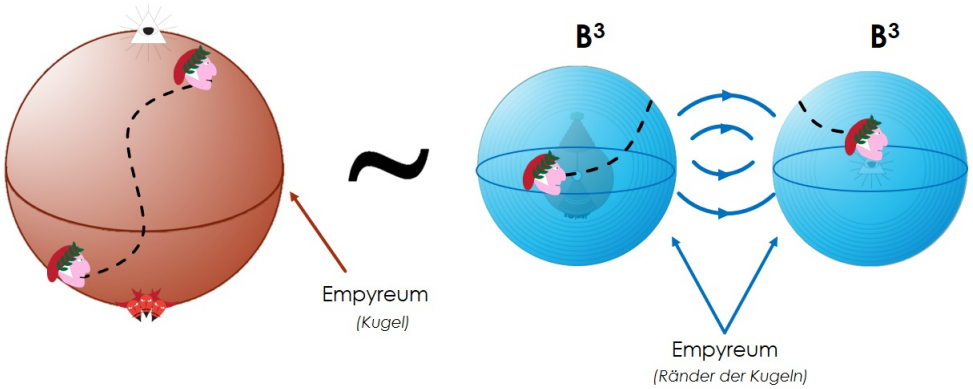


Abbildung 4.1: Das Paradies als die 3-Sphäre

Der Dichter benutzt aber die Mathematik auch um zu erklären, was Worte alleine nicht sagen können. Ich möchte hier zwei passende Beispiele erwähnen.

4.4.1 Anzahl der Engel

Als Dante im Paradies ist, fragt er Beatrice, wie viele Engeln sich dort befinden. DANTE wusste, dass es keine beschränkte Zahl sein kann, aber in seiner Zeit durfte man nicht über Unendlichkeit sprechen, weil nur Gott ewig ist, und man Gott nicht verstehen kann. Also brauchte DANTE eine Art, die Unendlichkeit zu beschreiben, ohne den Begriff zu benutzen.

Dafür benutzt er die berühmte Legende von dem Erfinder des Schachspiel. Dieser hatte seinem König das Spiel geschenkt und deshalb durfte er dafür sich etwas wüschen. Er wünschte sich Weizenkörner: Auf das erste Feld eines Schachbretts wollte er ein Korn, auf das zweite Feld das Doppelte, also zwei, auf das dritte wiederum die doppelte Menge, also vier und so weiter. Der König lachte und war gleichzeitig erbost über die vermeintliche Bescheidenheit. Als sich der Mann einige Tage später erkundigte, ob der König seine Belohnung bereitgestellt habe, musste er hören, dass die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner berechnet hätten: er könne diese Menge Getreidekörner im ganzen Reich nicht aufbringen. Auf allen Feldern eines Schachbretts zusammen wären es $3,6 \times 10^{19}$ Weizenkörner. So viele sind auch die Engeln im Paradies, eine unvorstellbare Zahl.

4.4.2 Das Ende der Komödie

Ganz am Ende seiner Reise darf Dante für eine Sekunde Gott direkt anschauen. Was er sieht, kann er nicht in Worten fassen, weil Gott unvorstellbar ist. Um uns zu erklären, wie er sich fühlt, erzählt er, dass er wie ein Geometer ist, der nach der Kreisquadratur sucht und sie nicht verstehen kann. Und mit diesen wunderschönen Versen beendet der Dichter sein Werk:

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige	*Doch wie der Geometer, tief in Sinnen,*
per misurar lo cerchio, e non ritrova,	*Das Maß des Kreises sucht betörter Meinung*
pensando, quel principio ond'elli indige	*Und grübelnd nicht den Grundsatz*
	kann gewinnen,
tal era io a quella vista nova	*So stand ich bei der plötzlichen Erscheinung:*
veder voleva come si convenne	*Ich wollte, wie sich Kreis und Bild bedingen,*
l'imago al cerchio e come vi s'indova	*Erkennen, und die Bild- und Kreisvereinigung*
Ma non eran da ciò le proprie penne.	*Doch dazu taugten nicht die eignen Schwingen.*
Se non che la mia mente fu percossa	*Da fuhr ein Himmelsblitz durch meinen Geist*
Da un fulgore in che sua voglia venne.	*Und gab der Sehnsucht Kraft,*
	auch dies zu zwingen,
A l'alta fantasia qui mancò possa	*Dann stand die hehre Fantasie verwaist;*
Ma già volge il mio disio e 'l velle	*Schon aber folgte Wunsch und Wille gerne*
Sì come rota ch'igualmente è mossa	*Der Liebe, die in ewigem Gleichschwung kreist,*
L'amore che move il sole e l'altre stelle.	*Ihr, die die Sonne rollt und andern Sterne.*

PAR. XXXIII 133-145

Literatur

[Ali09] Alighieri, Dante: *La Divina Commedia Ediz. Integrale*. Paravia, 2009.

[Ber] Bertinetti, Armando: *Matematica e ... Dante*. https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/Matematicae/Matematicae...Dante.pdf.

[D'A11] D'Amore, Bruno: *Dante e la Matematica*. Giunti Editore, 2011.

[Fab14] Fabiana, Barra: *La Commedia di Dante e la Matematica: infinito e probabilità*. http://www.itismarzotto.it/wp/wp-content/uploads/2014/03/PPT-Barra.pdf, 2014.

[Rov10] Rovelli, Carlo: *Dante e Einstein nella tre-sfera*. http://disf.org/files/rovelli-dante-einstein-tre-sfera.pdf, 2010.

[Zan10] Zanasi, Roberto: *La 3-sfera*. http://proooof.blogspot.com/2010/03/la-3-sfera.html, 2010.

[Zoo] Zoozmann, Richard: *Die göttliche Komödie, in deutschen Terzinen*. http://www.divina-commedia.de/pdf/Die%20goettliche%20Komoedie.pdf.

Wigner's 'unreasonable effectiveness of mathematics' as a philosophical problem

Jan van Neerven



Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.
V.I. Arnold

5.1 WIGNER'S "unreasonable effectiveness of mathematics"



In a famous essay [Wig60] the physicist EUGENE WIGNER contemplates what he calls the "unreasonable effectiveness of mathematics". Mathematics is effective in the way it enables us do very detailed calculations leading to predictions that are consistent with experiment to incredible precision. However, this effectiveness is unreasonable: the mathematics needed for these calculation does not bear any evident relationship to our every-day experience, nor was it designed for the purpose of these applications. In WIGNER's own words:

> *The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.*

WIGNER's essay, which is based on a lecture for a general audience, illustrates the quote with some examples which can be understood without too much expert knowledge. To give some further depth to it we will begin by giving three examples of the way mathematics seems to "impose itself" upon physics.[1]

Example 1

The first example is connected with a famous theorem of differential geometry, due to EMMY NOETHER, stating that to every symmetry there corresponds a conserved quantity.[2] The proof of this theorem actually constructs the preserved quantity from the symmetry. The best-known examples in classical mechanics are the following: Here the "symmetries" are the Galilean symmetries of the space-time $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ of

symmetry	conserved quantity
translation in space	momentum
rotation in space	angular momentum
translation in time	energy

classical physics preserving length of line segments in space and time intervals in time. Thus the physical conserved quantities correspond in a one-to-one fashion to the mathematical symmetries of $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. This by itself is remarkable, for "symmetry" is a mathematical notion, while the conserved quantities momentum and energy are definitely physical ones.

[1] A disclaimer seems appropriate: the author is neither a physicist nor a philosopher, nor can he claim any expert knowledge in the foundations of mathematics. This article is just a collection of very personal reflections based on a rather modest understanding of some of these issues.

[2] For a systematic discussion of the role of symmetry in modern theoretical physics, a good starting point is DAVID GROSS's paper [Gro96].

Even more interesting is that the discovery of the theory of special relativity can be understood in terms of symmetry groups. After Maxwell had formulated his famous equations unifying electricity and magnetism in 1861, it was quickly realised that these equations are *not* invariant under the Galilean symmetry group of $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Maxwell's equations feature a certain absolute constant c, interpreted as the speed of light, but invariance under the Galilean symmetries precludes the existence of such a constant: it forces the observed speed of light to depend on the relative speed of the observer and the light source. If a light source on a riding train would emit light in the direction of travel, an observer on the ground would measure the speed of light $c_{\text{ground}} = c_{\text{train}} + v$, where c_{train} is the speed of light relative to the train and v is the speed of the train. This was put to test in the famous Michelson-Morley experiment in 1887. To the surprise of many, however, the outcome was unequivocal: in agreement with Maxwell's equations, the speed of light appeared to be an absolute constant, independent of the relative speeds of observer and source, and in subsequent experiments this has been confirmed with the precision $\Delta c/c \leq 10^{-17}$ [HSM+09]. About the same time it was noted by Poincaré and Lorentz that, curiously, Maxwell's equations are invariant under a different group, nowadays called the Lorentz group. Attempts to explain this on physical grounds failed for being artificial. It required the genius of Einstein to simply *postulate* that the Lorentz group is the correct symmetry group of space-time and to work out the mathematical consequences of this assumption – the theory of special relativity.

Example 2

In classical mechanics, the equations of motion for objects satisfying suitable constraints are modelled on a smooth manifold M which serves as the configuration space. A *Lagrangian* is a smooth real-valued function L on $TM \times \mathbb{R}$, where TM is the tangent bundle of M (the points of which are (q, v) with $q \in M$ and $v \in T_q(M)$, the tangent space at the point M). Given a Lagrangian L, the *action* along a smooth path $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ is defined as

$$S := \int_{t_0}^{t_1} L\big(\gamma(t), \gamma'(t), t\big)\,\mathrm{d}t.$$

The *principle of least action* states that the motion of the system is given by the paths γ that are the critical points of the action functional S. Somewhat informally, by the latter we mean that

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} S(\gamma_\varepsilon) = 0$$

for any "parametrised perturbation" γ_ε of γ with a small parameter ε. This procedure can easily be made rigorous using coordinate charts [Spi99, Chapter 9]. A simple derivation shows that the equation of motion of L is the partial differential equation

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), v(t), t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\Big(q(t), v(t), t\Big)\right) = 0,$$

the so-called *Euler-Lagrange equation*.

An example may illustrate this. Consider a free point particle with mass m moving in $M = \mathbb{R}^3$ through a potential V. Taking

$$L := \frac{1}{2}mv^2 - V(q),$$

a simple computation shows that the Euler-Lagrange equations for L reduce to

$$ma = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

where $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ denotes acceleration. This is Newton's equation of motion for a point mass m subject to the *force* $-\partial V/\partial x$.

Perhaps surprisingly, the Maxwell's equations can also be cast in the form of a principle of least action. This is not the place to develop this in detail, so we only summarise the main steps.[3] The first is to interpret, in the language of differential geometry, the electric and magnetic fields E and B as a 2-form and a 1-form, respectively, and to define the *electromagnetic field*

$$F := B + E \wedge \mathrm{d}t.$$

Now there is a duality mapping, the so-called *Hodge star operator*, which provides a canonical way of associating, in the context of an d-dimensional Riemannian manifold, a $(d-k)$-form $\star\omega$ to any k-form ω. In our case the dimension equals $d = 3$ and the Hodge star operator associates a 1-form $\star F$ to the 2-form F. Their wedge product $F \wedge \star F$ is a 3-form which can be integrated over M and the Maxwell equations are recovered as the Euler-Lagrange equations for the "action"

$$S := -\frac{1}{2}\int_M F \wedge \star F.$$

Referring once more to the language of differential geometry, the electromagnetic field F can be interpreted as the *curvature* of a suitable *connection* associated with F. The marvellous thing, discovered by HILBERT, is that EINSTEIN's equations of general relativity have the same form: they can be written as the Euler-Lagrange equations corresponding to the action functional given by the scalar curvature of space-time!

Example 3

This example will be even more condensed. The passage from classical mechanics to quantum mechanics essentially consists of replacing measured quantities, such as position, momentum, energy, etc., by the operation of measuring them. At the risk of oversimplifying things, instead of asking (classically) whether a particle finds itself in a region R of its configuration space M (which can be answered by "no" or "yes") we may consider the multiplication operator

$$\pi_R : f \mapsto \mathbf{1}_R f$$

[3] A lucid and fully self-contained treatment of what follows is given [BM94].

on the Hilbert space $L^2(M)$, where $\mathbf{1}_R$ is the indicator function of R. This is a self-adjoint projection on $L^2(M)$ whose spectrum consists of two eigenvalues, 0 and 1, with eigenfunctions $f_0 = \mathbf{1}_{\complement R}$ and $f_1 = \mathbf{1}_R$ corresponding to "no" and "yes", respectively. More generally, in the mathematical formulation of quantum mechanics, observables are self-adjoint operators and their spectral values the potential outcomes of measurement. The spectral theorem for self-adjoint operators, which states in a precise way how self-adjoint operators can be assembled from self-adjoint projections, can then be interpreted as saying that every question that we can pose to Nature can be constructed from yes-no questions.

In the first example we have seen the importance of symmetries. One may now ask whether the symmetries of M can be similarly implemented on a Hilbert space. This is indeed possible and the way to do it is to associate with every symmetry σ of M a unitary operator U_σ acting on a Hilbert space H in such a way that $\sigma \mapsto U_\sigma$ is a homomorphism of groups (note that both the symmetries of M and the unitary operators on H form a group). Such a mapping is called a *unitary representation* of the symmetry group of M. By taking direct sums one can add unitary representations. A unitary representation is said to *irreducible* if it cannot be decomposed as a sum of smaller unitary representations.

Eugene Wigner [Wig39] proposed that an *elementary particle* may now be defined mathematically as a unitary representation of the inhomogeneous Lorentz group, and went on to show that they are classified by two numbers: a continuous parameter $m \geq 0$ ("mass") and a half-integer parameter s ("spin"). This indeed corresponds to the observed elementary particles of Nature, albeit that quantities such as "charge" are not captured in this framework. They, however, appear by the same mechanism once the external symmetry group of space-time is augmented by a group of internal symmetries. Now something truly spectacular happens: if one chooses $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$ for the internal symmetries, the irreducible unitary representations precisely correspond the known particles of particle physics![4] Roughly speaking, the groups $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ correspond to the symmetries of electromagnetism, the weak force and the strong force, respectively. Nobody knows why Nature choose these particular groups; this is an empirical fact unveiled by particle accelerators at CERN, Fermilab and other facilities.

5.2 ... as a philosophical problem[5]

These are but three examples of what appears to be a profound unity of mathematics and physics. That this unity should exist is deeply mysterious, if only because physics is the science of exploring the laws governing the external world whereas mathematics explores a mathematical universe created by our collective minds. If one considers mathematics as the art of deducing statements from a predefined collection of axioms by making use of predetermined deduction rules, one must admit that the choice of those axioms and deduction rules is in a sense arbitrary. Other choices

[4] A detailed historical account of the discoveries leading up to this realisation is presented in [Gri08].

[5] The title of this paragraph, and indeed of the article, is inspired by [Ste98].

are possible and lead to different mathematics. The French mathematician JEAN DIEUDONNÉ has compared the formalist view of mathematics with a game of chess: it, too, has an alphabet (the pieces), axioms (an initial configuration) and rules of inference (the chess rules).[6]

Since their formulation in the early 20th century the axioms of set theory (the so-called ZF axioms, named after their inventors ZERMELO and FRAENKEL) have been widely accepted as the "standard" axiomatisation of mathematics. For most working mathematicians, however, these axioms appear technical if not bizarre, and they seem to have little or no connection with everyday intuitions. Apart from set theorists, only few mathematicians seem to actually *know* the ZF axioms! How, then, can it be explained that the edifice we call "mathematics" which is built upon these axioms is so useful in describing the external world around us? Why would elementary particles care about the axioms of set theory? A game of chess cannot teach us anything about the external world, so why would the axioms of set theory?

To address this problem we will have to consider more closely the nature of mathematics. This has two aspects: What is the structure of mathematics and what are its object of investigation? The first question leads straight into the foundations of mathematics and constitutes the subject matter of mathematical logic, which treats mathematics and its various sub-disciplines as formal languages. Present-day mathematics is based on the ZF axioms of set theory, but alternative foundations can be given.[7] Interestingly, all these systems seem to reproduce at least those parts of mathematics that are relevant for physics (we don't try to define what this means!). We will focus on the second question, which is a question about the metaphysical status of mathematical concepts. For example, number theory investigates numbers, but what are "numbers" really? Are they merely patterns of neural activity in our brains, or do they have some real "existence" independently of us? Both positions (and various intermediate variants) have passionate adherents and declared opponents.

The delightful book "Conversations on Mind, Matter, and Mathematics" records a discussion between the neurologist JEAN-PIERRE CHANGEUX and Field medallist ALAIN CONNES defending, respectively, the former and the latter position [CC95]. CHANGEUX's reductionist point of view seems difficult to reconcile with our every-day experience that we (mathematicians) are able to meaningfully communicate with each other about mathematical objects, given that each one of us has a different brain with different neuronal connections. All mathematicians will agree that mathematics is

[6] In his article "Modern axiomatic method and the foundations of mathematics" (in [Die71]) he writes:

> *Mathematics becomes a* game, *whose* pieces *are graphic symbols distinguished from each other by their forms; with these symbols we make groupings which will be called* relationships *or* terms *according to their forms. By virtue of certain rules, certain relationships are described as* true*; other rules permit the construction of true relationships either from any relationships whatsoever or from other true relationships. The essential point is that these rules are of such a nature that in order to verify that they are being observed, it is sufficient to examine the* form *of these groupings which come into play.*

[7] Not only do different axiomatisations of set theory exist. e.g. by VON NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL (see [Kun11]), there are also very different proposals based on topos theory (see [LR03]; an accessible introduction is the paper [Lei14]) and VOEVODSKI's univalence programme [Uni13].

really "about something" which does not depend on the specific shape and wiring of one's brain. To dismiss mathematical objects as patterns of neuronal activity seems to deny the very essence of mathematics. What is more, in this view mathematics could not have existed before man arrived on the planet, and will cease to exist when (and if) mankind would ever be wiped out. The situation bears some resemblance with the ontological status of, say, Beethoven's 9th symphony. Nobody would sensibly claim it "existed" before Beethoven wrote it, and it is imaginable that at some point in the future the collective memory of this great work could be wept out completely – in which case one could reasonably say it then no longer "exists". There is one marked difference, however, in that mathematics, or at least a good part of it, is likely to be discovered (perhaps phrased in a different formal language) by any intelligent beings studying the laws of physics – something which can be hardly said of Beethoven's 9th symphony.

Let us, then, consider the platonist view that mathematical objects "exist" independently of us. In which "universe" do they exist? Obviously, they do not exist as material objects in our physical universe. Nobody has ever encountered a "two" on a walk in the park; at best one sees two trees or two birds. But if mathematical objects "exist" in an "immaterial universe" "beyond the space and time",[8] how can

[8]This view is held by several prominent mathematicians. Kurt Gödel writes in [Göd64]:

> *[...] the objects of transfinite set theory [...] clearly do not belong to the physical world and even their indirect connection with physical experience is very loose [...] But, despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves on us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future. The set-theoretical paradoxes are hardly any more troublesome for mathematics than deceptions of the senses are for physics.*

For Alain Connes, arithmetical truth describe a "primordial reality" (*"réalité mathématique archaïque"*) [CLS00]:

> *By this intentionally imprecise term, I lump together the vast continent of arithmetical truths.*

Axiomatic theories of mathematics are nothing but a tool to explore this reality:

> *We cannot avoid discussing in greater detail a distinction that is quite simple in the science of matter, but which turns out to be more subtle in the case of mathematics: it is the distinction between tools that are invented and the objects that they uncover. For example, the structure of DNA was discovered thanks to the electron microscope. The electron microscope is clearly a tool. Nobody would question that this tool, unlike DNA, was created by man. [...] As long as a tool has not proved itself by lifting in a significant way the veil that conceals primordial mathematical reality, it can rightly be considered sterile and nonexistent. [...] If we look at the sequence of prime numbers, for example, it appears at first glance to be as bizarre and disorderly as external reality. But it happens that, by developing an instrument of observation, by inventing appropriate concepts, we gradually succeed in guessing some of the regularities that lie within this seemingly disorganized reality. By trying to understand the geometric structure of the "arithmetic site", that is, the set of prime numbers, we manage little by little to perceive the extraordinary fundamental organization of this reality. [...] For me, the properties that are true characterize the object in its primordial reality, whereas those that are provable are the ones that our brain perceives through its instruments of observation.*

they causally interact with physical objects within space and time, such as our brains? For the very moment we practice mathematics, this is exactly what happens and the interaction leads to tangible consequences in our physical world, such as articles in journals and lectures at universities.

This objection to Platonism appears to have been brought up first by the philosopher PAUL BENACERRAF [Ben64].[9] He has a point if one accepts the sharp distinction between the external physical world, of which our brain is a part, and the mental world of our consciousness, of which mathematics is assumed to be a part. But exactly this could be questioned on the basis that it presupposes the 'scientific realist' position – this is the position that an external world exists independently of our observation and that its workings can be unravelled through scientific investigation. Reconciling this position with "mathematical realism" seems indeed problematic.

Can we be sure of the objective existence of an external world? This problem, known as the *Ding an sich* problem of the German philosopher IMMANUEL KANT, is not so easily dismissed. After all, we perceive the sense-data presented in our consciousness, but not the "objects themselves". Even the realist will admit that when we "see a table", we do not actually see "the table itself". At best we see the photons that are reflected from the table. And in fact we do not even see those: the image we perceive is formed in our brain only after retinal nerve pulses have made their way from the eye to the visual cortex. In the end, what we really see is the electrical activity of our visual cortex. The same reasoning applies to all other senses. How then can we be sure that there really "is" a table, even when nobody is watching? The same question can be asked about all objects around us, including our own brain! One could consistently argue that the "external world" is just a working hypothesis of our consciousness that serves to explain the patterns of our sense-data.

The philosophical debate about the nature of existence of things has recently moved from the philosophy departments to the physics laboratory,[10] often with surprising conclusions. Thus, relativity theory teaches us that distances and time intervals are not absolute but differ from observer to observer, depending on his/her frame of reference. In the same vein, quantum mechanics tells us that observables do not have a definite objective value before being measured and that different observers will give different (but consistent) accounts of reality. In the words of the physicist JOHN WHEELER [Whe78]:

[9] After elaborating his view that

> *I favor a causal account of knowledge on which for X to know that S is true requires some causal relation to obtain between X and the referents of the names, predicates, and quantifiers of S.*

he writes:

> *It will come as no surprise that this has been a preamble to pointing out that combining this [the causal – JvN] view of knowledge with the "standard" view of mathematical truth makes it difficult to see how mathematical knowledge is possible. If, for example, numbers are the kinds of entities they are normally taken to be, then the connection between the truth conditions for the statements of number theory and any relevant events connected with the people who are supposed to have mathematical knowledge cannot be made out. It will be impossible to account for how anyone knows any properly number-theoretical propositions.*

[10] The well-known physicist ABNER SHIMONY has reportedly called quantum mechanics 'experimental metaphysics'.

> *It has no sense to speak of what [the particle] was doing except as it is observed or calculable from what is observed. More generally we would seem forced to say that no phenomenon is a phenomenon until – by observation, or some proper combination of theory and observation – it is an observed phenomenon. The universe does not 'exist, out there' independent of all acts of observation. Instead, it is in some sense a strange participatory universe.*

A subsequent series of wonderful experiments performed by Alain Aspect, Anton Zeilinger and others has confirmed this view and showed that our naive ideas about the reality of things are wrong.[11] Let us mention just two of them: the experimental violation of Bell's inequality is commonly interpreted as forcing us to either give up realism or locality (the principle that there is no causation-at-a-distance), and the experimental realisation of Wheeler's delayed choice experiment forces us to choose between realism and backward causation. In reaction to such experiments, new interpretations of quantum mechanics have emerged which to some degree do away with notion of objective reality in favour of an operationalist view that "performing measurements" is "posing questions and getting answers", such as Griffiths' consistent histories interpretation [Gri02], Zeilinger's information-theoretical interpretation [Zei99], and Rovelli's relational interpretation [Rov96, SR07]. In some sense, all this is wonderfully in line with the positivist's tenet that it is meaningless to speak of things that in principle cannot be investigated empirically – "states of particles before they are measured" are precisely that.

5.3 Structuralism versus relationalism

We have argued that the notions of "mathematical reality" and "physical reality', if taken too naive or literal, are both problematic, especially when treated in connection with the problem of applicability of mathematics in physics. In both cases the problem is about ontology: in mathematics it is unclear "where" and "how" mathematical objects could exist and interact with the physical world, and physics has revealed that it is problematic to assign objective existence to space, time, and states.

A modern view in mathematics is that one can dispense with ontology altogether and view mathematics as describing structures rather than objects. This view, known as *structuralism* and popularised through the works of Bourbaki, maintains that mathematical objects are exhaustively described by the relations between them and do not have any "intrinsic" properties whatsoever. This is exemplified by the pervasive use of implicit definitions in present-day mathematics, which define structures rather than objects. For example, the definition of a "group" doesn't present us with actual groups; rather, it lists what it takes to be a group. "Group theory" doesn't require the existence of actual groups: it studies what can be said *if* one is presented with a group.

Likewise, a modern view in physics is to view it as the study of "generally covariant" quantities, i.e., those quantities that can be defined in a coordinate-free way and agreed upon by different observers. An "observer" is to be understood

[11] A detailed description of the most important ones has been given in the book [GB13]

in a general sense and includes inanimate measuring devices. For example, in special relativity the length of a time interval is not a generally covariant quantity: two observers in different inertial reference frames will measure time intervals differently. The generally covariant quantities of special relativity are precisely those that are invariant under the Lorentz group, such as the speed of light, the four-dimensional Minkowski distance between space-time points (but not space and time distances separately), energy-momentum (but not energy and momentum separately), the electromagnetic field (but not the electric and magnetic fields separately), etc. In general relativity, generally covariant properties have to be invariant under arbitrary space-time diffeomorphisms, and the famous "hole argument" by EINSTEIN demonstrates that because of this it becomes entirely meaningless to talk about "points in space-time" altogether. Only invariant descriptions of *relations* between space-time points have physical meaning. In EINSTEIN's own words [Ein16]:

> *All our space-time verifications invariably amount to a determination of space-time coincidences. If, for example, events consisted merely in the motion of material points, then ultimately nothing would be observable but the meeting of two or more of these points.*[12]

Arguments such as these have convinced many physicists that the laws of physics should be formulated in a "background free" manner. Here, under a "background" one understands the "empty arena" in which the events unfold. Classical mechanics and special relativity do have such backgrounds, namely Galilean space-time $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ and Minkowski space-time $\mathbb{R}^4$ respectively, but general relativity is a background free theory. This point of view is sometimes called *relationalism* and can be viewed as the modern version of LEIBNIZ's relationist view of Galilean space and time.[13]

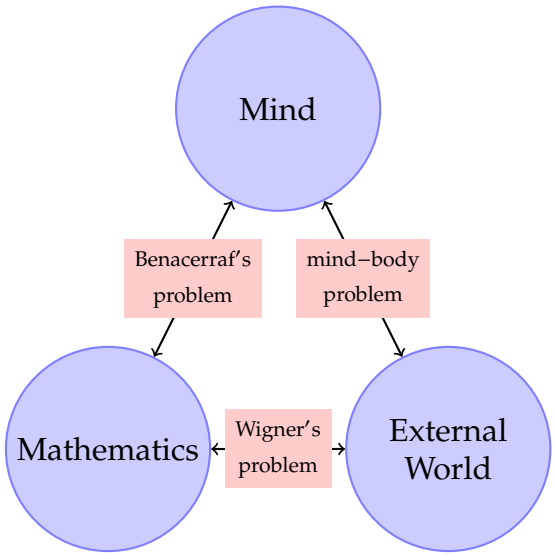
5.4 Conclusion

ROGER PENROSE, in his book "The Road to Reality", organises the three basic problems of reality in his mind/mathematics/external world triangle: the philosophical problem of existence of mathematical objects (we take the liberty of calling this *Benacerraf's problem*) is about the relation [mathematics vs. mind], the *mind-body problem* is about the relation [mind vs. external world], and *Wigner's problem* concerns the relation [external world vs. mathematics]. Given the striking resemblance between mathematical structuralism and physical relationalism, which both reduce the

[12] An especially lucid discussion of the hole argument is given in [Rov04]. Here one also finds a precise analysis of the physical meaning of statements such as "the event A happened at time B" as the coincidence of A with the event that the pointer of a clock points at B.

[13] In his debate with NEWTON, who held the view that space and time are absolute, LEIBNIZ already put forward the principle of *identity of indiscernibles*, which states that two things are equal if and only if they have the same properties. If absolute space and time existed (this was the view held by NEWTON), a different universe would result if all of its contents were translated or rotated by the same amount – but Galilean invariance means that no experiment could ever distinguish between these two universes. The same argument applies to translations in time. Therefore, LEIBNIZ argues, absolute space and time are to be rejected. For an excellent account of the LEIBNIZ-NEWTON controversy we recommend [Skl74].

ontological content of their respective domains to the bare minimum, one may go a step further by *defining* the physicist's objective reality as the mathematical consistency of the individually observed realities presented to the minds of different observers. Once we have accepted that mathematics and physics can be stripped from their ontological burdens, this seems a reasonable proposal which may represent a step towards resolving all three problems in Penrose's triangle, in that it reconciles mathematics and physics as two intrinsically related aspects of our description of the reality presented to our minds. To paraphrase Arnold's motto: Mathematics is physics and physics is mathematics.



Bibliography

[Ben64] Benacerraf, Paul: *Mathematical Proof*. In Benacerraf, Paul and Hilary Putnam (editors): *Philosophy of Mathematics: selected Readings*, Prentice-Hall philosophy series. Prentice-Hall, 1964.

[BM94] Baez, John and Javier P. Muniain: *Gauge Fields, Knots and Gravity*, volume 4 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific, 1994.

[CC95] Changeux, Jean-Pierre and Alain Connes: *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*. Princeton University Press, 1995.

[CLS00] Connes, Alain, André Lichnerowicz and Marcel Paul Schützenberger: *Triangle of Thoughts*. American Mathematical Society, 2000.

[Die71] Dieudonné, Jean: *Modern axiomatic method and the foundations of mathematics*. In Lionnais, François Le (editor): *Great Currents of Mathematical Thought: Marthematics in the Arts and Sciences*. Dover Publications, 1971.

[Ein16] Einstein, Albert: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Annalen der Physik, **49**:769–822, 1916.

[GB13] Gerry, Christopher C. and Kimberley M. Bruno: *The Quantum Divide: Why Schrödinger's Cat is Either Dead or Alive*. Oxford University Press, 2013.

[Göd64] Gödel, Kurt: *What is Cantor's continuum problem*. In Benacerraf, Paul and Hilary Putnam (editors): *Philosophy of Mathematics: selected Readings*, Prentice-Hall philosophy series. Prentice-Hall, 1964.

[Gri02] GRIFFITHS, ROBERT B.: *Consistent Quantum Theory*. Cambridge University Press, 2002.

[Gri08] GRIFFITHS, DAVID J.: *Introduction to Elementary Particles*. Wiley, 2nd revised edition, 2008.

[Gro96] GROSS, DAVID: *The role of symmetry in fundamental physics*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **93**:14256–14259, 1996.

[HSM+09] HERRMANN, SVEN, ALEXANDER SENGER, MÖHLE KATHARINA, MARTIN NAGEL, EVGENY V. KOVALCHUK and ANDREAS-JOACHIM PETERS: *Rotating optical cavity experiment testing Lorentz invariance at the* 10^{-17} *level*. Physical Review D, **80**(100):105011, 2009.

[Kun11] KUNEN, KENNETH: *Set Theory*. College Publications, 2nd edition, 2011.

[Lei14] LEINSTER, TOM: *Rethinking Set Theory*. American Mathematical Monthly, **121**(5):403–415, 2014.

[LR03] LAWVERE, F. WILLIAM and ROBERT ROSEBRUGH: *Sets for Mathematicians*. Cambridge University Press, 2003.

[Rov96] ROVELLI, CARLO: *Relational quantum mechanics*. International Journal of Theoretical Physics, **35**(8):1637–1678, 1996.

[Rov04] ROVELLI, CARLO: *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.

[Skl74] SKLAR, LAWRENCE: *Space, Time, and Space-time*. University of California Press, 1974.

[Spi99] SPIVAK, MICHAEL: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. I*. Publish or Perish, 1999.

[SR07] SMERLAK, MATTEO and CARLO ROVELLI: *Relational EPR*. Foundations of Physics, **37**(3):427–445, 2007.

[Ste98] STEINER, MARK: *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem'*. Harvard University Press, 1998.

[Uni13] UNIVALENT FOUNDATIONS PROGRAM, THE: *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study, 2013.

[Whe78] WHEELER, JOHN: *Mathematical Foundations of Quantum Theory*. Elsevier, 1978.

[Wig39] WIGNER, EUGENE: *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*. Annals of Mathematics, **40**(1):149–204, 1939.

[Wig60] WIGNER, EUGENE: *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*. Comm. Pure Appl. Math., **13**(1):1–14, 1960.

[Zei99] ZEILINGER, ANTON: *A foundational principle for quantum mechanics*. Foundations of Physics, **29**(4):631–643, 1999.

Mathematik – Eine Form der Erkenntnis. Versuch einer Annäherung an Ernst Cassirers Philosophie der Mathematik

Daniel Rompf

> *Wenden wir diese allgemeine Einsicht[, zur Bedeutung des Symbols,] nunmehr auf die Welt des Mathematischen an, so sehen wir uns auch hier der Alternative enthoben, die Symbole der Mathematik in »bloße« Zeichen, in anschauliche Figuren ohne Sinn, aufgehen lassen zu müssen oder ihnen einen transzendenten Sinn unterzulegen[;] die Welt der mathematischen Formen ist eine von Ordnungsformen, nicht von Dingformen. [. . .] Der spezifische Wert des Mathematischen kann vielmehr nur dadurch erkannt [. . .] werden, daß man ihm seine Stelle im Ganzen des* Objektivationsprozess der Erkenntnis *zuweist. Es ist ein notwendiges Moment in diesem Prozeß, nicht aber ein Teil und Abbild einer transzendenten Wirklichkeit – mag diese nun als physische oder als metaphysische angesehen werden.* [Cas10a, S. 441f]



Das obige Zitat befindet sich im dreibändigem Hauptwerk der *Philosophie der symbolischen Formen* des Philosophen Ernst Cassirer, in dem er (und ebenso in vielen weiteren Schriften) seine eigene, umfassende Kulturphilosophie darlegt. Cassirer Thesen zur Mathematik werden erst vor dem Hintergrund seiner Kulturphilosophie, die auch häufig synonym als *Philosophie der symbolischen Formen* bezeichnet wird, vollends verständlich. Daher wird sich dieser Beitrages wie folgt gliedern:

In einer kurzen biografischen Einführung soll ERNST CASSIRER vorgestellt werden, da er den meisten Nicht-Philosophen eher unbekannt sein wird. Zudem dient diese Einführung dazu, den Weg ERNST CASSIRERS zu seiner Kulturphilosophie klarer werden zu lassen. Anschließend soll die Grundposition der *Philosophie der symbolischen Formen* in ihren Grundzügen vorgestellt werden. Dieser Teil wird eher technischer Natur sein und kann lediglich eine erste Ahnung von CASSIRERS umfangreichem Denken liefern. Im letzten Abschnitt wird dann abschließend CASSIRERS Philosophie der Mathematik im Rahmen seines Hauptwerks vorstellt.

6.1 Kurze biografische Einführung[1]

ERNST CASSIRER wurde am 28. Juli 1874 in Breslau als viertes von insgesamt sieben Kindern einer wohlhabenden jüdischen Kaufmannsfamilie geboren. Er studierte von 1892 bis 1896 in Berlin zunächst Rechtswissenschaften und wechselte anschließend zur Philosophie und deutschen Sprach- und Literaturwissenschaft. In einer Vorlesung von GEORG SIMMEL erfuhr CASSIRER erstmals vom Kant-Forscher HERMANN COHEN und dessen Werk *Kants Theorie der Erfahrung*. Nach einem Selbststudium dieses Werkes sowie der Mathematik und Naturwissenschaften wechselte CASSIRER 1896 nach Marburg, um bei COHEN weiter zu studieren. Bei ihm promovierte er 1899 mit der Arbeit *Descartes Kritik der mathematischen und naturwissenschaftlichen Erkenntnis*, in der noch ein großer Einfluss des Neukantianismus Marburger Prägung zu vernehmen ist.

Nach seiner erfolgreichen Promotion ging CASSIRER 1899 zurück nach Berlin. Mit seinem 1901 veröffentlichten Buch *Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen* versuchte er sich vergeblich an mehreren Hochschulen zu habilitieren. Seine jüdische Herkunft, aber auch antisozialistische Vorurteile, die von seinem Lehrer COHEN auf ihn übertragen wurden, sollen bei den Ablehnungen eine nicht unwesentliche Rolle gespielt haben. Auch aufgrund einer Fürsprache WILHELM DILTHEYS erfolgte 1906 dann letztendlich die Habilitation in Berlin mit dem im selben Jahr publizierten ersten Band der Schrift *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit*. Hiermit erlangte CASSIRER eine große Reputation als systematisch orientierter Historiker des Erkenntnisproblems – er galt als der „Erkenntnis-Cassirer". Mit seiner Studie *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* aus dem Jahr 1910 trat CASSIRER endgültig als eigenständiger Denker in Erscheinung, da er hier einen systematischen Entwurf einer eigenen Erkenntnistheorie vorlegte.

Im Jahr 1919 erfolgte der Ruf an die neu gegründete Universität Hamburg, an der CASSIRER bis 1933 lehrte. In den Hamburger Jahren arbeitete CASSIRER vorwiegend an seiner Kulturphilosophie und begründete sein eigenständiges Programm der *Philosophie der symbolischen Formen*. Nachdem CASSIRER zwischenzeitlich Rektor der Universität Hamburg war, wurde ihm 1933 aufgrund seiner jüdischen Herkunft der Lehrstuhl entzogen und er wurde zur Emigration gezwungen. Nach einem zweijährigen Aufenthalt als Gastprofessor in Oxford/England nahm CASSIRER 1935 einen Lehrstuhl in Göteborg/Schweden an. 1940 erfolgte CASSIRERS Emiritierung und 1941 wechselte er an die Yale University (New Haven), um eine Gastprofessur

[1] Der Großteil dieser Einführung ist aus [Pae93] und [Pae95] entnommen.

anzunehmen. In seinem letzten Lebensjahr wechselte Cassirer noch einmal an die Columbia University in New York und verstarb dort am 13. April 1945.

Bis an sein Lebensende arbeitete und veröffentliche Cassirer Schriften zu seiner Kulturphilosophie, der *Philosophie der symbolischen Formen*, die nun vorgestellt werden soll.

6.2 Philosophie der symbolischen Formen[2]

Cassirer geht von der Grundannahme aus, dass der Mensch ein Kulturwesen ist und möchte die verschiedenen Ausformungen dieser Kultur bzw. Ausdrucksformen des Geistes untersuchen. In der Einleitung des ersten der drei Bände der *Philosophie der symbolischen Formen* setzt Cassirer mit der Unterscheidung von realistischer und idealistischer Weltansicht an: der Realismus gehe von einer letztgegebenen Beschaffenheit der Dinge als Grundlage des Erkennens aus. Als ein erstes Beispiel führt Cassirer Thales von Milet an, der annahm, dass Wasser der Urstoff aller Dinge sei. Der Idealimus mache andererseits die Beschaffenheit der Ding selbst zur Frage des Denkens. Einen ersten Ausdruck eines idealistischen Standpunktes findet Cassirer bei Platon: Bei ihm werde die Formel der Vorsokratiker „Denken entspricht bloßem Reflektieren über das Sein“ zu der Formel „die innere Form des Denkens entspricht der inneren Form des Seins“. Damit werde bei Platon die Welt der Wahrnehmung zu einer Welt des Scheins und er hinterfrage die Beschaffenheit der Dinge. Der maßgebliche Unterschied zwischen Platon und den Vorsokratikern sei, dass diese „ein einzelnes Seiendes als *Ausgangspunkt*“ genommen hätten, wärend es bei Platon zum „zum erstenmal als *Problem* erkannt worden sei.“ Hiermit könne nun wiederum der Seinsbegriff nur noch als Zielpunkt des Denkens dienen und keinen Ausgangspunkt mehr darstellen.

Diese Bewegung findet man laut Cassirer nicht nur in der Philosophie. Der Physiker Heinrich Hertz habe im 19. Jahrhundert die folgende Konsequenz gezogen: die Begriffe der Wissenschaft seien keine Abbilder eines Seins, sondern vielmehr „innere Scheinbilder oder Symbole“. In Anlehnung an Herz bestehe laut Cassirer der Wert der Begriffe nicht mehr in einer Abspiegelung einer uns umgebenden Welt, sondern in dem was die Begriffe „als Mittel der Erkenntnis leisten“. Begriffe erhalten ihren Sinn nicht mehr bloßen Bezug auf ein gegebenens Sein, sondern vielmehr im Rahmen einer Modellbildung. Die entscheidende Konsequenz dieser Denkrichtung ist nun laut Cassirer: Wenn Begriffe ihren Sinn erst auf eine solche Art erhalten, dann müsse der Anspruch einer „unmittelbaren“ (begrifflichen) Erfassung der Wirklichkeit aufgegeben werden und jede Objektivierung bzw. Vergegenständlichung müsse immer schon Vermittlung sein, d.h. der objektive Gegenstand sei nicht unabhängig vom Objektivierungsprozess selbst denkbar.

Verdeutlichen lässt sich dieser Gedanke anhand der Entwicklung der physikalischen Begriffsbildung. Norman Sieroka nutzt in seiner 2014 veröffentlichen Einführung in die *Philosophie der Physik* [Sie14] die von Cassirer entwickelte Begriffstheorie, um zu beschreiben, wie sich die Verwendung der physikalischen Begriffe in den letzten 2000 Jahren verschoben habe: „Cassirer unterscheidet drei Arten, in denen

[2] In diesem Abschnitt beziehe ich mich auf [Cas10b, S. 1–10]

sich Zeichen [. . .] auf Dinge beziehen können. Sie können diese Dinge (i) ausdrücken, (ii) darstellen oder (iii) rein bedeuten." [Sie14, S. 68] So beschreibe Aristoteles Materie und ihre Eigenschaften im Wesentlichen durch bekannte sinnliche Erfahrungen: Seine Elemente Feuer, Wasser, Erde und Luft werden durch die Eigenschaften warm, kalt, feucht und trocken beschrieben. „Es ging um einen direkten Ausdruck dessen, was man wahrnimmt und erlebt. Die Welt bestand [. . .] aus einzelnen Qualitäten." [Sie14, S. 68] Die Zeichen drücken dann in ihrer Ausdrucksfunktion diese Qualitäten aus. In der neueren Physik sei der Begriff der Masse ein gutes Beispiel für die Darstellungsfunktion. Dieser stehe noch in unmittelbarem Kontakt mit der Alltagserfahrung: Wir „fühlen" die Masse eines Objektes, wenn wir es hochheben. Das wesentliche des modernen Massebegriffs ist nun, so SIEROKA, „qualitative Verhältnisse zwischen Sinneseindrücken zu ersetzen durch quantitavie Verhältnisse [. . .] zwischen solchen Eigenschaften, die einem externen Messverfahren zugänglich sind." [Sie14, S. 69] So sei beispielsweise bei der Berechnung der Geschwindigkeit von zwei Objekten nach einem Stoßexperiment nicht die tatsächliche Masse der Objekte ausschlaggebend, sondern vielmehr nur das Verhältnis der Masse der beiden Objekte. Die Entwicklung zur reinen Bedeutungsfunktion werde aber erst in der Physik des 19. und 20. Jahrhunderts vollzogen, die Ausdruck einer Radikalisierung der Mathematisierung der physikalischen Begriffe ist. Als Paradebeispiel dient Sieroka hier die Feldtheorie. So habe beispielsweise GUSTAV MIE versucht das Materiekonzept vollständig durch das Feldkonzept zu ersetzen. Damit geht der Materiebegriff in einem Feldbegriff auf, der allein durch seinen mathematisch funktionalen Zusammenhang seine Bedeutung erhält. SIEROKA fasst diese Entwicklung wie folgt zusammen:

> *In der Antike wurde die uns umgebende Materie oftmals im Sinne der Ausdrucksfunktion als „Wasser" oder dergleichen angesprochen; mit der Frühen Neuzeit rückten dann darstellende Charakterisierungen der Materie mittels Begriffen wie „Masse" und „Impuls" in den Vordergrund; und mit der neueren Physik geht es zusehends um die rein mathematischen Darstellungsformen – dabei wird in Projekten wie der Vereinheitlichten Feldtheorie sogar explizit versucht, Materie gar nicht mehr als etwas Gegenständliches zu erfassen, sondern es allein als Feld, d.h. als mathematische Funktion, zu interpretieren.* [Sie14, S. 71]

CASSIRER zieht nun aus seiner Begriffstheorie und der Feststellung, dass „jede Objektivierung immer zugleich auch eine Vermittlung ist", die idealistische Konsequenz, dass der Erkenntnisgegenstand abhängig vom Medium bzw. von der Objektivierungsweise ist und sich somit verschiedene gegenständliche Sinnzusammenhänge bzw. Blickrichtungen der Erkenntnis ergeben. Solche verschiedenen Blickrichtungen seien die physikalische, chemische und biologische und deren Gegenstände müssten daher voneinander unterschieden werden. Laut CASSIRER ist klassischerweise versucht worden, die Einheit des Wissens über eine Einheit des Gegenstandes zu sichern – denn gemeinhin würde man wohl sagen, dass die physisch-empirische Welt ein einheitliches Ganzes ist und die verschiedenen Naturwissenschaften über eben diese einheitliche Welt Aussagen treffen. Wenn es nun aber keinen einheitlichen Gegenstand mehr gibt, muss die Einheit des Wissens eine neue Form erhalten: Sie könne nicht mehr in einer *substanziellen*, sondern nur noch in einer *funktionalen* Einheit bestehen. Genau darin besteht das Programm von CASSIRERS *Philosophie der symbolischen Formen*:

Nach einer funktionalen Einheit zu fragen, bedeutet nicht nach der Substanz der Dinge, sondern nach einheitlichen Grundzügen unseres Objektivierens zu fragen, die eine Einheit des Wissens gewährleisten, man kann sogar sagen als ein System, das aus verschiedenen Dimensionen aufgebaut ist.

Nach dieser Erweiterung des wissenschaftlichen Gegenstandes folgt nach Cassirer noch eine weitere: Die wissenschaftliche Erkenntnis ist nur *eine* Art der Formgebung und zwar nach Gesetzes- und Ordnungsformen. Neben dieser existieren auch andere Arten der Formgebung bzw. Objektivierungsweisen, die dem Dasein der Erscheinung erst eine bestimmte „Bedeutung" geben. Neben der Wissenschaft nennt Cassirer als weitere eigenständige Weisen der Objektivierung die Kunst, den Mythos, die Religion und die Sprache. Wichtig ist nun, dass diese zwar nicht gleichartig seien, aber „ebenbürtig in ihrem geistigen Ursprung". So sei beispielsweise die Bedeutung eines Gemäldes nicht auf seine physikalischen Eigenschaften reduzierbar. Ferner seien auch sie ursprünglich-bildende und nicht bloß nachbildende Weisen der Objektivierung: Jede bildet einen eigenen Gegenstandsbereich heraus. Jede Form ist eine Seite des "Wirklichen", welches zugleich aus eben jenen Formen aufgebaut wird.

In diesem Sinne vollzieht Cassirer die oft so bezeichnete Wende „von der Erkenntnistheorie zur Kulturphilosophie" als eine Erweiterung der erkenntniskritischen Revolution Immanuel Kants auf alle Weisen der geistigen Objektivierung, d.h. Formen der Kultur: Die „Kritik der Vernunft wird damit zur Kritik der Kultur." [Cas10b, S. 9] Die zentrale Frage für Cassirer ist nun: Was ist die Tat des Geistes, die aller Formgebung zu Grunde liegt? Cassirer wählt in Anschluss an Hertz den Begriff der „symbolischen Form", den er wie folgt in seinem Aufsatz „Der Begriff der symbolischen Form im Aufbau der Geisteswissenschaften" (1923) definiert:

> *Unter einer „symbolischen Form" soll jene Energie des Geistes verstanden werden, durch welche ein geistiger Bedeutungsgehalt an ein konkretes sinnliches Zeichen geknüpft und diesem Zeichen innerlich zugeeignet wird. In diesem Sinne tritt uns die Sprache, tritt uns die mythisch-religiöse Welt und die Kunst als je eine besondere symbolische Form entgegen. Denn in ihnen allen prägt sich das Grundphänomen aus, dass unser Bewusstsein sich nicht damit begnügt, den Eindruck des Äußeren zu empfangen, sondern dass es jeden Eindruck mit einer freien Tätigkeit des Ausdrucks verknüpft und durchdringt.* [Cas09, S. 67]

Dass jeder Sinneseindruck immer schon durch Bedeutung geformt ist, ist eben die Tat des Geistes, die jeder Formgebung zugrunde liegt. Die Begriffe bzw. Symbole, die wir bilden, drücken damit nie einfach etwas in der Welt Gegebenes aus, noch sind sie völlig losgelöst von den Sinneseindrücken. Im Symbolischen ist immer „Sinnlichkeit" mit „Sinn" wechselseitig verwoben.

Im dritten Band der *Philosophie der symbolischen Formen* hat Cassirer die verschiedenen Formen der theoretischen Erkenntnis, d.h. der symbolischen Form *Wissenschaft*, in ihren charakteristischen Ausformungen untersucht. Damit möchte ich zu der Frage übergehen, was für Cassirer das Besondere an der Objektivierungsform der *Mathematik* ist.

6.3 CASSIRERS Philosophie der Mathematik[3]

CASSIRERS Position steht im Kontext des Grundlagenstreits der Mathematik, der von ca. 1870 bis 1930 viele Philosophen und Mathematiker beschäftigte. Daher werde ich zunächst die (bekanntesten) Positionen dieses Streits aus CASSIRERS Sicht darstellen.

Zum Ende des 19. Jahrhunderts hatten die Mathematiker laut CASSIRER einen „naiven" Umgang mit Mengen: Die Angabe eines begrifflichen Merkmals sowie die Entscheidbarkeit, ob ein Gegenstand dieses Merkmal hat oder nicht, reichte als Kriterium aus, um einen mathematischen Objekt namens *Menge* zu definieren.

Die zu Beginn des 20. Jahrhunderts auftretenden „Paradoxien der Mengenlehre" gaben „den ersten entscheidenden Anstoß zu einer Revision der Grundprinzipien der modernen Analysis" [Cas10a, S. 422] und zur Diskussion über die Grundlagen der Mathematik. Eine dieser Paradoxien ist die *Russell Antinomie* von BERTRAND RUSSELL: Hier stellt sich die Frage, ob

$$A := \{M : M \text{ ist eine Menge und } M \notin M\}$$

eine Menge ist. Nach dem oben erwähnten Kriterium wäre dies genau dann der Fall, wenn eindeutig entschieden werden kann, ob für jede Menge M entweder $M \in A$ oder $M \notin A$ gilt. Da nun A eine Menge sein soll, müsste damit auch für die Menge A entweder $A \in A$ oder $A \notin A$ gelten. Da nun aber beide Aussagen für die Menge A aus der Definition der Menge gefolgert werden können, ist nicht entscheidbar, ob sich A als Element selbst enthält und somit tatsächlich eine Menge ist oder nicht. Denn der mathematische Gegenstand *Menge* soll ja eindeutig dadurch definiert sein, ob einem Objekt die Eigenschaft des Begriffs, der die Menge definieren soll, zukommt oder nicht. Bei der Menge A können wir dies aber nicht eindeutig entscheiden. In einem veröffentlichten Briefwechsel mit RUSSELL gab GOTTLOB FREGE offen zu, was für ein bedeutender Schlag diese Antinomie für sein Lebenswerk einer logischen bzw. auf Mengen basierten Grundlegung der Mathematik darstellte und es ist ihm hochanzurechnen, dies auch so offen kommuniziert zu haben.

Nachdem somit eine Grundlegung der Mathematik durch eine naive Mengenlehre unmöglich war, stellten sich die Fragen: Wie können solche Paradoxien vermieden werden? Wie kann die Mathematik bzw. wie können die natürlichen Zahlen als Grundlage der Mathematik definiert werden?

Logizismus

Der Logizismus, u.a. von FREGE und RUSSEL vertreten, versuchte die Zahlen und die Mathematik auf die Logik zu reduzieren. Dazu wurden unter anderem von RUSSELL und ERNST ZERMELO Axiome aufgestellt, die die Widersprüche bei der Mengenbildung vermeiden, aber dennoch alle „guten" Grundlegungseigenschaften der naiven Mengenlehre behalten sollten. CASSIRER attestiert der Position des Logizismus zwei Hauptprobleme: Eines sei, bisher unbekannte Paradoxien nicht sicher auszuschließen zu können. So habe RUSSELL Axiome aufgestellt, die lediglich die bisher bekannten Paradoxien vermeiden sollten. Er konnte aber nicht zeigen, dass in der von ihm

[3] Dieser Abschnitt bezieht sich überwiegend auf [Cas10b, S. 411-448]

aufgestellten Theorie keine weiteren Paradoxien gefunden werden können. Außer dieser Vermeidung könne er zudem keine inhaltlich bzw. überzeugende Begründung für die Aufstellung seiner Axiome angeben. Ein weiteres und für Cassirer ebenso entscheidendes Problem ist, dass der Logizismus die Existenz von Mengen voraussetzen muss, womit er sich in der Nähe des bereits vorgestellten Realismus befindet. Auch wenn Cassirer dies für die heute geläufige und eher im Rahmen des Formalismus diskutierte Mengenlehre nicht erwähnt: In ihr wird die Existenz von der leeren Menge axiomatisch gefordert.

Intuitionismus

Eine dem Logizismus entgegenstehende Position ist laut Cassirer der Intuitionismus. Dieser werde hauptsächlich von Luitzen E. J. Brouwer und Hermann Weyl vertreten und postuliere, dass die Zahlen auf einem mentalen Prozess einer unendlichen Iteration beruhen. Durch den Bezug auf einen Prozess habe der Intuitionismus laut Cassirer eine Nähe zum Idealismus, da er nicht mehr Bezug auf ein gegebenes Sein nimmt. Zudem finde sich bei ihm eine erste Anerkennung des Primats der Funktion vor dem Ding. Denn die Urintuition der Zahlen sei keine Intuition von Dingen sondern eines Verfahrens. Die Existenz von Objekten bedeute für den Intuitionisten dann immer eine Konstruierbarkeit der Objekte durch den Prozess der Iteration.

Damit sind aber alle allgemeinen Aussagen nur abgeleitete Aussagen aus etwas Singulärem: Die Aussage „es existieren gerade Zahlen“ ist nur wahr, wenn vorher gezeigt werden konnte, dass beispielsweise die „Zahl 2 existiert“. Damit führt aber laut Cassirer die intuitionistische Kritik am Allgemeinen des „abstrakten“ Begriffs der naiven Mengenlehre weiter zu einer Kritik an einem Allgemeinen des konstruktiven Prinzips, da alle Aussagen auf konkrete Konstruktionen zurückgeführt werden. Dieses konstruktive Prinzip besage aber, dass die einzelnen konkreten Gegenstände der Mathematik nur sekundär gegenüber der sie konstruierenden Regel sind und ohne dieses Prinzip eine strenge Begründung der Mathematik und der anderen exakten Wissenschaften nicht möglich sei.

Hieraus folgt laut Cassirer unmittelbar das Hauptproblem des Intuitionismus: Mathematik wird auf Singuläres reduziert, und damit wird eine Revision der klassischen Analysis gefordert. Denn aus der Forderung, dass Objekte immer konstruiert werden müssen, folgt unmittelbar, dass der Satz vom ausgeschlossenen Dritten und damit Widerspruchsbeweise abgelehnt werden müssen. Denn wenn ich „nur“ zeige, dass die Negation einer Aussage falsch ist, habe ich noch keinen konstruktiven Beweis für die ursprüngliche Aussage. Die entscheidende Frage ist nun für Cassirer, wie das „Konkret-Allgemeine“ im Unterschied zum „Pseudo-Allgemeinen“ in rechter Weise zu fundieren ist. Eine Verschiebung in der Diskussion um die Grundlagen der Mathematik hin zu den Zeichen als den eigentlichen Gegenständen der Mathematik habe eine weitere Position ermöglicht.

Formalismus

Laut Cassirer wurde die Position des Formalismus hauptsächlich von David Hilbert vertreten; sie behauptet, dass die Mathematik eine reine Lehre von *Zeichen* sei. Damit

wendet sich der Formalismus gegen den Revisionismus der Intuitionisten, da ersterer versucht die klassische Analysis zu „retten“. Auf der anderen Seite meidet er aber auch den „extremen Begriffsrealismus“ der Logizisten. Seine Bedeutung aber allein in einer Mittelstellung zu sehen, verkenne den Formalismus: er biete vielmehr eine neue Gesamtorientierung. So führte HILBERT eine Beweistheorie ein, die zeigen sollte, dass gewisse Axiomensysteme widerspruchsfrei sind. Damit konnte HILBERT als Existenzkriterium für mathematische Gegenstände fordern: Sie müssen lediglich widerspruchsfrei zu denken sein. Hier lässt CASSIRER nun den Kritiker WEYL sprechen: Das Problem einer solchen Beweistheorie und einer erfolgreichen Durchführung sei nach WEYL, dass Mathematik zu einer reinen Tautologie werden würde, da die Zeichen keinen „Sinn“ mehr hätten. WEYL wollte deshalb den mathematischen Zeichen durch einen Bezug auf die Physik oder Metaphysik eine objektive Bedeutung geben. Hier zeigt sich laut CASSIRER nun die schärfste Zuspitzung des Methodenstreits um die Bedeutung von Zeichen: Entweder sind Zeichen reiner Selbstzweck, wie im Formalismus, oder Zeichen für physische oder metaphysische Entitäten, wie in der Deutung WEYLS. Diese beiden Definitionen seien aber nach CASSIRER unvollständig, weil sie die Bedeutung menschlicher Symbole verkennen.

CASSIRERS Ansatz

Der allgemeine Symbolbegriff, wie ihn CASSIRER in seiner *Philosophie der symbolischen Form* vorstellt, entzieht sich einer solchen Dichotomie, wie sie gerade vorgestellt wurde. Das Symbol drückt – wie wir gesehen haben – in seiner Wechselwirkung von Sinn und Sinnlichkeit nicht das eine *oder* das andere aus, sondern das „eine *im* anderen“ und das „andere *im* einen“:

> *Das Symbolische gehört niemals dem „Diesseits“ oder „Jenseits“, dem Gebiet der „Immanenz“ oder „Transzendenz“ an: Sondern sein Wert besteht eben darin, daß es diese Gegensätze, die einer metaphysischen Zweiweltentheorie entstammen, überwindet.* [Cas10a, S. 441]

Genau das spiegelt sich in der Ausgangsthese:

> *Wenden wir diese allgemeine Einsicht[, die der Bedeutung des Symbols,] nunmehr auf die Welt des Mathematischen an, so sehen wir uns auch hier der Alternative enthoben, die Symbole der Mathematik in „bloße“ Zeichen, in anschauliche Figuren ohne Sinn, aufgehen lassen zu müssen oder ihnen einen transzendenten Sinn unterzulegen[;] die Welt der mathematischen Formen ist eine der Ordnungsformen, nicht von Dingformen.* [Cas10a, S. 441f]

Hierin drückt sich CASSIRERS Position im Grundlagenstreit aus: Die Bedeutung der mathematischen Symbole besteht gerade nicht darin, dass sie bedeutungslose Zeichen sind, wie der Formalismus behauptet, oder ihre Bedeutung allein durch einen Bezug auf ein physisches oder metaphysischen Sein erhalten, wie der Logizismus behauptet. Vielmehr liefert CASSIRERS Zeichentheorie des Symbolischen den passenden Ansatz, um die entscheidenden Aspekte beider Ansätze miteinander zu verbinden und den

Primat der Funktion vor dem Gegenstand zu Ende zu denken. Diesen hatte der Intuitionismus zwar schon anerkannt, schloss jedoch mit seiner Kritik am Konkret-Allgemeinen etwas für die Mathematik wesentliches aus. Daher kann

> *der spezifische Wert des Mathematischen vielmehr nur dadurch erkannt [. . .] werden, daß man ihm seine Stelle im Ganzen des Objektivierungsprozess der Erkenntnis zuweist.* [Cas10a, S. 442]

Der Intuitionismus hatte schon den Primat der Funktion vor dem Gegenstand erkannt, aber seine Kritik ging zu weit, so dass er auch das Konkret-Allgemeine ablehnte.

6.4 Ausblick

Mit dem letzten Zitat zeigt sich, dass das Verhältnis der Mathematik zu den anderen Wissenschaften geklärt werden muss, um die Besonderheit der Mathematik als Erkenntnisform auszuweisen – ihre besondere Stelle im Objektivierungsprozess der Erkenntnis.

Eine funktionale Unterscheidung zeigt laut Cassirer den Unterschied zwischen logischer, mathematischer und empirisch-physikaler Welt: Eine gemeinsame Grundlage aller drei Welten bildet eine Urschicht reiner Beziehungsformen: „Einheit und Andersheit, wie Gleichheit und Unterschied“. Der mathematische Gegenstand unterscheidet sich vom logischen insofern, dass er die reinen „Beziehung *überhaupt*“ der Logik durch „den Modus des Setzens und Ordnens“, das „System der Zahlen“, ergänzt. Vom empirisch-physikalischen Gegenstand unterscheidet er sich hingegen insofern, als er erst eine Ordnung der Wahrnehmungswelt möglich macht; eine Vorbedingung einer solchen darstellt. Damit weist die Logik auf die Mathematik und diese wiederum auf die Empirie bzw. Physik.

Damit deutet sich Cassirers Einbettung der Mathematik in die symbolische Form der Wissenschaft bereits an; eine genaue Rekonstruktion seiner Philosophie der Mathematik muss an dieser Stelle aber noch offen bleiben und den Gegenstand vertiefender Studien bilden. In diesem Zusammenhang ist eine genauere Analyse Cassirers Rezeption des Grundlagenstreits zu Beginn des 20. Jahrhunderts notwendig; im Besonderen inwiefern sich Cassirer zu Hilberts Finitismus abgrenzt, der in diesem Beitrag noch nicht berücksichtigt werden konnte.

Literaturverzeichnis

[Cas09] Cassirer, Ernst: *Der Begriff der symbolischen Form im Aufbau der Geisteswissenschaften*. In: Lauschke, Marion (Herausgeber): *Schriften zur Philosophie der symbolischen Formen*, Seiten 63–92. Meiner Verlag, 2009.

[Cas10a] Cassirer, Ernst: *Philosophie der symbolischen Formen. Dritter Teil. Phänomenologie der Erkenntnis*. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 2010.

[Cas10b] Cassirer, Ernst: *Philosophie der symbolischen Formen. Erster Teil. Die Sprache*. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 2010.

[Pae93] PAETZOLD, HEINZ: *Ernst Cassirer zur Einführung*. Junius, 1993.

[Pae95] PAETZOLD, HEINZ: *Ernst Cassirer – Von Marburg nach New York. Eine philosophische Biographie*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1995.

[Sie14] SIEROKA, NORMAN: *Philosophie der Physik. Eine Einführung*. C.H.Beck, 2014.

Mathematik als göttliche Eingebung - Ramanujan, Hardy und wir

Riana Cojocaru, Tim Krake



I remember once going to see him when he was lying ill at Putney. I had ridden in taxi cab number 1729 and remarked that the number seemed to me rather a dull one, and that I hoped it was not an unfavorable omen. „No", he replied, „it is a very interesting number; it is the smallest number expressible as the sum of two cubes in two different ways." – G. H. Hardy

„Srinivasa Aaiyangar Ramanujan war ein so bedeutender Mathematiker, dass sein Name persönliche Rivalitäten vergessen machte. Er war der überragend große Mathematiker, den Indien in den letzten tausend Jahren hervorgebracht hat. Seine Gedankensprünge machen den Mathematikern auch heute noch, sieben Jahrzehnte nach seinem Tod, zu schaffen. Seine Veröffentlichungen werden immer noch nach ihren Geheimnissen durchforstet. Seine Sätze werden in zu seinen Lebzeiten kaum vorstellbaren Gebieten wie Polymerchemie, Informatik und, das ist der jüngste Vorschlag, sogar in der Krebsforschung angewandt. Und stets die bohrende Frage:

Was wäre gewesen, wenn er einige Jahre früher entdeckt worden wäre, oder wenn er ein paar Jahre länger gelebt hätte?“ [Kan13, S. 2]

Die Geschichte von SRINIVASA RAMANUJAN beginnt im Jahre 1887 in der tamilischen Stadt Erode. „Es ist die Geschichte eines unergründlichen Geistes und eines einfachen Herzens [...] sowie des Aufeinanderprallens zweier Kulturen, der Spannung zwischen Indien und dem Westen, zwischen der Sarangapani Sannidhi Street in Kumbakonam in Südindien, wo RAMANUJAN aufwuchs, und der funkelnden Welt von Cambridge, zwischen den glasklaren, logischen Beweisen der westlichen mathematischen Tradition und der geheimnisvollen Macht der Intuition, mit der RAMANUJAN Ost und West gleichermaßen verblüffte.“ [Kan13, S. 3]

Im Folgenden werden wir die Geschichte RAMANUJANS zusammen mit seiner beeindruckenden mathematischen Denkweise, geprägt durch göttliche und spirituelle Einflüsse, darstellen. Dazu betrachten wir in Abschnitt 7.1, 7.3 und 7.5 ausgewählte Schauspiele – hier in Form von Dialogen – mit den prägendsten Lebensereignissen RAMANUJANS. Dabei stützen wir uns auf den Film *„Die Poesie des Unendlichen“* [Bro16] basierend auf dem Buch *„Der das Unendliche kannte: Das Leben des genialen Mathematikers Srinivasa Ramanujan“* [Kan13]. Des Weiteren untersuchen wir im zweiten Abschnitt die göttliche Eingebung unter philosophischen Gesichtspunkten, und im vierten Abschnitt werfen wir einen Blick in die zahlentheoretische Theorie der Partitionen.

7.1 Schauspiel I

7.1.1 Kopfrechnen geht viel schneller

Regie: *Personen: S. Narayana Iyer, Srinivasa Ramanujan*
Räumliche Inszenierung: Buchhaltungsbüro des Hafenamtes in Madras

Ramanujan: Sir, ich suche dringend Arbeit und möchte Sie um eine Anstellung bitten. Vergeben Sie mir mein Äußeres, aber ich besitze ein außergewöhnliches Zahlenverständnis. Was Ihnen zur Zeit als gewöhnliches Glas vorkommt, wird sich schon bald als Diamant entpuppen. Ich zeige Ihnen meine Notizen. *Reicht ihm sein Notizbuch*. Schauen Sie es sich bitte an.

Iyer: *Nimmt das Buch entgegen, blättert ein paar Seiten weiter und hält für kurze Zeit inne*. Wo haben Sie Ihren Abschluss gemacht?

Ramanujan: Ich habe keinen.

Iyer: Wie viele Abschlüsse haben Sie?

Ramanujan: Keinen!

Iyer: Wem haben Sie das schon gezeigt?

Ramanujan: Ich habe es allen gezeigt ... den Indern, den Briten. Sie haben mich von Einem zum Anderen geschickt. Aber ich brauche die Arbeit ... bitte ... ich habe eine Frau.

Iyer: Ich gebe Ihnen Arbeit. Aber die Abende werden Sie damit verbringen, mir das alles zu erklären.

Ramanujan: Ja ... selbstverständlich, Sir.

Iyer: Gut, folgen Sie mir.

Regie: *Iyer führt Ramanujan zu einem alten Schreibtisch.*

Iyer: Das ist von nun an Ihr Arbeitsplatz. Fangen Sie an. *Verlässt den Raum.*

Ramanujan: *Setzt sich hin und fängt direkt an zu rechnen, ohne den Abakus zu benutzen.*

Iyer: *Tritt ein.* Warum benutzen Sie nicht den Abakus?

Ramanujan: Kopfrechnen geht viel schneller.

Iyer: *Rechnet mit Abakus nach.* Beeindruckend! Wenn der britische Vorgesetzte zu Ihnen kommt, dann tun Sie wenigstens so, als würden Sie den Abakus benutzen. Wir sehen uns heute Abend.

7.1.2 Farben, Muster und Formen

Regie: *Personen: S. Narayana Iyer, Srinivasa Ramanujan*
Räumliche Inszenierung: Terrasse in Madras in der Abendsonne

Regie: *Ramanujan und Iyer sitzen nebeneinander auf einer Terasse. Iyer schaut intensiv in das Notizbuch.*

Iyer: Ich habe so etwas noch nie gesehen. Woher ... Wie kommen Sie auf diese Zeilen, auf diese ganzen Formeln?

Ramanujan: Es ist für mich wie ein Gemälde. Stellen Sie es sich mit Farben vor, die Sie nicht sehen können.

Iyer: Farben? Die ich nicht sehen kann? Wie genau passiert das bei Ihnen?

Ramanujan: Stellen Sie sich vor, wir könnten alles ganz genau sehen - jedes Korn, jedes Teilchen. Sie könnten erkennen, dass Allem Muster zugrunde liegen: den Farben des Lichts, den Reflektionen auf dem Wasser. In der Mathematik offenbaren sich diese Muster in den unglaublichsten Formen, sie sind überwältigend. Es ist einfach wundervoll.

Für mich bedeutet dies alles. Vielleicht gibt es dort draußen noch jemand anders, der es sehen und verstehen kann wie ich. Dennoch habe ich bis jetzt Niemanden in Madras gefunden.

Iyer: *Seufzt und steht auf.* Madras ... wussten Sie, dass der Name Madras abgeleitet wird von Mandarayja. Das bedeutet, das Reich der Blöden.

Ramanujan: *Schmunzelt.*

Iyer: Eine riesige Welt ist dort draußen ... und da ist England.

Ramanujan: England?

Iyer: Ramanujan ... Ramanujan, hören Sie zu, wir müssen so schnell es geht Jemanden finden, der wirklich etwas davon versteht. Diese Arbeit ist zu bedeutend, als dass Sie mit Ihrem Tod endet. Sie muss veröffentlicht werden!

Ramanujan: Ich kann das nicht.

Iyer: Sie waren ein Leben lang allein in Ihrem Verstand, das kann sich nun ändern. Denken Sie darüber nach. Wir werden einen Brief mit einigen Ihrer Notizen nach England schicken. Darum werde ich mich sofort kümmern. *Verlässt ihn*.

Ramanujan: *Schaut nachdenklich und sinkt ein wenig in sich zusammen*. England?

7.1.3 Ankunft des Briefes

Regie: *Personen: Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood*
Räumliche Inszenierung: Hardys Büro am Trinity College in Cambridge

Hardy: *Kommt in sein Büro, setzt sich auf seinen Stuhl und findet auf dem Schreibtisch einen Brief*. Schon wieder ein Scherz! Das war bestimmt Littlewood! *Öffnet den Brief und liest ihn vor.*

„Dear Sir,

I beg to introduce myself to you as a clerk in the Accounts Department of the Port Trust Office at Madras on a salary of only £20 per annum. I am now about 23 years of age. I have had no University education but I have undergone the ordinary school course. After leaving school I have been employing the spare time at my disposal to work at Mathematics. I have not trodden through the conventional regular course which is followed in a University course, but I am striking out a new path for myself. I have made a special investigation of divergent series in general and the results I get are termed by the local mathematicians as 'startling'. I would request you to go through the enclosed papers. Being poor, if you are convinced that there is anything of value I would like to have my theorems published. I have not given the actual investigations nor the expressions that I get but I have indicated the lines on which I proceed."

Alle: *Hardy steht auf und läuft zur Tür, während Littlewood plötzlich zur Tür reinkommt*

Littlewood: Hardy, hast du Zeit für Sport?

Hardy: Ah Littlewood, gut, dass Sie zufällig vorbeikommen. Wissen Sie, Littlewood ... Allein in diesem Jahr habe ich mehrere Briefe von Leuten bekommen, die beteuern, die prophetische Weisheit der Pyramiden

bewiesen zu haben, die Offenbarungen der Weisen von Zion und die Kryptogramme, die Bacon angeblich eingebaut hat in manche Stücke des sogenannten Shakespeare.

Aber ein Brief von einem wenig gebildeten indischen Angestellten in Madras, der Aussagen hinterfragt, die ich in meinen Thesen aufgestellt habe – das ist der Gipfel!

Littlewood: Ich habe damals ähnliche Aussagen gemacht.

Hardy: Du gibst es also zu, dass du hinter dem Brief steckst?

Littlewood: Aber das war doch vor drei Jahren.

Hardy: Nein, nein, nein, ich rede von diesem Brief. Verflucht brillant, ich weiß nur nicht, woher du die Poststempel hast, ich wäre fast darauf hereingefallen.

Littlewood: Ich weiß nicht, wie ich das in deinen Schädel kriegen soll, aber worüber du auch immer redest ... ich habe ... ich habe damit gar nichts zu tun. *Littlewood nimmt den Brief und liest ihn langsam durch.* Integrale, unendliche Reihen ... Gott weiß, was noch. Oh, entschuldige bitte, ich vergesse immer, dass du nicht an ein höheres Wesen glaubst.

Hardy: Genau!

Littlewood: Wenn dieser Knabe echt ist, wirst du alles überdenken müssen, richtig?

Hardy: Er muss echt sein, ich kenne Niemanden, der sich das Ganze ausdenken könnte.

Littlewood: Es schmeichelt mir, dass du mich verdächtigst hast.

Hardy: *Lacht*.

Littlewood: Diese beiden unendlichen Reihen sind wirklich faszinierend!

Hardy: Ja, da muss ich die Waffen strecken, so etwas habe ich noch nie im Leben gesehen.

Littlewood: Es ist irgendwie irreführend - es könnten hypergeometrische Reihen sein, ha ...

Hardy: Der große Littlewood verblüfft ... er kann mit Hopsen mithalten, würde ich sagen!

Hardy: *Nimmt das Ende des Briefs in die Hand und liest laut vor.*

„Being inexperienced I would very highly value any advice you give me. Requesting to be excused for the trouble I give you,

I remain, Dear Sir, Yours truly, S. Ramanujan“

Littlewood: Willst du ihn einladen? Hast du das vor?

Hardy: Nein, nein, nein, nein, nein, nein, nein. Es wäre besser, ihn in seinem Büro in Madras verrotten zu lassen *schmunzelt*.

7.2 Göttliche Eingebung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die „göttliche Eingebung“, indem wir diesen Begriff zunächst von der (philosophischen) Intuition differenzieren und ihn anschließend aus Ramanujans Sicht genauer betrachten.

7.2.1 Aspekte der Intuition

Aspekt 1 (Intuition)**.** *Eine Begabung, auf Anhieb eine gute Entscheidung treffen zu können, ohne die zugrunde liegenden Zusammenhänge explizit zu verstehen. Umgangssprachlich „aus dem Bauch (Bauchgefühl)“, spontan, oft auch wenn bestimmte Gründe vorliegen, die eine andere Entscheidung nahelegen.* [Wik17a]

Aspekt 2 (Intuition)**.** *Die schnelle eingebungsmäßige Einsicht in Zusammenhänge und ihre Erkenntnis ohne bewusste rationale Ableitung oder Schlüsse, sowie auch das Entstehen neuer Erfindungen und Ideen.* [Wik17a]

7.2.2 Philosophische Intuition

„PLOTIN postuliert, dass intuitive Erkenntnis nur im Bereich des rein Geistigen möglich ist, wobei er auf die Analogie zum sinnlichen Schauen hinweist, das allerdings in weltlicher Zeitlichkeit gefangen ist. Während diskursives Erkennen auf Sinneswahrnehmungen und aufeinander aufbauenden Schlussfolgerungen beruht, ist intuitives Erkennen eine rein geistige Anschauung, eine transzendente Funktion des Menschen.

Ein Kernkonzept der Phänomenologie HUSSERLS besteht in der sogenannten Wesensschau, die den Zugang zur wesenhaften Struktur eines Gegenstandes ermöglichen soll und so von individuellen Besonderheiten oder zufälligen Variationen abstrahieren kann. Da der Prozess einer direkten inneren Anschauung am nächsten kommt, nannte HUSSERL den Denkvorgang Intuition.“ [Wik17a]

7.2.3 Göttliche Eingebung

RAMANUJAN war ein sehr spiritueller Mensch. Der indische Glaube lässt viel Freiraum für Mystizismus. Traumdeutung, Handlinienlesen und der Glaube an das Übernatürliche war natürlich in der indischen Kultur. RAMANUJAN erzählte einem Studienkollegen, dass ihm durch das Symbol von Blutstropfen der Gemahl der Göttin Namagiri im Traum erschienen sei. Seitdem erscheinen ihm mathematische Formen vor seinen Augen.

RAMANUJANS Glaube an die Hindu-Götter kann sein mathematisches Genie nicht erklären. Aber seine Offenheit für übernatürliche Einflüsse zusammen mit einem Geist, der mit ungenauen, flexiblen und elastischen Begriffen von Ursache und Wirkung ausgestattet war, machten es möglich, dass er Dinge wahrnahm, die diejenigen, die logisch präzisere Wahrnehmungsinstrumente hatten, nicht sehen konnten; da er Zusammenhänge sah, wo andere nur Verschiedenheit wahrnahmen; da er Dinge ernst nahm und nicht voreilig abtat. Er war ein Geist, dessen kritische Fähigkeiten vielleicht im Vergleich zu seinen kreativen und synthetisierenden Fähigkeiten schwach ausgebildet waren (vgl. [Kan13, S. 225ff]).

7.2.4 Kommentare zu Ramanujans Eingebungen

Im Folgenden werden wir Einschätzungen über die mathematische Denkweise von Ramanujan kennenlernen. Zum einen äußerten sich John E. Littlewood und G. H. Hardy aus dem direkten Umfeld Ramanujans zu seiner erstaunlichen Betrachtungsweise sowie der polnisch-US-amerikanische Mathematiker Marc Kac (1914–1984).

Kommentar 1 (Littlewood)**.** *Hier spüren wir etwas von einem wirklichen Geheimnis. Wenn wir das Ergebnis im Voraus kennen würden, dann würden wir uns vielleicht zwangsläufig, in langsamen Schritten, der korrekten Form von Ψ_q nähern. Aber weshalb konnte Ramanujan so sicher sein, dass es überhaupt eine gab? Wenn man dies mit Einsicht aus einer Theorie erklären wollte, müsste man annehmen, dass diese eine Größenordnung hat, die kaum glaublich erscheint. Auch kann man sich kaum vorstellen, welche Zahlenbeispiele hätten verfügbar sein müssen, um ein so starkes Ergebnis zu suggerieren. Und bevor die Form von Ψ_q bekannt war, hätten keinerlei zahlenmäßige Beispiele irgendetwas dieser Art suggerieren können. - Der Schluss scheint unausweichlich zu sein, dass die Entdeckung der richtigen Form ein einziger Blitz von Einsicht war.* [Kan13]

Kommentar 2 (Hardy)**.** *Hardy war der Meinung, dass unbewusste Aktivität oft eine entscheidende Rolle bei Entdeckungen spielt; dass auf Perioden von erfolglosen Bemühungen - nach Zeiten der Ruhe oder Ablenkung - oft Augenblicke plötzlicher Eingebung folgen; dass diese Blitze der Inspiration nur als Ergebnis von Aktivitäten gedeutet werden können, denen sich der Betroffene nicht bewusst ist.* [Kan13]

Kommentar 3 (Kac)**.** *Sie und ich konnten so gut wie ein normales Genie sein, wenn wir nur um einige Größenordnungen besser wären. Es gibt kein Geheimnis um die Arbeit des Geistes eines Genies. Wenn wir verstanden haben, was er getan hat, dann sind wir sicher, dass auch wir dies hätten schaffen können. Mit Zauberern ist das anders. Sie sind, wenn wir mathematischen Slang benutzen wollen, im orthogonalen Komplement von uns, und die Funktionsweise ihres Geistes ist für alle Absichten und Zwecke unverständlich. Sogar wenn wir verstanden haben, was sie gemacht haben, bleibt der Prozess, wie sie es gemacht haben, vollkommen im Dunkeln.* [Kan13]

7.3 Schauspiel - Akt 2

7.3.1 Die Ankunft in England

Regie: *Räumliche Inszenierung: Trinity College in Cambridge*
Personen: Godfrey Harold Hardy, Srinivasa Ramanujan

Ramanujan: *Steigt aus der Kutsche und erblickt sichtlich erstaunt und eingeschüchtert von der Eleganz das Trinity College.*

Regie: *Räumliche Inszenierung: Professoren mit schwarzen Gewändern*

Ramanujan: *Tritt in den Raum ein.*

Hardy: *Taucht in der Menge auf und läuft zu Ramanujan*.

Ramanujan: *Streckt die Hand aus*. Hallo!

Hardy: *Erwidert den Handschlag nicht und mustert Ramanujan*. Ich bin Hardy, willkommen am Trinity ... Mr ... Ramanujan. Habe ich das richtig ausgesprochen?

Ramanujan: Ja, Sir, perfekt! Es ist mir eine große Ehre, Sir.

Hardy: Vielen Dank. Ich ... ich freue mich sehr darauf mit unserer Arbeit zu beginnen. Also ... morgen ... 10 Uhr ... in meinen Räumen. Wir sehen uns da.

Hardy: *Verlässt den Raum*.

7.3.2 Das erste Treffen

Regie: *Räumliche Inszenierung: Hardys Büro am Trinity College in Cambridge*
Personen: Godfrey Harold Hardy, Srinivasa Ramanujan

Regie: *Hardy steht vor dem sitzenden Ramanujan und läuft auf und ab. Schließlich setzt er sich auf seinen Bürostuhl*.

Hardy: Also, ... Ramanujan wir haben entschieden, dass es für uns alle gut wäre, wenn Sie einige Vorlesungen besuchen.

Ramanujan: Aber ... ich bin hier, um zu publizieren.

Hardy: Ja, alles zu seiner Zeit, so hoffe ich ... doch zuerst brauchen wir für Ihre Arbeit Beweise. Machen Sie sich keine Sorgen, es geht darum, Sie mit den formalen Methoden vertraut zu machen. Das käme unserer zukünftigen Arbeit zugute. Wir brauchen eine gemeinsame Sprache. Sie erwarten sicherlich keinen Gedankenaustausch auf Tamil.

Ramanujan: Nein! er soll in Ihrer Sprache stattfinden!

Hardy: Genau ... also, uns bleibt genügend Zeit zum Publizieren.

Ramanujan: Ich bitte um ... um Verzeihung, aber woher wollen Sie das so genau wissen? Ich will nicht, dass meine Arbeit mit meinem Tod stirbt.

Hardy: Das wird sie ganz sicher nicht!

Ramanujan: Danke, Sir. Es gibt noch soviel, das ich Ihnen zeigen möchte. *Durchsucht seinen Rucksack*. In meinem Brief habe ich Ihnen nur Stichproben meiner Entdeckungen mitgeteilt. *Er zückt ein Notizbuch*. Sehen Sie ... ich habe sogar eine Funktion gefunden, die genau die Anzahl der Primzahlen kleiner als x angibt und ich habe sie in Form einer unendlichen Reihe erhalten.

Hardy: Tatsächlich?

Ramanujan: Ja, ich glaube, wenn wir es publizieren, wird es bahnbrechend sein.

Hardy: *Blättert im Buch*. Das kommt ja ... völlig überraschend. *Blättert weiter*. Um das alles zu prüfen ... braucht man ein ganzes Leben.

Ramanujan: *Zückt ein weiteres Notebook*. Zwei vielleicht.

Hardy: *Schaut komplett überrascht und ist sprachlos*.

Regie: *Ramanujan überreicht ihm das Buch, und Hardy nimmt es zögernd an*.

7.3.3 Ramanujan in der Vorlesung

Regie: *Räumliche Inszenierung: Vorlesungsraum am Trinity College in Cambridge*
Personen: Professor, Srinivasa Ramanujan

Ramanujan: *Sitzt auf seinem Platz, schreibt nicht mit und schaut gespannt auf die Tafel*.

Professor: *Schreibt an die Tafel*:

$$\Phi(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\vartheta}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa^2t^2)}}$$

Professor: Also ... und nun Sie. *Zeigt auf Ramanujan*. Können Sie dem folgen?

Ramanujan: Ja, Sir ... ich bin sehr angetan!

Professor: Sie schreiben offenbar nichts mit, würden Sie dazu etwas beitragen können?

Ramanujan: *Schaut erschreckt und sichtlich nervös*.

Professor: Na dann kommen Sie! Kommen Sie! *Zeigt zur Tafel*.

Ramanujan: *Steht auf und geht zur Tafel*.

Professor: Hier ist die Kreide. *Hält Kreide hin und grinst herablassend*.

Ramanujan: *Nimmt die Kreide entgegen und schreibt an die Tafel:*

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\kappa^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\kappa^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\kappa^6 + \ldots\right\}$$

Professor: Aber ich ... ich war ... mit dem Beweis noch nicht fertig. Woher wissen Sie das?

Ramanujan: Keine Ahnung ... ich ... ich weiß es einfach.

Professor: *Schaut auf die Uhr* Nun ... Gentlemen, unsere Stunde ist vorbei, ich danke für Ihre Aufmerksamkeit.

Ramanujan: *Reicht dem Professor die Kreide*.

Professor: *dreht sich verärgert zur Seite und schaut aus dem Fenster*.

Regie: *Ramanujan läuft zurück zu seinem Platz, packt seine Sachen ein und will hinausgehen. Der Professor stellt sich ihm in den Weg*.

Professor: Nicht Sie! Ich will Ihnen mal was sagen, Sie Curry-Fresser. Ich verbiete Ihnen sich nochmal so dreist aufzuführen. Sie haben hier nichts zu suchen, sagen Sie ihrem Master Hardy genau das, und jetzt raus hier!

7.3.4 EULER und JACOBI

Regie: *Räumliche Inszenierung: Hardys Büro am Trinity College in Cambridge*
Personen: Godfrey Harold Hardy, Srinivasa Ramanujan

Regie: *Hardy und Ramanujan sitzen sich gegenüber. Hardy liest im Stuhl entspannt das Notebook und Ramanujan arbeitet an seinen Aufschrieben.*

Hardy: *Betrachtet die Schnüre am Handgelenk von Ramanujan*.

Ramanujan: *Fasst die Schnüre an*. Meine heiligen Schnüre ... sie helfen böse Geister abzuwehren.

Regie: *Kurzer Moment der Stille*.

Hardy: Wie war es in der Vorlesung?

Ramanujan: Tut mir leid, Sir. Ich war wohl zu angetan.

Hardy: Das hätte ich von seinem Unterricht gar nicht erwartet. Woher kannten Sie dieses Theorem?

Ramanujan: Es kam mir in den Sinn.

Hardy: *Lacht*.

Ramanujan: Mr. Hardy, ich verstehe nicht, warum wir unsere Zeit mit all diesen Beweisen vergeuden. Ich habe doch die Formeln.

Hardy: Es ist nicht so, dass ich nicht sehe, was sie behaupten. Nur ich bin mir nicht sicher, ob Sie wissen, wie Sie dazu kommen ... oder ... ob Ihre Annahmen korrekt sind. Denn es gibt Feinheiten, die ...

Ramanujan: Aber alles ist richtig! Ich habe noch mehr neue Ideen!

Hardy: Ja, aber Intuition reicht nicht! Es muss einfach nachvollziehbar sein! Und ein wenig Bescheidenheit könnte hilfreich sein! *Steht auf und läuft nachdenklich zur Tafel*. Warum wollen die, dass wir scheitern, was meinen Sie?

Ramanujan: Weil ich Inder bin, nicht?

Hardy: Ja natürlich, auch das. Es liegt aber auch an dem, was wir repräsentieren. *Schreibt Folgendes an die Tafel:*

Euler
Jacobi

Hier! *Zeigt auf die Namen*. Euler und Jacobi, wer waren die?

Ramanujan: Mathematiker!

Hardy: Nur Namen für Sie? Euler war der produktivste Mathematiker des 18. Jahrhunderts, das meiste hat er geleistet, nachdem er blind war. Jacobi tauchte wie Sie aus dem Nichts auf und war fast genauso beeindruckend wie Euler. *Zeigt auf Ramanujan*. Sie ... spielen in deren Liga, denke ich!

Was die gemeinsam hatten und was ich in Ihnen sehe, ist die Liebe zur Form. Das zeigen Ihre Notizbücher. Ich möchte Sie etwas fragen: Aus welchem Grund tun Sie das alles, wieso?

Ramanujan: Weil ich es tun muss. Ich sehe es.

Hardy: Wie Euler! Form um ihrer selbst Willen. Eine Kunst, nur für sich. Und wie jede Kunst, reflektiert sie Wahrheit. Ich kenne keine andere, sie ist meine Kirche.

Und Sie ... so wie Mozart eine ganze Symphonie im Kopf hören konnte, tanzen Sie mit den Zahlen ins Unendliche.

Ramanujan: *Lächelt*.

Hardy: Aber dieser Tanz, diese Kunst macht uns nicht unbedingt beliebt bei manchen Gruppen, die uns eher als Zauberkünstler sehen. Also wenn wir uns auf ausgetretenen Pfaden der Mathematik bewegen wollen, dürfen wir keine Fehler machen.

Besuchen Sie die Vorlesungen, verärgern Sie die Professoren nicht und arbeiten Sie an den Beweisen, andernfalls ist unser Experiment zum Scheitern verurteilt.

Legt seine Brille zusammen und begibt sich zur Tür. Kommen Sie mit! Ich möchte Ihnen etwas zeigen! *Wirft Ramanujan seine Jacke zu*.

Regie: *Räumliche Inszenierung: Wren Library am Trinity College in Cambridge*

Hardy: Man kann auf vielfältige Art und Weise im Leben geehrt werden – eine ist sicherlich als Fellow aufgenommen zur werden. Aber meiner bescheidenen Meinung nach ... ist etwas zu hinterlassen ... hier in der Wren ... nachdem wir gegangen sind ... das Allergrößte!

Diese Bibliothek beherbergt die Briefe des Apostel Paulus, die Gedichte von Milton, die Morgan-Bibel! Aber für mich, der nun mal ein Mann der Zahlen ist ... ist das Außergewöhnlichste ... das hier: Newtons Principia Mathematica!

Nun, wie Newton für den physikalischen Aspekt unserer Arbeit steht, stehen Ihre Notizbücher für den abstrakten. Newtons Werk zu beweisen, kostete viel Zeit. Deshalb sind wir verpflichtet, Ihre Arbeit zu beweisen und ... und wenn wir das tun, so glaube ich, dass eines Tages ... dass eines Tages ihre Notizbücher hier zu finden sein werden! Nun ... verstehen Sie jetzt, was auf dem Spiel steht!

Ramanujan: *Nickt mit dem Kopf.*

Hardy: Gut! *Drückt ihm das Buch in die Hand und verlässt die Bibliothek.*

Ramanujan: *Betrachtet das Werk von Newton und sein Notizbuch.*

7.3.5 Eine neue Reihe

Regie: *Räumliche Inszenierung: Hardys Büro am Trinity College in Cambridge*
Personen: Godfrey Harold Hardy, Srinivasa Ramanujan

Regie: *Während Hardy entspannt im Büro sitzt, Füße auf dem Tisch und auf einem Papier schreibt, platzt Ramanujan plötzlich herein.*

Ramanujan: *Tritt vor Hardy und legt ihm ein Blatt auf den Schreibtisch.* Ich habe eine neue Reihe entdeckt!

Hardy: Ich bin nicht interessiert daran! Ich dachte ich hätte mich klar ausgedrückt! Ich brauche ihre Beweise! Wir waren uns einig darüber!

Ramanujan: Sie stimmt, bitte sehen Sie sich doch an.

Hardy: Woher wissen Sie das?

Ramanujan: Weil es geschrieben steht.

Hardy: Wo steht es geschrieben! Wo! Jetzt gehen Sie nach Hause, ziehen Sie sich bitte korrekt an, bevor Sie sich erkälten. *Dreht sich zur Seite und geht seiner Arbeit nach.*

Ramanujan: Ich habe einen weiten Weg hinter mir, Sie sollten mir helfen bei der Veröffentlichung!

Hardy: *Ignoriert Ramanujan und arbeitet weiter.*

Ramanujan: *Verlässt das Büro.*

Regie: *Sobald Ramanujan den Raum verlassen hat, schnappt sich Hardy die Notizen von Ramanujan.*

Hardy: Partitionen ... interessant ... ein sehr schwieriges Thema. Das Fachgebiet von MacMahon. Und nun meint er, eine Formel gefunden zu haben für die exakte Berechnung der Anzahl an Partitionen einer beliebigen Zahl. Das ist unmöglich! Dieses Problem ist ein unlösbares Rätsel des Universums.

7.3.6 p(200)!

Regie: *Räumliche Inszenierung: MacMahons Büro am Trinity College in Cambridge Personen: Percy Alexander MacMahon, Srinivasa Ramanujan*

Ramanujan: *Klopft an der Tür.*

MacMahon: Eintreten auf eigene Gefahr!

Ramanujan: *Tritt ein.*

MacMahon: Ah ... ich habe schon auf Sie gewartet. Die Quadratwurzel von 58.639, los!

Regie: *Kurzer Moment der Stille.*

Ramanujan: 242.

MacMahon: 242, was?

Ramanujan: Komma 1 5 4 9 ... 0 9 0.

MacMahon: Ein Kinderspiel! Fragen Sie mich etwas!

Ramanujan: Die gleiche Zahl zum Quadrat.

MacMahon: 3 Milliarden, 438 Millionen, 532 Tausend, 3 Hundert ... und 21. Ha! Geschlagen! Kombinatorik ist mein Fachgebiet! Verklärtes Würfel werfen!

MacMahon: Sie haben vielleicht Nerven. Kein Erfolg bei den Primzahlen und nun wenden Sie sich so einfach den Partitionen zu. Ich sage Ihnen, die sind nicht zu knacken und besonders nicht von Ihnen!

Ramanujan: Ich kann es! Und ich mache es!

MacMahon: Nein, ich mache es! Per Hand ... durch langsames, qualvolles Addieren, und Sie können sich sicher sein, dass jede Formel, von der Sie träumen, ganz und gar falsch ist! Und dann können Sie sich wieder unter Ihrem Felsen im hintersten Indien verkriechen und wir können Ihre Farce beenden! Nun denn, wie hoch muss ich gehen?

Ramanujan: p(200) genügt! Ich werde es schaffen!

7.4 Partitionen

In diesem Abschnitt behandeln wir das „unlösbare Rätsel des Universums“: Partitionen. Dazu führen wir das zahlentheoretische und kombinatorische Thema zunächst ein und zeigen eine Möglichkeit, dieses mit Hilfe von Diagrammen zu repräsentieren. Anschließend lernen wir Formeln und Identitäten für die direkte Berechnung kennen.

7.4.1 Grundlagen

Definition 1 (Partition)**.** *Eine Partition einer positiven ganzen Zahl n ist eine Kombination/Möglichkeit n als Summe positiver ganzer Zahlen zu schreiben, ohne auf die Reihenfolge zu achten.*

Beispiel 1. Die Zahl 4 kann beispielsweise geschrieben werden als

$$
\begin{aligned}
&4\\
&3+1\\
&2+2\\
&2+1+1\\
&1+1+1+1
\end{aligned}
$$

Definition 2 (Partitionsfunktion)**.** *Für eine positive ganze Zahl n definieren wir die Partitionsfunktion* $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ *durch*

$$p(n) := \textit{Anzahl Partitionen von } n,$$

wobei wir $p(0) := 1$ *setzen.*

Bemerkung 1. Im zweiten Akt beginnt ein Duell zwischen RAMANUJAN und MACMAHON. Die beiden berechnen auf zwei komplett unterschiedliche Arten die Zahl $p(200)$, wobei mit p die Partitionsfunktion gemeint ist. Dies ist ein enorm großer Aufwand, wie die folgende Tabelle demonstriert:

n	0	1	2	3	4	5	10	20	30	100	200
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	42	627	5604	190.569.292	3.972.999.029.388

Im Jahre 1917 berechnet MACMAHON das Ergebnis „langsam und qualvoll“ von Hand mit Hilfe von Rekursionsformeln von EULER. RAMANUJAN verwendet stattdessen eine selbst gefundene Formel, die nicht die exakte Lösung berechnet, sondern eine unglaubliche präzise Approximation gibt, welche eine exakte Berechnung möglich macht. Die Approximation besteht dabei aus einer Summe von mehreren Termen. Für das Duell verwendete er jedoch eine veraltete Formel, die einen Fehler liefert, wie wir später sehen werden.

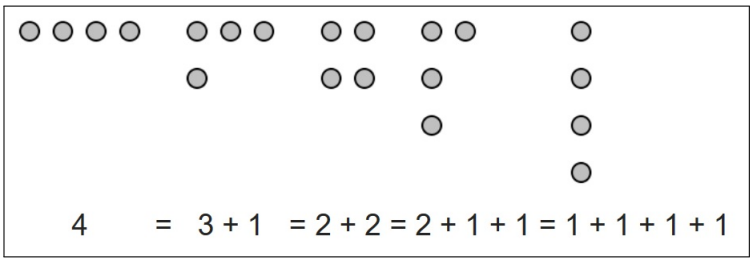


Abbildung 7.1: Ferrers-Diagramm für $n = 4$.

7.4.2 Repräsentation von Partitionen: Ferrers/Young-Diagramme

Die Partitionen können mit Hilfe von sogenannten Ferrers- oder Young-Diagrammen dargestellt werden. Der Unterschied dieser beiden Diagramm-Typen liegt lediglich in der graphischen Darstellung. Nach Beispiel 1 ist $p(4) = 5$, und wir kennen auch die möglichen 5 Kombinationen. Diese Kombinationen werden in Abbildung 7.1 in einem sogenannten Ferrer-Diagramm graphisch dargestellt. [Wik17b]

Man kann das Diagramm auch mit Kästchen statt mit Punkten konstruieren und gelangt so zu dem Young-Diagramm, das in Abbildung 7.2 für die Zahlen $n = 1, \ldots, 8$ dargestellt ist.

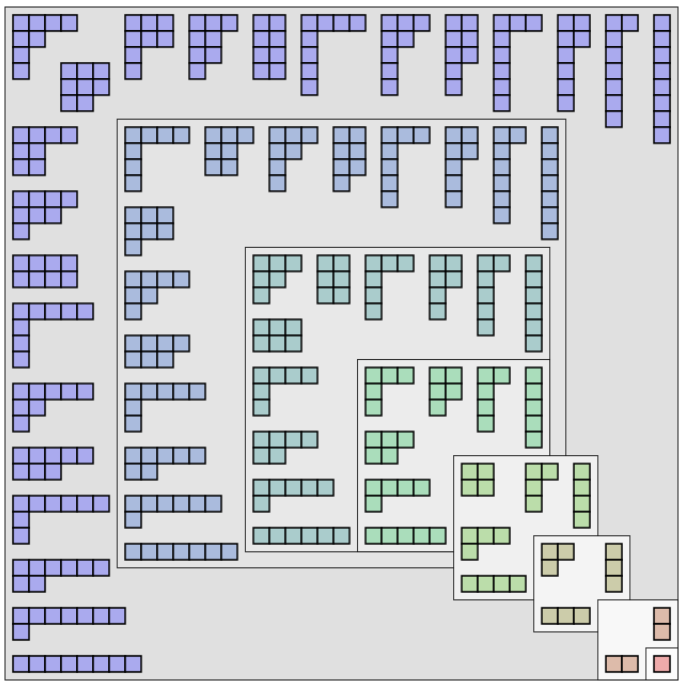


Abbildung 7.2: Young-Diagramm für $n = 1, \ldots, 8$.

7.4.3 Formeln und Identitäten

Satz 1 (Asymptotik-Formel)**.** *Im Jahre 1918 fanden* HARDY *und* RAMANUJAN *folgenden asymptotischen Ausdruck*

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \qquad \textit{für } n \to \infty.$$

Beispiel 2. Für $p(1000)$ ergibt dies einen größeren Wert mit einem Fehler von 1.415%.

Satz 2 (Approximationsformel)**.** *Inspiriert durch die Asymptotik von $p(n)$ entstand die Approximationsformel*

$$p_v(n) \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{v} A_k(n)\sqrt{k} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \exp\left[\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right]\right),$$

mit

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0\le m<k \\ (m,k)=1}} e^{\pi i(s(m,k)-2nm/k)},$$

wobei $(m,k) = 1$ bedeutet, dass m teilerfremd zu k ist und $s(m,k)$ die Dedekind-Summe darstellt. Diese Approximationsformel ist eine Summe von insgesamt v Termen, die unser $p(n)$ approximieren.

Beispiel 3. Für die Berechnung von $p(200)$ benutzen wir die oben beschriebene Approximationsformel, indem wir die einzelnen Summanden berechnen und nach endlich vielen Schritten abbrechen:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 3\,972\,998\,993\,185\,,896 \\
T_2 &= 36\,282\,,978 \\
T_3 &= -\ 87\,,555 \\
T_4 &= 5\,,147 \\
T_5 &= 1\,,424 \\
T_6 &= 0\,,071 \\
T_7 &= 0\,,000 \\
T_8 &= 0\,,043 \\
T_1 + T_2 + \cdots + T_8 &= 3\,972\,999\,029\,388\,,004
\end{aligned}$$

Bereits der erste Summand T_1 liefert eine sehr gute Approximation an die richtige Lösung. Nehmen wir jedoch die ersten acht Terme zusammen, dann erhalten wir eine so unglaublich präzise Annäherung, dass sogar eine exakte Berechnung möglich ist. [Obe09]

7.5 Schauspiel - Akt 3

7.5.1 Der Moment der Wahrheit

Regie: *Räumliche Inszenierung: MacMahons Büro am Trinity College in Cambridge Personen: Percy Alexander MacMahon, Srinivasa Ramanujan*

Regie: *Ramanujan und MacMahon stehen sich gegenüber, lediglich getrennt durch den großen Schreibtisch.*

MacMahon: Ah, es ist soweit ... p(200)! Der Moment der Wahrheit. Nun, Sie zuerst ... Was hat die Formel ergeben.

Ramanujan: *Wirft ihm einen Zettel auf den Tisch.* 3 Billionen, 972 Milliarden, 998 Millionen.

MacMahon: Mein Gott ... Sie sind nah dran ... Ei Fehler von 2 Prozent. Da ... tritt ... mich ... doch ... ein ... Pferd!

MacMahon: *Fällt zurück in seinen Stuhl.*

Ramanujan: *Lächelt.*

7.5.2 Dialog über die göttliche Eingebung

Regie: *Räumliche Inszenierung: Hardys Büro am Trinity College in Cambridge Personen: Godfrey Harold Hardy, Srinivasa Ramanujan*

Alle: *Hardy sitzt auf einem Stuhl und betrachtet die gemeinsam erarbeiteten Notizen, während Ramanujan an der Tafel schreibt.*

Ramanujan: Sehen Sie, Sie hatten Recht. Der Cauchysche Satz funktioniert, es läuft auf die Kreismethode hinaus!

Hardy: Bei 2000 sollte es sinken auf weniger als 1 Prozent etwa und für n gegen Unendlich, so geht der Fehler gegen 0. Sehen Sie, Sie nehmen inzwischen die Nuancen und Komplexitäten wahr, die Sie zuvor nur mit einem Blick gestreift haben. Was für ein erstaunliches Paar wir doch sind.

Sollten wir wirklich die Partitionen knacken, wird das ein monumentaler Durchbruch. Ich habe Sie übrigens für eine Fellowship vorgeschlagen.

Ramanujan: Mr. Hardy ... Danke.

Hardy: Ich möchte Sie etwas fragen ... wie kommen Sie an all das?

Ramanujan: Ich bekomme sie durch meine Göttin Namagiri, sie spricht zu mir. Sie legt mir die Formeln in den Mund, wenn ich schlafe, manchmal auch wenn ich bete. Glauben Sie mir das? Und wenn Sie mein Freund sind, dann werden Sie spüren, dass ich Ihnen die Wahrheit sage ... wenn Sie wirklich mein Freund sind.

Hardy: Aber ich glaube nicht an Gott, ich glaube an nichts, was ich nicht beweisen kann.

Ramanujan: Dann können Sie mir nicht glauben. Verstehen Sie denn nicht? Eine Gleichung hat nur Bedeutung für mich, wenn sie einem göttlichen Gedanken Ausdruck verleiht. Vielleicht ist es besser, wenn wir das bleiben, was wir waren.

Hardy: Ich erinnere mich, dass in der Schule einer der Geistlichen zu mir sagte: Weißt du, Gott existiert, weil er wie ein Drache ist. Du spürst den Zug am Seil und da oben ist er. Ich fragte, was ist, wenn es windstill ist, und der Drache nicht fliegen kann?

Ich kann es nicht, ich glaube nicht an Gott. Ich glaube auch nicht an die unendliche Weisheit des Ostens, aber ich glaube an Sie!

Ramanujan: Ich danke Ihnen. Ich möchte zu Ende bringen, was wir begonnen haben.

Hardy: Gut!

7.5.3 Überblick der Geschehnisse

RAMANUJAN ist zu diesem Zeitpunkt schon schwer an Tuberkulose erkrankt. Trotzdem arbeitet er weiter an seinen Ausführungen und möchte diese zu Ende führen. Danach hat er allerdings den Wunsch geäußert, wieder nach Indien zurückzukehren.

Während RAMANUJAN weiter an seinen Forschungen arbeitet, wird die von Hardy vorgeschlagene Fellowship von RAMANUJAN abgelehnt. Nach weiteren Treffen liefert RAMANUJAN eine ziemlich exakte Formel für die Berechnung der Partitionen und sogar einen dazugehörenden Beweis. Mit diesen Aufzeichnungen wendet sich HARDY an MACMAHON, welcher beeindruckt ist und nun zu einem Unterstützer RAMANUJANS wird.

Nachdem HARDY weitere Kollegen von RAMANUJANS Denkweise überzeugt und inspiriert hat, schlägt er RAMANUJAN für eine Royal Fellowship (RFS) vor. Im letzten Akt hören wir das Plädoyer von Hardy im Rahmen der Zusammenkunft für die Royal Fellowship von RAMANUJAN.

7.5.4 Das Plädoyer von HARDY zur Royal Fellowship

Regie: *Räumliche Inszenierung: Imposanter Saal am Trinity College in Cambridge*
Personen: Godfrey Harold Hardy

Hardy: Hier sehen wir nun die Arbeit zu den Partitionen und den enormen Durchbruch, der erzielt wurde. All das wohlgemerkt hat ein Mann erreicht, dessen Wissensgrenzen, als ich ihn zum ersten Mal traf, so bestürzend waren wie seine Tiefgründigkeit. Die Meinungen über die Bedeutung der Arbeit von Ramanujan mögen auseinandergehen, ebenso über ihren Einfluss auf die Mathematik der Zukunft. Doch das Entscheidende seiner Arbeit ist ihre Tiefe und ihre unanfechtbare Originalität.

> Mr. Littlewood hat mir einst gesagt, dass jede positive ganze Zahl zu den ganz persönlichen Freunden Ramanujans zählt. Ich halte das für wahr, er hat mir gesagt, dass eine Gleichung für ihn nur dann von Bedeutung sei, wenn sie einem göttlichen Gedanken Ausdruck verleihe.
>
> Obwohl sich in mir alles dagegen sträubt, hat er möglicherweise recht. Denn ist das nicht exakt die Rechtfertigung für unsere mathematischen Forschungen. Wir alle streben nach höchster Vollkommenheit, indem wir die Unendlichkeit erforschen. Wir erfinden die Formeln doch nicht, sie existieren bereits ... und sie warten nur darauf von den klügsten Köpfen, so wie Ramanujan einer ist, endlich aufgespürt und bewiesen zu werden.
>
> Letztlich komme ich nicht umhin zu fragen: Wer sind wir, dass wir es wagen, an Ramanujan zu zweifeln. Ganz zu Schweigen an Gott. Danke.

7.5.5 Schluss

Neben G. H. Hardy setzten sich u. a. John E. Littlewood, Percy Alexander MacMahon, Joseph Larmor, Thomas John I'Anson Bromwich, Seth Barnes Nicholson, Alfred Young, Edmund Taylor Whittaker, Andrew Russell Forsyth und Alfred North Whitehead für die Mitgliedschaft von Srinivasa Ramanujan in der „Royal Society"ein. Sogar die Professoren Hobson und Baker, die auf Ramanujans Briefe aus Indien nicht geantwortet hatten, sprachen sich für ihn aus.

Am 2. Mai 1918 wurde Srinivasa Aaiyangar Ramanujan in den Kreis der „Royal Society" aufgenommen und war damit einer der jüngsten Fellows der Royal Society.

Nach Ende des 1. Weltkrieges kehrte Ramanujan im März 1919 nach Indien zurück und reiste nach kurzem Aufenthalt in Chennai weiter nach Kumbakonam. Der mittlerweile in Mathematikerkreisen weltbekannte Ramanujan starb 26. April 1920 im Alter von nur 32 Jahren an Tuberkulose.

Einige Jahre nach Ramanujans Tod fragte Paul Erdős, der bekannte ungarische Mathematiker, G. H. Hardy, worin er seinen größten Beitrag zur Mathematik sehe. Ohne zu zögern antwortete Hardy, dass es sich um die Entdeckung Ramanujans handele; er nannte sie „den einzigen romantischen Vorfall in meinem Leben." Zusätzlich hat er angemerkt:

> *Man hat mich oft gefragt, ob Ramanujan ein besonderes Geheimnis besessen habe, ob seine Methoden anders als die anderer Mathematiker gewesen seien, ob seine Denkweise nicht eigentlich abnorm gewesen sei. Ich kann diese Frage nicht mit Zuversicht oder Überzeugung beantworten, glaube es aber nicht. Vielmehr glaube ich, dass alle Mathematiker im Grunde in der gleichen Weise denken und dass Ramanujan keine Ausnahme darstellt. Sein Gedächtnis und seine rechnerischen Fähigkeiten waren sehr ungewöhnlich, aber abnorm konnte man sie wohl nicht nennen. Wenn er zwei große Zahlen zu multiplizieren hatte, tat er das auf die übliche Weise; er konnte das mit ungewöhnlicher Geschwindigkeit und Genauigkeit tun, aber nicht schneller und genauer als irgendein Mathematiker, der von Natur aus flink und ans Rechnen gewöhnt ist. Mit seinem Gedächtnis, seiner Geduld und seiner rechnerischen Begabung kombinierte er ein Verallgemeinerungsvermögen, ein Gefühl für Form und eine*

Fähigkeit, seine Hypothesen rasch zu modifizieren, die oft wirklich verblüffend waren, so dass er in seiner Zeit auf seinem Gebiet ohne Rivalen war. [Sein Werk] hat nicht die Einfachheit und die Zwangsläufigkeit von mathematischer Arbeit höchsten Ranges; wäre es größer, wäre es weniger exotisch. Er hat eine Gabe, die niemand ihm absprechen kann: tiefe und unbesiegbare Originalität. Er wäre vermutlich ein größerer Mathematiker geworden, wäre er in seiner Jugend an die Hand genommen und etwas gezähmt worden: Er hätte mehr Neues entdeckt und ohne Zweifel Wichtigeres. Andererseits wäre er weniger er selbst, Ramanujan, gewesen, sondern eher ein europäischer Professor, und der Verlust wäre vielleicht größer gewesen als der Gewinn.

G. H. HARDY

Literaturverzeichnis

[Bem85] BEMDT, BRUCE C: *Ramanujan's Notebooks Part I*. Springer, New York, 1985.

[Bro16] BROWN, MATTHEW: *Die Poesie des Unendlichen*. Warner Bros., IFC Films, 2016.

[DH98] DAVIS, PHILIP J and REUBEN HERSH: *The Mathematical Experience*. Houghton Mifflin Harcourt, 1998.

[Har92] HARDY, GODFREY HAROLD: *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, 1992.

[Kan13] KANIGEL, ROBERT: *Der das Unendliche kannte: das Leben des genialen Mathematikers Srinivasa Ramanujan*. Springer, 2013.

[Obe09] OBERWOLFACH, MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT: *Jahresbericht 2008*. pages 27–42, 2009.

[Wik17a] WIKIPEDIA: *Intuition – Wikipedia, Die Freie Enzyklopädie*. 20.02.2017.

[Wik17b] WIKIPEDIA: *Partition (number theory) – Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 20.02.2017.

[Wik17c] WIKIPEDIA: *S. Ramanujan – Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 25.06.2017.

Mathematik in China – eine andere Mathematik oder nur ein anderer Zugang zu *der* Mathematik?

Jens Borgemeister



Wie sah die Mathematik im antiken China aus? Können wir diese überhaupt „Mathematik“ nennen? Um die Entwicklung der Mathematik im antiken China besser verstehen zu können, schauen wir uns zuerst einmal die politische und soziale Situation an.

8.1 Antikes China (400 v. Chr. bis 200 n. Chr.)

Zu Beginn unserer betrachteten Zeit bestand China aus bis zu 16 kleinen, verfeindeten Königreichen. Mit der Zeit verringerte sich diese Zahl durch Kriege und Eroberungen. Bis zum Jahre 221 v.Chr. gelang es der Qin-Dynastie alle anderen Reiche zu erobern. Dies war der Anfang des Chinesischen Kaiserreiches und damit eines der wichtigsten Ereignisse der Geschichte Chinas.

Der Qin-König Zheng, der sich zum ersten Kaiser von China ernannte, bzw. dessen Kanzler Li Si schuf die Voraussetzungen für das Chinesische Kaiserreich, das für die nächsten Jahrtausende die vorherrschende Staatsform in China war. Die Qin-Dynastie regierte das bis dahin größte Reich.

Der König Zheng, nun Kaiser, war ein Tyrann, der unter anderem eine Bücherverbrennung durchführen ließ, bei der alle nicht der staatlichen Lehre entsprechenden

Schriften verbrannt wurden. Deshalb sind heute aus der Zeit vor der Qin Dynastie kaum noch Schriften erhalten. Aufgrund des totalitären Regierungsstils kam es schon kurz nach dem Tod des ersten Kaisers zu sozialen Unruhen. Diese Unruhen führten innerhalb von wenigen Jahren zum Zerfall der Qin Dynastie.

Aus diesen Unruhen heraus entstand die Han-Dynastie. Zu Beginn erlebte diese eine Blütezeit von großer Expansion, nach etwa 200 Jahren begann jedoch auch der Zerfall der Han-Dynastie. Dieser führte – obwohl er von kurzen Expansionsphasen unterbrochen war – um 200 n. Chr. zum Ende der Han Dynastie. Das Kaiserreich China zerfiel danach in drei Königreiche: Wei im Norden, Wu im Süden und Shu Han im Westen.

8.2 Sozialer Rahmen

Im antiken China gab es klar definierte soziale Schichten, ein Wechsel zwischen diesen war nur in Ausnahmefällen möglich, auch wenn dieser in der späten Han Zeit einfacher wurde. Nur den höheren sozialen Schichten wurde ein Zugang zu Bildung ermöglicht. Für diese war anfangs das Lesen und Schreiben und später die Kenntnis von alten Schriften ein Statussymbol.

Während dadurch die meisten Wissenschaften nur für die Oberschicht zugänglich waren, hatte die Mathematik ein besondere Stellung. Die Grundrechenarten wurden von einem großen Teil der Bevölkerung beherrscht, darüber hinaus besaßen die Handwerker für den Bau, die Bauern zur Feldvermessung oder die Beamten für die Buchhaltung weitere Mathematikkenntnisse. Die damals höhere Mathematik wurde von den Astronomen und in der Musik zum Studieren der Töne verwendet.

8.3 Kultureller und Politischer Einfluss

Kultur und Politik standen nahe beieinander im antiken China. Während in der Kultur die Harmonie und der Konsens im Vordergrund standen, ging es in der Politik nur darum, beim Kaiser gut anzukommen.

Dies führte dazu, dass in der Wissenschaft – im Gegensatz zum antiken Griechenland – nur ein schmales Spektrum an Ansichten vertreten war, nämlich genau die, die der Kaiser befürwortete und unterstützte. Weil es also keine großen Meinungsunterschiede gab, wurde Diskussion und Konfrontation weitgehend vermieden, und die philosophische bzw. wissenschaftliche Arbeit wurde hauptsächlich von Kollektiven bewirkt. Außerdem waren die alten Schriften wie eine göttliche Wahrheit, die man weder anzweifeln wollte noch beweisen musste. Dies führte dazu, dass mathematische Beweise nur wenig Beachtung fanden und meistens nur die Sätze bzw. Formeln gelehrt wurden. Daher existieren heute aus dieser Zeit auch so gut wie keine Beweise mehr.

Hier sehen wir schon den großen Unterschied zwischen der Mathematik des antiken Chinas und der des alten Griechenlands. Bei ersterer stand die Anwendung der Sätze im Mittelpunkt, während letztere sich hauptsächlich den Beweisen und der dahinter steckenden Philosophie widmete. Im folgenden Abschnitt schauen wir uns die Mathematik im antiken China detaillierter an.

8.4 Anfänge der Mathematik im antiken China

Aus der Zeit der Streitenden Reiche (vor 221 v. Chr.) sind nur wenige Schriften erhalten, eine davon ist das „Buch des Handwerks“, in dem Längeneinheiten und Winkel definiert und deren Anwendung erklärt wird.

Ein weiteres, größeres mathematisches Werk – jedoch kein rein mathematisches Werk – ist das „Buch des Meisters Mo“, in dem Definitionen für grundlegende Geometrische Konzepte beschrieben werden, z.B.:

- Flach: gleiche Höhe
- Gerade: drei Punkte kollinear
- Gleiche Länge: Passt genau zusammen
- Mittelpunkt: Punkt von gleicher Länge
- Kreis: ein Mittelpunkt mit gleicher Länge

Die genauere Berechnung des Kalenders war zu dieser Zeit die größte Motivation für neue Erkenntnisse in der Mathematik, da man sich dadurch genauere astrologische Vorhersagen und somit Erfolge in Kriegen versprach.

Mithilfe von Bambusstäbchen, auch Zählstangen genannt, konnte man auch große Zahlen darstellen und beherrschte die Addition, Subtraktion, Multiplikation sowie Division von diesen.

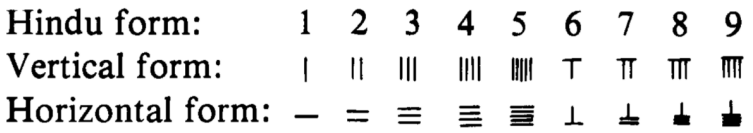


Abbildung 8.1: Verwendung von Zählstäbchen zur Darstellung von Ziffern, die Einer sind vertikal, die Zehner sind horizontal, die hunderter wieder so wie die Einer, usw.

8.5 Entwicklung der Mathematik in der Han Dynastie

Aus der Han Dynastie sind wesentlich mehr mathematische Werke erhalten, die zwei wichtigsten werde ich kurz beschreiben.

Im Buch „Die klassische Arithmetik des Schattenstabs und die Kreis des Himmels“ (Zhōubì suànjīng) wird die chinesische Version des Satzes des Pythagoras vorgestellt (Gōugǔ-Satz) und erklärt, wie man diesen zusammen mit einem Schatten werfenden Stab zur Berechnung von Längen und Höhen verwenden kann. Folgende Legende unterstreicht die Bedeutung der Mathematik im Antiken China:

> Kaiser Yǔ (ca. 17. Jh. v. Chr.) stoppt Überschwemmungen, er vertieft Flüsse und Bäche, erforscht die Form der Berge und Täler, vermisst hohe und niedrige Orte, entlastet die größten Katastrophen und rettet die Menschen vor Gefahr.

> Er führt die Überschwemmungen nach Osten ins Meer und sorgt für keine Überschwemmungen oder Ertrinken. Dies ist möglich wegen des Gōugǔ-Theorems ...

Das wichtigste mathematische Werk der Zeit sind die „Neun Kapitel über die mathematische Kunst“ (Jiǔzhāng suànshù). Dies ist das älteste erhaltene rein mathematische Buch aus China, es enthält 246 Fragen und Lösungen in neun Kapiteln, aber keine Beweise, handelt also von der Anwendung der Mathematik. Das Buch repräsentiert die Entwicklung der chinesischen Mathematik von 1100 v. Chr. bis zum Ende der Han Dynastie und hat auch eine wichtige Rolle in der späteren Entwicklung der chinesischen Mathematik.

Im Bereich der Arithmetik wird vor allem der Handel thematisiert, dabei kommt ein dem Euklidischen Algorithmus ähnlicher Algorithmus und eine Formalisierung der Bruchrechnung vor. Im weiteren werden Volumina von verschieden Körpern angegeben, lineare Gleichungssysteme gelöst, positive und negative Zahlen eingeführt, quadratische und kubische Wurzeln berechnet und quadratischen Gleichungen der Form $x^2 + p \cdot x = q$ gelöst.

8.6 Eine andere Mathematik oder nur ein anderer Zugang zu DER Mathematik?

Nachdem wir uns nun die antike chinesische Mathematik genauer angeschaut haben, kommen wir zu der Frage: „Ist das eine andere Mathematik oder nur ein anderer Zugang zu DER Mathematik? “.

Diese Frage ist schwierig zu beantworten, denn die Antwort hängt davon ab, wie wir Mathematik genau definieren würden. Wenn wir die Mathematik im antiken Griechenland als Grundlage dafür nehmen, also in der Mathematik auf Axiomen basierende Beweise erwarten, dann ist das was die Chinesen gemacht haben eine andere Mathematik gewesen. Sehen wir jedoch in der Mathematik das Beschäftigen mit Zahlen und Geometrie, dann ist die „chinesische Mathematik“ auch Mathematik – nur mit einem anderen Zugang.

Literaturverzeichnis

[LS02] LLOYD, GEOFFREY und NATHAN SIVIN: *The Way and the Word – Science and medicine in early China and Greece*. Yale university press, New Haven and London, 2002.

[Wus13] WUSSING, HANS: *000 Jahre Mathematik (Teil 1)*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

[YS87] YAN, LI und DU SHIRAN: *Chinese Mathematics – A concise history*. Oxford University Press, Walton Street, Oxford, 1987.

Kategorientheorie – eine Alternative zur Mengenlehre?

Thomas Röhl



Mathematiker arbeiten fast täglich mit Mengen, z.B. denen der reellen oder komplexen Zahlen, sowie mit Vektorräumen, topologischen Räumen, Gruppen und anderen auf Mengen basierenden Strukturen. Dabei wird selten noch an die zugrundeliegenden Axiome gedacht, sondern diese werden bei der Handhabung automatisch angewandt. Viele Mathematiker kommen ihr ganzes Arbeitsleben auf diese Weise zurecht, ohne „die“ Axiome für Mengen zu beherrschen, obwohl sie so nie mit Vektorräumen, Lie-Algebren oder ähnlichen Strukturen arbeiten würden.

Auf der Basis der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC), die heute Grundlage fast aller Zweige der Mathematik ist, sind große mathematische Errungenschaften erzielt worden. Allerdings gibt es einen großen Mangel: Die Verwendung des Begriffs „Menge“ widerspricht der Art, wie die meisten Mathematiker ihn benutzen, denn im ZFC-System sind Elemente einer Menge stets ebenfalls Mengen.

So kann man in ZFC bei einer gegebenen Menge X fragen, was die Elemente von X sind, also im Falle der reellen Zahlen, was die Elemente von π sind. Die meisten Mathematiker würden auf diese Frage, sofern sie sie ernst nehmen, antworten, π habe keine Elemente. Dies widerspricht allerdings der Verwendung des Mengenbegriffs in der ZFC-Axiomatik: Wenn alle Elemente der Menge der reellen Zahlen wieder Mengen sind, und diese alle keine Elemente enthalten, dann sind sie alle die leere Menge, also folgt, dass alle reellen Zahlen einander gleich sind.

Ebenso enthält jede nicht-leere Menge X ein Element x, sodass $x \cap X = \varnothing$ gilt. Aber was soll, z.B. im Fall von $\mathbb{R}$, $\pi \cap \mathbb{R}$ bedeuten?

Ein möglicher Ausweg aus dieser Situation wäre eine Axiomatisierung auf Grundlage der von Lawvere eingeführten Elementaren Theorie der Kategorie von Mengen

[Law64, Law05]. Allerdings sind die Axiome dort so formuliert, dass eine gewisse Kenntnis von Kategorientheorie vorausgesetzt wird. Ferner existieren aufgrund des Ursprungs dieser Axiomatik in der Kategorientheorie 3 Fehlvorstellungen:

1. Die Motivation ist das Ersetzen der Mengenlehre (set theory) durch Kategorientheorie. Dies ist nicht beabsichtigt, es geht hier um kein Konkurrenzkonzept, sondern es ist Mengenlehre.

2. Die Axiomatik sei mathematisch komplizierter als andere (z.B. ZFC), da LAWVERE fast alles aus der Topos-Theorie erarbeitet hat, und diese erscheint Außenstehenden schwer zugänglich.

3. Da die Axiome aus der Kategorientheorie stammen, und da die Definition der Kategorie eine Sammlung von Objekten und Sammlung von Pfeilen beinhaltet, und die „Sammlung" so etwas wie „Menge" bedeuten könnte, entsteht eine Zirkularität: Um Mengen kategorientheoretisch zu axiomatisieren, müssen wir schon wissen, was eine Menge ist.

Die Kategorien-Sprache wird nach NORMAN STEENROD auch liebevoll als *abstrakter Unsinn* bezeichnet. Dieser Ausdruck ist im Wesentlichen korrekt und nicht zwangsläufig abfällig: Kategorien beziehen sich auf Unsinn in dem Sinne, dass alles um die „Struktur", und nicht im die „Bedeutung" der Dinge geht, die sie repräsentieren. Der Schwerpunkt liegt weniger darin, mehr über eine bestimmte Menge zu erfahren, die man betrachtet, sondern eher darin, wie diese Menge in Beziehung zu anderen Menge steht.

Kategorien sehen intuitiv zunächst aus wie Mengen, und zwar in mehrfacher Hinsicht. Sie erinnern an Mengen, da sie „Sammlungen von Objekten" sind, und darüber hinaus gibt es eine vage Vorstellung von „Funktionen von Kategorien zu Kategorien", genannt Funktoren. Gleichzeitig führt jede Kategorie dazu, dass man an Sammlungen von Mengen denkt, da analoge „Funktionen" zwischen den Dingen, die sie enthalten, bestehen. Mathematisch exakt wird eine Kategorie nach [Bra16] wie folgt definiert:

Definition (Kategorie)**.** *Eine Kategorie* C *besteht aus den folgenden Daten:*

1. *einer Klasse* $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$*, deren Elemente wir Objekte nennen,*

2. *zu je zwei Objekten* $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ *einer Menge* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$*, deren Elemente wir mit*

$$f : A \to B$$

notieren und Morphismen von A nach B nennen,

3. *zu je drei Objekten* $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ *einer Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C),$$

die wir mit $(f, g) \mapsto g \circ f$ *notieren und die Komposition von Morphismen nennen,*

4. *zu jedem Objekt* $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ *einen ausgezeichneten Morphismus* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, A)$*, welchen wir die Identität von A nennen.*

Diese Daten müssen zudem folgenden Regeln genügen:

1. *Die Komposition von Morphismen ist assoziativ: Für drei Morphismen der Form* $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ *in* C *gilt*
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \text{ als Morphismen } A \to D.$$
2. *Die Identitäten sind beidseitig neutral bezüglich der Komposition: Für jeden Morphismus* $f : A \to B$ *in* C *gilt* $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.

Auch wenn die Definition einer Kategorie auf den ersten Blick kompliziert aussieht, kann das Wesentliche schnell zusammengefasst werden: Eine Kategorie besteht aus einer Sammlung von „Objekten“ und von „Morphismen“ zwischen diesen, so dass eine Liste natürlicher Bedingungen erfüllt wird.

Beispiele für Kategorien sind etwa die Kategorie der Gruppen, die Morphismen sind dann die Gruppenhomomorphismen, die die Struktur respektieren; oder die Kategorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume mit den $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen als Morphismen. Aber auch Mengen bilden eine Kategorie.

Auf dieser Grundlage beschreibt Leinster [Lei14] eine Axiomatik einer kategorientheoretisch basierten Mengenlehre, die sich auf Folgendes bezieht:

1. Einige Dinge werden Mengen genannt.
2. Für jede Menge X und eine Menge Y werden einige Dinge Funktionen von X nach Y genannt, $f : X \to Y$ oder $X \to Y$.
3. Für jede Menge X, eine Menge Y und eine Menge Z gibt es eine Operation, die jedem $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ eine Funktion $g \circ f : X \to Z$ zuordnet.
4. Für jede Menge X gibt es eine Funktion $\mathbf{1}_X : X \to X$.

Die Axiome dieser kategoriebasierten Mengenlehre können informell folgendermaßen zusammengefasst werden:

1. Die Komposition von Funktionen ist assoziativ und es gibt Identitäten.
2. Es gibt eine Menge mit genau einem Element.
3. Es gibt eine Menge ohne Elemente.
4. Eine Funktion ist durch ihre Wirkung auf Elemente determiniert.
5. Mit gegebenen Mengen X und Y kann man ein kartesisches Produkt $X \times Y$ bilden.
6. Mit gegebenen Mengen X und Y kann man die Menge von Funktionen von X nach Y bilden.
7. Mit gegebenen $f : X \to Y$ und $y \in Y$ kann man das Urbild $f^{-1}(y)$ bilden.
8. Die Teilmenge einer Menge X entspricht den Funktionen von X nach $\{0, 1\}$.
9. Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge.
10. Jede Surjektion besitzt eine Rechtsinverse.

Diese 10 Axiome formuliert Leinster anschließend mathematisch sauber aus [Lei14].

Literaturverzeichnis

[Bra16] BRANDENBURG, MARTIN: *Einführung in die Kategorientheorie*. Springer-Verlag, 2016.

[Law64] LAWVERE, F. WILLIAM: *An elementary Theory of the Category of Sets*. PNAS, 52:1506–1511, 1964.

[Law05] LAWVERE, F. WILLIAM: *An elementary Theory of the Category of Sets (long version) with Commentary*. Reprints in Theory and Applications of Categories, (11):1–35, 2005.

[Lei14] LEINSTER, TOM: *Rethinking set theory*. American Mathematical Monthly, 121(5):403–415, 2014.

Die dunkle Seite - Über die angewandte Mathematik

Niko Schmidt



Bei der angewandten Mathematik gibt es zwei Seiten, die betrachtet werden müssen. Eine ist die dunkelste Seite der Mathematik, da falsch angewandte Mathematik wohl eine der grausamsten Sachen ist, die sich Mathematiker in einer ansonsten gewaltfreien Welt vorstellen könnten. Einerseits liefert sie falsche Ergebnisse, andererseits zerstört sie die Ästhetik der Mathematik, indem sie vereinfachende falsche Annahmen trifft oder aus dem Kontext gerissen und sinnlos an bestimmte Stellen gesetzt wird.

10.1 Falsch angewandte Mathematik

10.1.1 Wirtschaft

Ein Beispiel dafür passiert in der Wirtschaft, wenn stark vereinfachte Modelle die Realität abbilden sollen. Dave Colander, Ökonom in Vermond, findet diese Herangehensweise bedenklich und kritisiert sie (nach [Pen17]). Durch diese Fehler würden dann den Politikern falsche Empfehlungen gegeben, wie etwa beim Freihandelsabkommen. Ein anderes Beispiel sei der Mindestlohn, wo viele Ökonomen vor Arbeitsplatzverlusten in Deutschland gewarnt hätten, die Arbeitslosenquote allerdings seit Einführung des Mindestlohns gesunken sei. Colander empfiehlt die Abkehr von Modellen und möchte, dass die Modellierung eher wie bei den Ingenieuren gehandhabt werde, wo mehr Heuristiken, Erfahrungswerte und gesunder Menschenverstand eingesetzt würden. Diese Mittel seien zwar nicht so formal, aber eventuell zweckdienlicher. Hier zeigt sich, dass Abstraktion, wie sie in der Mathematik betrieben wird, nicht immer hilfreich ist.

Menschliches Verhalten ist komplex und kann somit meiner Meinung nach nicht mit einem einfachen Modell beschrieben werden. Vielleicht sollte man auch gar nicht versuchen, Menschen durch formale Modelle zu beschreiben, denn wer möchte schon den gläsernen Menschen, dessen komplettes Handeln ein Computer vorhersagen kann?

10.1.2 Mathematics as Propaganda

Nicht nur DAVE COLANDER sonndern auch NEAL KOBLITZ, ein 1948 geborener US-amerikanischer Mathematiker, denkt über die Probleme von falsch angewandter Mathematik nach. In seinem ersten Beispiel (aus seinem Buch „Mathematics as Propaganda“ [Kob81]) berichtet er von einer Fernsehshow, in der die Formel $D = N * I$ auftauchte, wobei D Schaden an der Natur, N Anzahl der Leute, I Schaden einer einzelnen Person an der Natur bedeuten soll. Als Fazit wurde in der Fernsehshow präsentiert, dass es einfach nicht zu viele Menschen geben dürfe.

KOBLITZ analysiert nun die Formel und fragt nach, ob diese überhaupt sinnvoll sei. Bei der Formel werde ja angenommen, dass jede Person im gleichen Maß der Umwelt schade, egal ob sie ein Chemieboss ist oder nicht. Die Frage sei, ob die Zuschauer das merkten oder sich von der Formel einschüchtern ließen.

Gleichungen würden Seriösität vermitteln, obwohl bei einigen Formeln fraglich ist, wie überhaupt die Angaben gemessen werden können. Wie misst man zum Beispiel den Schaden an der Natur? Kann man dabei überhaupt eine sinnvolle Angabe machen? Wir haben teilweise keine Vergleichbarkeit. Zum Beispiel stellen sich die Fragen, wie viele zerstörte Sträucher einen Baum ergeben oder wie viele getötete Schmetterlinge den gleichen Schaden an der Natur wie ein getöteter Frosch ergeben. Auch in der Physik gibt man die zurückgelegte Strecke nicht in Gewichtseinheiten sondern in Längeneinheiten an.

KOBLITZ nennt in seinem Buch [Kob81] auch ein Beispiel für die falsche Anwendung der Statistik. In einer Studie untersuchte CYRIL BURT eineiige Zwillinge, die getrennt oder zusammen aufgezogen wurden und unterzog sie einem IQ-Test, um den Anteil von vererbter Intelligenz und Beeinflussung durch die Umgebung zu bestimmen. Hierbei wurde die Korrelation des IQs der eineiigen Zwillinge untersucht in Abhängigkeit davon, ob diese zusammen oder getrennt aufwuchsen. Das Ergebnis der Studie war dabei angeblich, dass die Korrelation des IQ in beiden Fällen relativ hoch, somit der erbliche Anteil groß und der durch die Umwelt beeinflusste gering sei. BURTS Angaben zu Folge sei der erbliche Anteil 80% und der durch die Umwelt 20%. Somit würden intelligente Eltern intelligente Kinder und dumme Eltern dumme Kinder haben. Dadurch sei Ungleichheit in der Gesellschaft durch Genetik und nicht durch Ungerechtigkeit erklärt.

In späteren Studien wurden Intelligenztests an Schwarzen durchgeführt. Diese schnitten im Durchschnitt 15 IQ Punkte schlechter ab als Weiße. Aufgrund der Studie zur Erblichkeit wurde daraus gefolgert, dass diese Volksgruppe insgesamt dümmer sei. Allerdings gab es schon damals Gegenargumente, etwa dass der IQ-Test von Kultur zu Kultur angepasst werden müsse. Meine persönliche Meinung ist, dass Mathematiker spätestens nach einigen Jahren Mathematikstudium größere Probleme mit so einem Test haben würden. Zum Beispiel fällt Mathematikern die Fortsetzung

von Zahlenfolgen, eine typische Intelligenztestaufgabe, schwer. Welche Zahl sollte zum Beispiel bei der Zahlenfolge 2,3,5 folgen? Als Lösungen gäbe es etwa die Zahl 8 dafür, dass die Abstände immer um 1 größer werden, oder aber die 7, falls immer nur Primzahlen genommen werden. Welches ist die „richtige“ Lösung?

Später wurde auch die Ursprungsstudie untersucht und es fielen sehr schnell Mängel auf: (In der folgenden Abbildung steht N für die Anzahl der Getesteten.)

Korrelation des IQ

	Getrennt aufgewachsen	Zusammen aufgewachsen
1955	0,771 (N=21)	0,944 (N=83)
1958	0,771 (N = über 30)	0,944 (N nicht genannt)
1966	0,771 (N=53)	0,.944 (N=95)

Bei der Untersuchung des IQs war nämlich die Korrelation der IQs der eineiigen Zwillinge mit den gesammelten Daten auf drei Nachkommastellen bei drei verschiedenen Anzahlen getesteter Probanden gleich. Dies ist aber äußerst unwahrscheinlich und legt nahe, dass die Daten manipuliert wurden. Somit ist die scheinbare Seriosität der Studie, die belegen sollte, dass der Großteil der Intelligenz erblich und nicht von der Umgebung bedingt ist, widerlegt. Diese erste Untersuchung hatte aber Auswirkungen auf England, da es dort einen IQ-Test gab, der über die Schulform entschied.

Man kann nun ein mögliches Zwischenfazit ziehen, welches teilweise auch Koblitz zieht. Mathematiker können sich gegen die Schwindler, die Mathematik nutzen, wehren. So wurde auch hier die Studie mit mathematischen Argumenten widerlegt. Mathematiker müssen sich dafür einsetzen, dass die Mathematik für das Richtige genutzt und nicht für das Falsche missbraucht wird. Als ersten kleinen Schritt gilt es zu erkennen, dass Handlungsbedarf besteht.

Aber wonach sollten Mathematiker ihr Wirken ausrichten? Moralisches Handeln scheint eine sinnvolle Maxime. Das führt mich zu guten Anwendungen der Mathematik. Sind diese immer noch dunkel? Warum sollte man sie so bezeichnen? Das resultiert daraus, dass Mitstudenten und ich für das Nebenfach, also angewandte Mathematik, deutlich weniger Zeit aufwenden müssen und doch teilweise bessere Noten bekommen, wobei man hierbei zugeben muss, dass gegebenenfalls das Verständnis auf der Strecke bleibt, dieses aber auch nicht unbedingt notwendig zum Bestehen der Klausur ist. Somit ist, zumindest in meinem Studium, die angewandte Mathematik schneller, einfacher und verführerischer – was nach Star Wars der Weg zur dunklen Seite ist. Aber kann man deswegen einfach vermeiden, sich mit angewandter Mathematik zu beschäftigen? Immerhin scheint diese gelegentlich weit weniger ästhetisch und interessant zu sein als die reine Mathematik. Ich habe jedoch moralisches Handeln als Maxime gefordert. Moralisches Handeln hat zudem in meinen Augen mehrere Aspekte.

Die Wichtigkeit möchte ich in aufsteigender Reihenfolge behandeln. Dazu zuerst der Aspekt, materiellen Wohlstand für die Menschen zu erhalten. Ein bekanntes Sprichwort sagt: „Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt – sondern

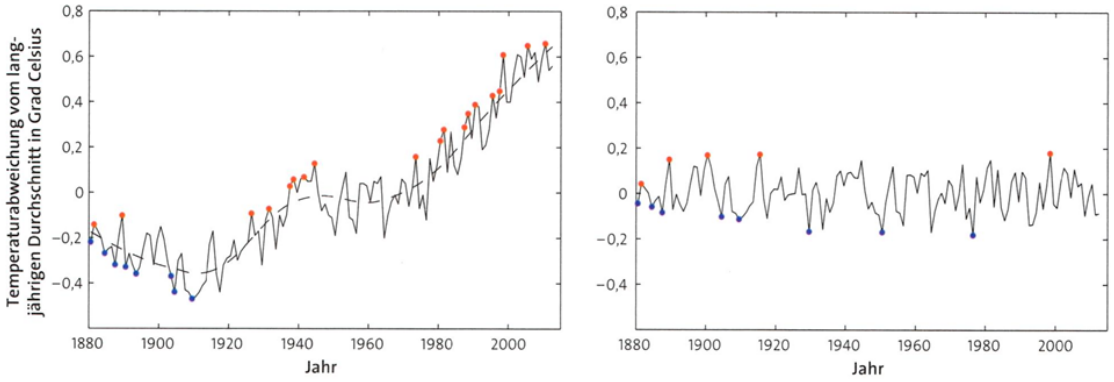


Abbildung 10.1

von unseren Kindern geliehen.“ Nimmt man dieses Zitat als wahr an, resultiert daraus, dass man sich um die Zukunft sorgen muss. Wir müssen uns also auch wissenschaftlich quasi unumstrittenen Themen wie etwa dem Klimawandel stellen. (Es wurden 10% der Artikel in wissenschaftlichen Fachzeitschriften zu dem Thema untersucht. Dies sind 928. Davon behauptet kein Artikel der Klimawandel sei nicht von den Menschen verurusacht und stelle kein Problem dar.) [Gug06]

Was können wir als Mathematiker zum Klimawandel machen: Wir können uns zu Beispiel mit statistischen Methoden der Häufung von Extremereignissen widmen oder untersuchen, ob frühere Extremereignisse dank des Klimawandels zu normalen Ereignissen werden.

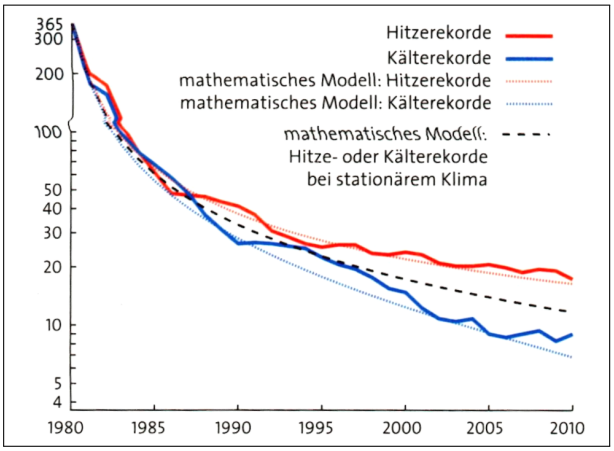
10.2 Klimawandel



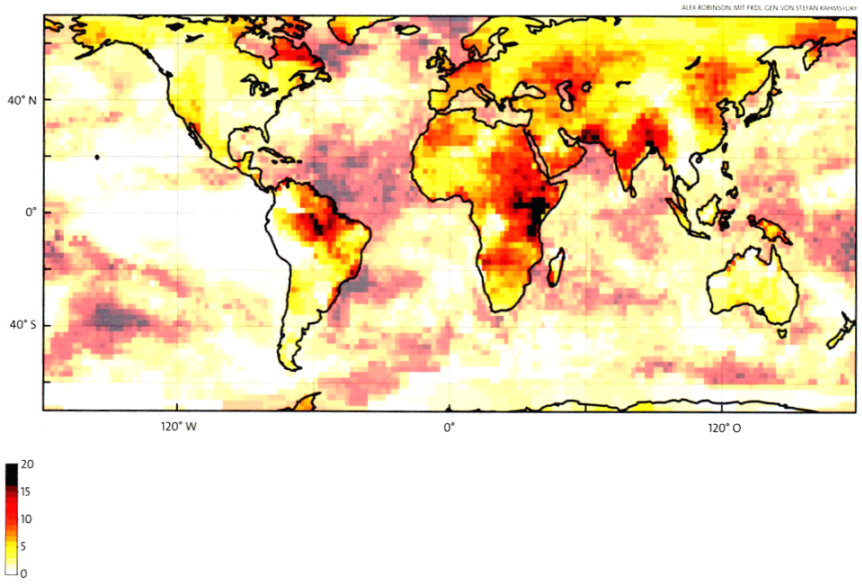
Das Jahrhunderthochwasser im Jahre 2002 in Dresden trägt seinen Namen zu Recht, da ein solches Hochwasser seit 1845 nicht mehr vorgekommen war. Ein solches Extremereignis sagt aber noch nichts über den Klimawandel. Ein spezifisches Ereignis kann nicht dem Zufall oder dem Klimawandel zugeordnet werden. Eine statistische Häufung kann aber durchaus etwas über den Klimawandel aussagen.

Auf den Diagrammen in Abbildung 10.1 sieht man die Temperaturabweichung vom langjährigen Durchschnitt in Grad Celsius von 1880 bis 2010. Bezüglich der mittleren globalen Temperatur gab es seit 1910 keine Kälterekorde mehr, aber viele Wärmerekorde. Zieht man von den Daten den Trend ab, so sehen diese relativ zufällig aus und es gibt Kälte- und Wärmerekorde. Der Trend wurde hier abgezogen, um darzustellen, dass bei einem statischen Klima die Temperaturschwankungen kurzfristigen zufälligen Schwankungen unterliegen. Zur Bestimmung der natürlichen Klimavariabilität muss man zudem, bevor man mit einer Untersuchung beginnt, auch den linearen Trend abgezogen haben. Weiter normiert man oft mit der Standardabweichung, um Daten besser vergleichen zu

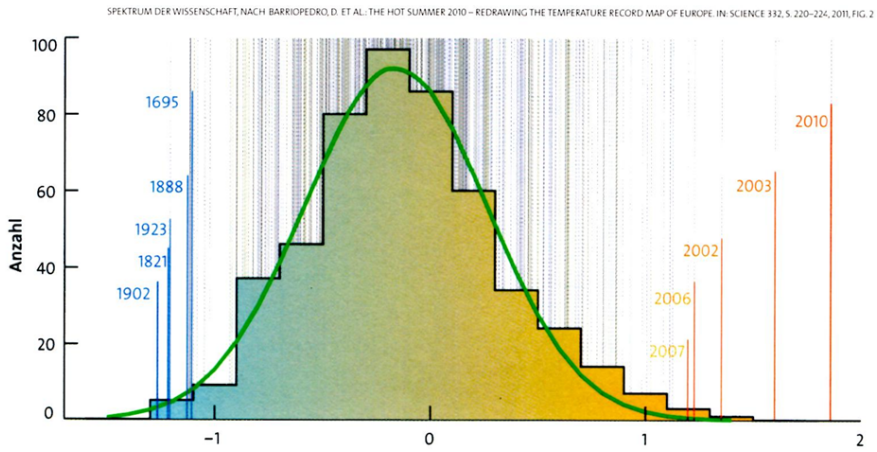
können, was hier aber nicht geschehen ist. Insgesamt kann man das Klima also mit chaotischen/zufälligen Schwankungen und Entwicklungen über längere Zeiträume beschreiben.



Bei diesem Diagramm sind auf der x-Achse die Jahreszahlen und auf der y-Achse die Anzahl der Rekorde aufgetragen. Es wurde dabei gemessen, wie oft im Jahr ein einzelner Tag ein kältester bzw. ein wärmster Tag im Vergleich zu den gleichen Tagen in den Jahren davor war. Zum Beispiel wurde die Temperatur am Tag x.y.wz mit den Temperaturen an x.y.wz-1 bis x.y.80 verglichen. Mit der Zeit sollte es also immer seltener Klimarekorde geben, da die einzelnen Temperaturen „zufällig“ sind. Im Modell geht man davon aus, dass das Klima einer Gaußschen Normalverteilung gehorcht. Somit kann bestimmt werden, wie oft Klimarekorde auftreten sollten. Fügt man dem Klima einen linearen Trend mit wachsenden Temperaturen hinzu, so passt das Modell, welches angibt, wie oft es Wärmerekorde und Kälterekorde gibt, zu den gemessenen Daten. Ohne diesen Trend passen Modell und Daten nicht gut zusammen. Insbesondere gibt es dann keine Erklärung dafür, warum es mehr Hitze- als Kälterekorde gibt. (Auf dem Bild wurden Daten von mehr als 200 europäischen Wetterstationen genommen und die gemittelte Anzahl der Hitze- bzw. Kälterekorde bzgl. der täglichen Temperatur pro Jahr aufgetragen.)



Auch monatliche Hitzerekorde gab es in den Jahren 2001 bis 2010 mehr als erwartet. Teilweise war deren Anzahl sogar um mehr als den Faktor 20 über dem erwarteten Wert.



Bei diesem Diagramm sind auf der x-Achse die durchschnittlichen Sommertemperaturen in Europa der letzten 500 Jahre miteinander verglichen. Die 0 steht hierbei für den Durchschnitt von 1970 bis 1999. Auf der y-Achse ist die Anzahl der Jahre, in denen der Sommer in einem gewissen Temperaturbereich ist, aufgetragen. Dabei gibt es zum Beispiel fast 100 Jahre, die etwas kälter als der genommene Durchschnitt sind. Die grüne Linie stellt eine Gaußverteilung dar. Die kältesten und wärmsten Jahre wurden nun besonders hervorgehoben, wobei zu bemerken ist, dass die Höhe bei den Jahreszahlen keine Aussage hat. In den letzten knapp über 500 Jahren sind die kältesten Sommer in Europa dabei einigermaßen gleich verteilt, wobei unter den kältesten Sommern der jüngste im Jahr 1923 war. Die fünf wärmsten Sommer waren dagegen 2002, 2003, 2006, 2007 und 2010. Erwähnenswert ist zudem, dass diese Daten nur bis 2010 erhoben wurden. Man kann also nicht sagen, der Trend hätte sich über die letzten Jahre hin nicht fortgesetzt. Außerdem sind die kältesten Jahre hinsichtlich der Temperatur relativ nahe beieinander. Die wärmsten allerdings sind weit außerhalb des nach der Gauß-Verteilung erwarteten Bereichs. [GW15]

10.3 Medizin

Wir haben nun den ersten Aspekt analysiert. Es gibt jedoch noch einen viel akuteren Aspekt, den der medizinischen Versorgung. Eine frühe Erkennung von Krebs und bessere Behandlungsmethoden sind im Kampf gegen Krebs wichtig. So ist in den letzten 30 Jahren der Anteil derer, die durch ihre Krebserkrankung starben, um 20% gesunken, wobei man hier allerdings stark unterscheiden muss, um welche Tumorart es sich handelt. Werden gutartige Tumore entdeckt und als gefährlich eingestuft, sorgt dies für unnötige Therapien. Auch sind Krebserkrankungen, die erst in einigen Jahrzehnten relevant werden würden, bei Menschen im Alter von 80 Jahren und älter nicht wesentlich. Durch die gestiegene Lebenserwartung werden zudem Krebserkrankungen immer bedeutsamer, da die Wahrscheinlichkeit an Krebs zu erkranken mit einem höheren Lebensalter steigt. (Siehe dazu auch [Wel11] und [Tag16].) Da also die Krebserkrankung für unsere Gesellschaft von Bedeutung ist, wollen wir versuchen, den Krebs besser zu verstehen.

10.3.1 Krebswachstum

Ein Tumor braucht Sauerstoff für seine weitere Entwicklung. Deswegen sendet er Signale aus, die dazu führen, dass Blutgefäße zu den Krebszellen hin wachsen. Ein Versuch, den Krebs zu besiegen, war, dieses Wachstum von Blutgefäßen mittels des Antikörpers Bevacizumab zu unterbinden, der die Signale des Tumors hemmt. Damit war die Hoffnung verbunden, dass der Tumor nun aufgrund von Sauerstoffmangel Probleme haben würde. Tatsächlich wuchs der Tumor aber schneller und war aggressiver. Daher wurde das Medikament schliesslich wieder aus dem Handel genommen. Dieses Beispiel zeigt, dass Tumore kompliziert sind. Experimente allein scheinen nicht zu reichen und die Logik hinter Krebs ist nicht einfach. Auf der anderen Seite gibt es aber schon große Mengen an Daten über Krebs. Dies führt dazu, dass Computermodelle in der Krebsbekämpfung nützlich sein könnten. Diese Modelle nutzen Mathematik. Zum Beispiel sind Differentialgleichungen zur Modellierung bestimmter chemischer Prozesse hilfreich. Weiter wird mit diesen Modellen Zeit und Geld gespart. Die Entwicklung von Mitteln gegen Krebs geht also schneller vonstatten. Dieser Aspekt ist eine zusätzliche moralische Komponente. [Sav15]

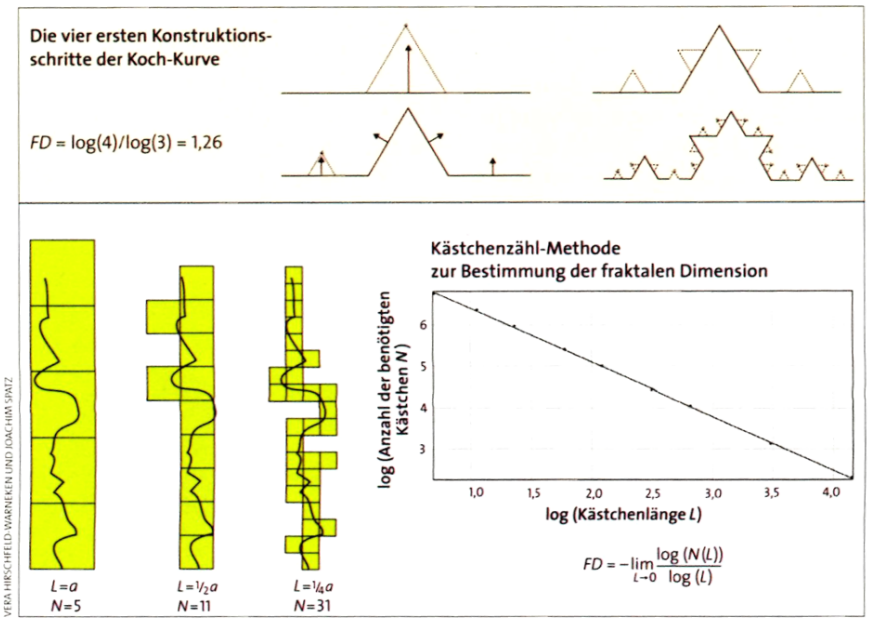
Wir haben nun gesehen, dass Krebs nicht einfachen Mechanismen folgt. Eine frühere Behandlung kann die Erfolgsaussichten erhöhen. Daher wollen wir in einem nächsten Schritt moderne Methoden zur Erkennung von Krebszellen betrachten. Dazu bedarf es eines kurzen Ausflugs in die mathematische Theorie der Fraktale.

Fraktale sind kein willkürlich konstruiertes Objekt der Mathematik, sondern tauchen in approximierter Weise in der realen Welt auf. Fraktale können auch Muster sein, die sich auf verschiedenen Größenordnungen wiederholen. In unserem Fall handelt es sich natürlich nicht um perfekte Fraktale, da die Wiederholungen nicht komplett identisch, sondern nur ähnlich (in einem alltäglichen Sinn des Wortes) sind. Selbstverständlich können sich auch die Wiederholungen nicht beliebig weit fortsetzen. Sie sind etwa durch die Größe von Atomen und Molekülen begrenzt. Man kann in Fraktalen eine Dimension angeben.

Da Fraktale bzw. die fraktalartigen Zellen mit genauerer Messung scheinbar immer länger werden, wie zum Beispiel bei der Kochkurve zu sehen, macht es keinen Sinn, einfach einem Objekt eine Länge zuzuordnen und zu sagen, das Objekt sei 1-dimensional. Man kann zum Beispiel versuchen, die Länge von Küsten, Ländergrenzen oder Flüssen zu bestimmen. Dabei wird auffallen, dass die scheinbare Länge größer wird, wenn man einen kleineren Zollstock nimmt. Zur Berechnung der Dimension benutzt man das Hausdorff-Maß. Beim Hausdorffmaß untersucht man die Summen der Durchmesser, wobei diese mit einem gewissen Exponenten potenziert werden. Der Exponent a, bei dem größere Exponenten dazu führen, dass das Maß unendlich und kleinere dass das Maß 0 wird, ist die Hausdorff-Dimension. In Formeln ausgedrückt sieht das äußere Hausdorff-Maß folgendermaßen aus: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann ist das äußere Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^*_\alpha(E)$:

$$\mathcal{H}^*_\alpha(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^\delta_\alpha(E) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_k)^\alpha \mid E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \operatorname{diam} F_k \leq \delta \forall k \right\}$$

Schränken wir das äußere Hausdorff-Maß auf die Borelmengen im $\mathbb{R}^d$ ein, so haben wir das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}_\alpha$. Die Hausdorff-Dimension ist nun: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann gibt



es (das kann bewiesen werden) ein eindeutiges $\alpha \in \mathbb{R}$ mit:

$$\mathcal{H}_\beta(E) = \begin{cases} \infty, \beta < \alpha \\ 0, \beta > \alpha \end{cases}$$

Dieses α ist die Hausdorff-Dimension von E. Ist die Hausdorff-Dimension nun größer als die topologische Dimension des Objekts, so wird das Objekt ein Fraktal genannt.

Man kann empirisch die fraktale Dimension messen: Man trägt dabei die logarithmische Kästchenlänge auf der x-Achse und die logarithmische Anzahl der benötigten Kästchen auf der y-Achse auf. Das Negative der Steigung ergibt dabei eine Abschätzung der fraktalen Dimension. Hierbei muss aufgepasst werden, die Größe der Kästchen über einige Zehnerpotenzen zu variieren, um eine gute Abschätzung der fraktalen Dimension zu bekommen. [Bro17, VHW15]

10.3.2 Krebsdiagnose

Es gibt einen Zusammenhang zwischen der Komplexität eines Tumors und dessen Bösartigkeit. Mit Hilfe der Fraktalanalyse wird der Grad der Komplexität von Tumorzellen berechnet und somit hat man einen Indikator für die Gefahr, die von diesem Tumor ausgeht. Krebszellen weichen von der Durchschnittszelle ab und haben mehr Chaos und somit Komplexität. Die Fraktale Dimension kann man an der Oberfläche der Zelle mit der genannten Methode ablesen.

Eine zweite Messung ist die der Haftkraft der Zelle an Materialien. Je weniger die Krebszelle haften bleibt desto gefährlicher ist sie, da sie sich besser im Körper ausbreiten kann. Beide Parameter geben zusammen Anzeichen für die Gefährlichkeit der Krebszellen an. Auch ist dieses Verfahren günstiger als ältere Methoden.

10.4 Die Zivilklausel

Nun sind Beispiele von grobem Missbrauch der Mathematik und klaren guten Anwendungen erbracht. Spannend wird es aber erst bei kritischen Punkten. Einen groben Überblick über die Verantwortung eines Mathematikers bietet auch die Tübinger Zivilklausel. Sie beschäftigt sich stark verkürzt damit, dass Hochschulen dem Frieden verpflichtet sind. Nun detaillierter: Was ist Mathematik, hat sie Verantwortung?

Einerseits erscheint Mathematik wertfrei. Formal besteht Mathematik nur aus Sätzen, Definitionen und Beweisen, aber es gibt zahlreiche Anwendungen in anderen Fächern und von der Mathematik selbst. Ein Beispiel ist die RSA Verschlüsselung. Inwiefern ist es dann noch sinnvoll zu behaupten, Mathematik sei wertfrei? Wie jede andere Wissenschaft muss sich die Mathematik vor der Gesellschaft rechtfertigen und beurteilen lassen können.

Weiter könnte man behaupten der Anwender sei allein verantwortlich. Aber ist diese Einstellung aus der ethischen Perspektive insbesondere im Hinblick auf militärische Anwendungen vertretbar? Als Konsequenz aus der Zivilklausel sollte eine Lösung für diese moralische Diskussion gefunden werden. Eine Möglichkeit wäre, dass die ethische Auseinandersetzung von der Institution, zum Beispiel der Universität, getroffen werden sollte und nicht von einem einzelnen Mathematiker. Dabei müssen gesellschaftliche und militärische Relevanz betrachtet werden. Auch muss eine Reflexion über die Zivilklausel stattfinden, um diese zu verbessern. Der Institution kommt auch die Aufgabe zu, ausreichend personelle Ressourcen zur Verfügung zu stellen.

Militärisch hat die Mathematik leider erheblichen Einfluss. So sagte Robert Musil, ein Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts in Österreich lebender Schriftsteller „die Mathematik, Mutter der exakten Naturwissenschaft, Großmutter der Technik, [ist] auch Erzmutter jenes Geistes [...], aus dem schließlich auch Giftgase und Kampfflieger aufgestiegen sind.“ Auch der zweite Weltkrieg wurde stark von der Mathematik beeinflusst. So soll die Entschlüsselung von Texten der Enigma, einer Verschlüsselungsmaschine der Deutschen, durch Alan Turing den zweiten Weltkrieg um einige Jahre früher beendet haben. (Bis in dieses Jahrhundert gab es einige von der Enigma verschlüsselte Texte, die noch nicht entziffert wurden.) [Wik17a, Wik17b]

Beim Manhattan-Projekt, also dem Bau der Atombombe, war die Mathematik insbesondere in Form von physikalischen Überlegungen anzutreffen. Gegenwärtig spielt die Mathematik eine Rolle bei der Steuerung von Drohnen. [Nic12]

10.5 Fazit

Die moralische Pflicht, sich mit angewandter Mathematik zu beschäftigen, resultiert insbesondere aus den medizinischen Anwendungen. Außerdem könnten technische Anwendungen der Mathematik jedem einzelnen zu Gute kommen, was das Beispiel in der Krebsforschung zeigte. Eine gewisse Erkenntnis des Bedarfs von Mathematik in der Medizin scheint es auch schon zu geben, so gibt es einen Studiengang mit dem Namen „Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften“ an der Universität zu Lübeck.

Spannend wird es jedoch erst bei kritischen Punkten: Es bedarf einer Diskussion, inwieweit Mathematiker sich in der militärischen Forschung einbringen sollten. Auch der Bau der Atombombe war für einige Wissenschaftler eine Hoffnung auf Frieden. So gibt es eventuell aufgrund von Atomwaffen keine Kriege zwischen Ländern mit Atomwaffen, da ein solcher für alle beteiligten verheerend wäre. Trotzdem gibt es weiterhin Spannungen, die, wie es der Kalte Krieg zeigte, dramatisch nahe an einem Krieg sein können. Sollte man sich mit angewandter Mathematik, insbesondere bei militärischen Angelegenheiten beschäftigen? Nun liegt es bei jedem Mathematiker selbst, zu entscheiden, ob man sich mit angewandter Mathematik beschäftigen möchte oder nicht.

Literaturverzeichnis

[Bro17] BROSS, CARA SOPHIA: *Fraktale und das Hausdorff-Maß*. Bachelorarbeit an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Seite 38, 2017.

[Gug06] GUGGENHEIM, DAVIS: *eine unbequeme wahrheit*. 2006.

[GW15] GREGOR WERGEN, JOACHIM KRUG, STEFAN RAHMSTORF: *Klimarekorde*. Spektrum der Wissenschaft Physik Mathematik Technik 3/15, Seite 8, 2015.

[Kob81] KOBLITZ, NEAL: *Mathematics as Propaganda*. In: STEEN, DR. LYNN ARHUR (Herausgeber): *Mathematics Tomorrow*, Seiten 111–120. Springer, New York, 1981.

[Nic12] NICKEL, GREGOR. In: THOMAS NIELEBOCK, SIMON MEISCH, VOLKER HARMS (Herausgeber): *Zivilklauseln für Forschung, Lehre und Studium*, Seiten 225–236. Nomos, 2012.

[Pen17] PENNEKAMP, JOHANNES: *Wirtschaft*. FAZ, **11**, 2017.

[Sav15] SAVAGE, NEIL: *Berechnung eines Tumors*. Spektrum der Wissenschaft Physik Mathematik Technik 3/15, Seite 3, 2015.

[Tag16] TAGESSPIEGEL: *http://www.tagesspiegel.de/weltspiegel/volkskrankheit-wie-hat-sich-die-krebs-behandlung-in-deutschland-veraendert/14911186.html*, 2016.

[VHW15] VERA HIRSCHFELD-WARNEKEN, JOACHIM SPATZ: *Genauere Krebsdiagnose durch Fraktalanalyse*. Spektrum der Wissenschaft Physik Mathematik Technik 3/15, Seite 3, 2015.

[Wel11] WELT: *https://www.welt.de/gesundheit/article13747073/Krebs-schlaegt-heute-viel-haeufiger-zu-als-frueher.html*, 2011.

[Wik17a] WIKIPEDIA (DE): *Alan_Turing*, 13. März 2017.

[Wik17b] WIKIPEDIA (DE): *Enigma_(Maschine)*, 13. März 2017.

[Wik17c] WIKIPEDIA (DE): *Frieden*, 14. März 2017.

Experimentelle Mathematik – Die Bedeutung des Experiments in der Mathematik

Patrick Hermle



11.1 Einleitung

Mark Twain sagte einmal, „ein Mann mit einer neuen Idee ist so lange unausstehlich, bis er der Idee zum Erfolg verholfen hat“. Der Mann, um den es in diesem Artikel geht, heißt Jonathan Borwein. Seine Idee ist es, die empirische Note der Naturwissenschaft in die anscheinend genauste aller Wissenschaften, der Mathematik zu integrieren. Borwein hat die für viele Mathematiker schaurige Idee, das Experiment in die vom Beweis dominierte Mathematik zu bringen. Dieser Synthese gibt er den Namen „Experimentelle Mathematik“. Ist nicht schon diese Bezeichnung ein Widerspruch in sich: Experimentelle Mathematik, was soll das sein? Was ist ein mathematisches Experiment? Was können Experimente beweisen?

Dieser Artikel will dem Leser eine neue Fachrichtung der Mathematik näher bringen. Dabei verfolgt er nicht den Anspruch, in wenigen Worten dieses schnell wachsende Gebiet vollständig zu beschreiben. Nein, dieser Artikel soll zeigen, dass dieses neue Fachgebiet eine unkonventionelle aber legitime Methode ist, Mathematik zu betreiben. Das Motto, unter dem die folgenden Zeilen stehen, ist simpel: „Was gesagt werden kann, kann kurz gesagt werden."Deshalb beginnen wir mit dem kleinen Einblick in J. BORWEINS große Welt.

11.2 Experimentelle Mathematik

11.2.1 Geschichte

Dass die Geschichte der Experimentellen Mathematik relativ kurz ist, liegt daran, dass deren wichtigstes Instrument erst seit Mitte des 20. Jahrhunderts existiert: leistungsfähige Computer. Experimentelle Mathematik ist im Allgemeinen eine Methode, mit dem Einsatz von Computern Mathematik zu betreiben. Obwohl Mathematiker eine wichtige Rolle bei der Entwicklung von Computern gespielt haben, haben sie sich lange gescheut, den Computer in ihrem eigenen Fachgebiet anzuwenden. Der erste Erfolg in der Mathematik, bei dem Computer eine wichtige Rolle gespielt haben, ist der Beweis des Vierfarbensatz 1976. Dieser Satz besagt, dass vier Farben genügen, um eine beliebige Landkarte im euklidischen Raum so einzufärben, dass zwei angrenzende Länder nicht dieselbe Färbung haben. Der zweite große Erfolg ist die Wiederlegung der Mertenssche Vermutung 1985. Diese hat behauptet hat, dass die Mertensfunktion durch $\sqrt{x}$ beschränkt sei.

Die Geschichte des wichtigsten experimentellen Mathematikers J. BORWEINS beginnt am 20. Mai 1965 in Schottland. In seiner Jugend wandert er mit seine Familie nach Kanada aus. Er dann studiert als Rhodes Stipendiat am Jesus College in Oxford Mathematik. Seine Fachgebiete sind die Analysis und die Optimierung. Dann entwickelt er sich zum Propheten der Experimentelle Mathematik, veröffentlicht ununterbrochen verständliche und kreative Texte und verkörpert mit seiner begeisterten, unkonventionellen Denkweise das Zusammenspiel zwischen Computern und Mathematik. 1993 gründet er an der Simon Fraser University in Burnaby das erste Center of Experimental and Constructive Mathematics. Am 2. August 2016 stirbt J. BORWEIN und hinterlässt ein überwältigendes Vermächtnis.

11.2.2 Definition

Der Begriff „Experimentelle Mathematik", der schon erwähnt worden ist, soll nun sauber definiert werden. BORWEIN selbst findet es schwierig, seine Fachrichtung in eine kurze Definition zu zwängen. Er glaubt, dass jeder Mathematiker einen intuitiven Zugang zur experimentellen Seite der Mathematik hat. Ein Beispiel sind Gedankenexperimente, in denen er in seinem Kopf oder auf einem Notizblatt mit Zahlen und Formeln herumspielt, sich Zusammenhänge mit Bildern klarmacht und dadurch auf Behauptungen stößt, die er beweisen möchte.

Als der damalige oberste Richter des US-Supreme Court POTTER STUART gefragt

worden ist, ob er eine Definition von Pornographie geben könne, hat dieser entgegnet: „Nein, das kann ich nicht. Aber ich erkenne es, wenn ich sie sehe“ [BD10]. So verhält es sich auch mit der Experimentellen Mathematik. Man erkennt sie, wenn man sie sieht und betreibt. Dennoch ist diese intuitive Beschreibung der experimentellen Mathematik wenig hilfreich, und darum formuliere ich nun meine, von Borwein inspirierte Definition.

Definition (Experimentelle Mathematik)**.** *Experimentelle Mathematik ist der Einsatz von Computern in Berechnungen, um*

i. Mathematische Gesetzmäßigkeiten (Folgen, Ausdrücke. . .) zu finden,

ii. Mathematische Vermutungen zu suchen und zu formulieren,

iii. Mathematische Behauptungen zu belegen oder zu verwerfen.

Wenn man das Wort „Computer“aus dieser Definition entfernt, würden viele professionelle Mathematiker ihre eigene Tätigkeit in dieser Definition wieder finden. Daraus kann man schließen, dass der Einsatz von Computern die Mathematik experimentell macht. Es fällt auf, dass diese Definition sehr selbstbewusst ist, da sie behauptet, dass die Experimentelle Mathematik nicht nur die Angewandte, sondern auch die Reine Mathematik vorantreiben kann. Ein mathematisches Experiment hilft also bei der Suche, der Formulierung und dem Beweisen von Behauptungen. Die Experimentelle Mathematik hat demnach den Anspruch, ein wesentlicher Bestandteil der mathematischen Forschung zu sein. Trotz dieser Definition ist es immer noch schwer, sich ein konkretes Bild der experimentellen Mathematik zu machen. Daher werde ich nun versuchen, diese Definition mit Leben zu füllen.

11.2.3 Beispiel

Eine vernünftige Frage, die sich aus der Definition ergibt, ist, wie ein mathematisches Experiment denn konkret aussieht. Laut Definition gilt die Berechnung durch einen Computer als mathematisches Experiment. Versuchen wir dies ein wenig zu präzisieren. Das was für den Chemiker das Labor ist, ist für den experimentellen Mathematiker der Computer. Der Computer ist die Plattform, auf welcher experimentiert wird. Anstatt in ein Reagenzglas Substanzen zu kippen und auf eine Reaktion zu warten, gibt der experimentelle Mathematiker Formeln, Algorithmen und Zahlen in den Computer ein und wartet auf ein, durch Berechnung entstehendes, Resultat. Das kann im systematischen Herumprobieren oder im gezielten Überprüfen einer Hypothese bestehen. Die verwendeten Werkzeuge Computersoftware, wie Matlab, Mathematica oder Maple und Computer Algebra Systeme. Außerdem sehen die experimentellen Mathematiker die Numerik und ihre entwickelten Algorithmen und Sätze als Hilfswissenschaft oder Teilgebiert ihrer eigenen Methode an. Um eine konkrete Vorstellung von einem mathematischen Experiment zu bekommen, schauen wir uns ein von J. Borwein selbst geführtes an.

Immer wieder kommt es in der Experimentellen Mathematik vor, dass man einen geschlossen Ausdruck für eine Dezimalzahl finden will. Es ist wahrscheinlich jedem Mathematiker klar, dass 3,141592653897932385 auf 19-Stellen mit π übereinstimmt. Können Sie mir aber sagen ob es einen geschlossenen Ausdruck gibt, der auf den

ersten 19-Stellen mit 0,7182818284590252354 übereinstimmt? Nach kurzem Überlegen und dem Tipp, dass in dem Ausdruck die Eulersche Zahl e vorkommen sollte, ist jedem Mathematiker klar, dass der Ausdruck e − 2 ist. Wie aber ist es mit 4,50073356781931585 61?

Auch Mathematiker, die Konstanten und Zahlen lieben, sind hier vor eine schwierige Aufgabe gestellt. Man sieht ein, dass ein Computer mit einem Algebra System oder mit einer Datenbank für Konstanten und Folgen diese Aufgabe schneller lösen kann, als das menschliche Gehirn. Um die grübelnden Leser nicht auf die Folter zu spannen die Lösung ist $\pi - \frac{1}{2} \cdot e$.

Das folgende Beispiel eines mathematischen Experiments zeigt eine raffinierte Anwendungen einer solchen Datenbank von Folgen. Diese Datenbank namens „On line-Encyclopedia of Integer Sequences“ wurde von Neil SLOANE erstellt. Sie sammelt Information über Folgen ganzer Zahlen und enthält über 250.000 Zahlenfolgen. Als JOSEPH ROY NORTH aus Colorado 1998 die Leibniz-Reihe

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \pi$$

untersuchte, entdeckte er ein seltsames Phänomen, das ihn zu BORWEIN führte. Er hat 5.000.000 Terme der Leibniz-Reihe addiert und kommt somit zu folgender Approximation für π:

3,14159**24**535897932384**6**4643383279502**78**4197169399**873**0582097494**1822**30781640
3,14159**26**535897932384**6**2643383279502**88**4197169399**751**0582097494**4592**30781640
6 **–2** **10** **–122** **2770**

Wie zu erwarten, unterscheidet sich die Approximation in der siebten Nachkommastelle von π. Was North hier auffällt ist, dass die nächsten dreizehn Stellen korrekt sind, ehe er wieder in der einundzwanzigsten Stelle eine Abweichung feststellt. Oben ist π und seine Approximation durch die Leibniz-Reihe aufgelistet. Und die Zahlen sind von BORWEIN markiert. Beiden ist dabei aufgefallen, dass Stellen, die sich unterscheiden, ungefähr in einer Periode von 14 Stellen auftreten. BORWEIN berechnete den Fehler, der sich aus Approximation ergibt , und glaubt die Fehlerfolge (2,-2,10,-122,2770,...) schon einmal gesehen zu haben. Hier stellt sich die Frage, ob es ein Zufall ist, dass der Fehler in einer Periode von 14 auftritt? Steckt eine mathematische Gesetzmäßigkeit in dieser Fehlerfolge? Wie der Physiker, der zum ersten Mal ein Ereignis beobachtet, oder der Chemiker, der zum ersten Mal Zeuge einer Reaktion wird, stellt sich BORWEIN die Frage, ob es ähnliche Phänomene in der Mathematik gibt. Die Antwortet lautet: Ja! Nach ein wenig Ausprobieren, kommt man auf die Reihenentwicklung

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Es scheint völlig vernünftig, die Reihenentwicklung von log(2) zu betrachten, da deren Struktur große Ähnlichkeit zur Leibniz-Reihe aufweist: Auch hier wechselt das Vorzeichen und auch hier werden immer kleinere Brüche addiert. BORWEIN wiederum lässt seinen Computer die Summe der ersten 5.000.000 Terme berechnen und das

Resultat lautet:

0,693147**0**80559**9**5309417232121**2**581765680755**16**1343602552**5**1**4**0068000949**418722**
0,693147**1**80559**9**4530941723212**1**4581765680755**00**1343602552**5**4**12**068000949**339362**
1 **–1** **2** **–16** **272** **–7936**

Auch hier treten die Fehler in einer Periode von ca. vierzehn Stellen auf. Im nächsten Schritt betrachtet Borwein die beiden vorherigen Fehlerfolgen, wobei er die erste Fehlerfolge mit $\frac{1}{2}$ multiplizierte. Es ergaben sich diese beiden Folgen:

i. (1,-1,5.-61,1385,. . .)

ii. (1,-1,2,-16,272,-7936,. . .).

Nun kommt die Datenbank von Sloane ins Spiel. Borwein lässt die Folgen mit den registrierten Folgen in der Datenbank vergleichen. Das Ergebnis lautet, dass beide Folgen einer mathematischen Gesetzmäßigkeiten gehorchen: Die Folge i) war der Datenbank als die Eulerschen Zahlen und die Folge ii) als die Tangenskoeffizienten bekannt.

Aus einer überraschenden Beobachtung, ein wenig mathematischer Herumspielerei, einem Schuss Intuition und der Anwendung von Sloanes Datenbank ist, im vorherigen Beispiel, eine mathematische Behauptung aufgestellt worden. Die Fehlerfolge, die sich aus den ersten 5.000.000 Termen der Leibniz-Reihe ergibt, ist die Folge der Eulerzahlen.

11.3 Wie unterscheidet sich die klassische Sichtweise von der experimentelle Sichtweise der Mathematik

Die nächste Frage ist, warum muss diese Behauptung gelten? Gibt es einen Beweis? Tatsächlich findet Borwein mit seinem Team nach längerer Überlegung einen formalen Beweis für die durch ein mathematisches Experiment entstandene Behauptung. Nun festigt sich langsam das Bild der Experimentellen Mathematik. Im letzten Teil möchte im dem Leser klar machen, worin der Unterschied der experimentell-mathematischen und der klassisch-mathematischen Sichtweise liegt.

Die aktuelle Sichtweise der Mathematik geht auf die alten Griechen zurück. Dabei ist es das Ziel der Mathematik, Theoreme zu beweisen. Der Beweis ist der Schiedsrichter zwischen wahr und falsch und zugleich der zentrale Begriff der Mathematik. Man kann in der Mathematik nicht Dinge behaupten oder annehmen, ohne dass diese durch einen Beweis belegt sind. Ein Beweis gilt als gut oder schön, wenn er elegant, also kurz und klar, ist. Die Methode ist die Deduktion, man argumentiert mit logischen Figuren, folgert aus Definitionen oder zuvor bewiesenen Sätzen. Ein Experiment findet hier nicht statt und wird in die Naturwissenschaften verbannt. Die Mathematik ist somit eine Formalwissenschaft. Alles was ein Mathematiker braucht, ist sein Gehirn, ein Stift, ein Blatt Papier und ein Papierkorb. Paul Erdős, der diese Sichtweise propagierte, formulierte sie so: „Ein Mathematiker ist eine Maschine,

die Kaffee in Theoreme umwandelt." Der Mathematiker ist die Maschine, nicht der Computer.

J. BORWEIN kann diese Sichtweise, obwohl er mit ERDŐS befreundet gewesen ist, nie ganz nachvollziehen. Er macht sich früh in seinem Leben mit Computern vertraut und sieht in ihnen ein nützliches Hilfsmittel, um Mathematik zu betreiben. Für ihn bilden der Mathematiker und eine wirkliche Maschine, der Computer, das Zentrum der Mathematik. Auch sein Blick auf die Mathematik unterschiedet sich von der klassischen Sichtweise. Für J. BORWEIN ist die Suche nach Vermutungen genauso wichtig wie der Beweis einer Vermutung. BORWEIN kritisiert, dass das mathematische Endprodukt, der Beweis, komplett im Vordergrund steht und die vielen Stunden der mathematischen Überlegungen, die zu Vermutungen und letztlich zum Beweis führen, in den Hintergrund gedrängt werden. Der Suchprozess wird nur als minderwertiger Vorläufer des Beweises angesehen und in die Notizbücher verbannt. Welcher Mathematiker käme auf die Idee, seine Notizen und Herumspielereien zu veröffentlichen? Erst wenn eine Theorie sauber formuliert, jedes noch so kleine Lemma und Korollar bewiesen ist, wird sie veröffentlicht. Das missfällt BORWEIN. Für ihn ist gerade dieser Suchprozess der eigentliche Reiz, die eigentlich Essenz der Mathematik. Seine Sichtweise bringt ein Zitat von GAUSS auf den Punkt: „Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was [...] Genuss gewährt." BORWEIN ist sich sicher, dass GAUSS heute ein experimenteller Mathematiker im Sinne unserer Definition wäre.

Natürlich unterscheidet sich BORWEINS Methode auch darin, welche Bedeutung dem Experiment zu geschrieben wird. Schon der Name „Experimentelle Mathematik" impliziert die zentrale und tragendende Stellung des Experiments. Es soll ein autonomer Teil der Mathematik sein, das veröffentlich werden und nicht der mathematischen Gesellschaft vorenthalten werden soll. Auch wenn es keinen Beweis für eine Behauptung gibt, soll doch das mathematische Experiment zur Diskussion stehen und eventuell andere Mathematiker zu einem Beweis inspirieren. Laut BORWEIN kann ein mathematisches Experiment Vermutungen kreieren. Darüber hinaus verleiht ein solches mathematisches Experiment einer Behauptung eine Art von erkenntnistheoretischem Wissen. Wenn die Riemannsche Vermutung von einem Computer für mehrere hunderttausend Fälle nachgerechnet und verifiziert worden ist, dann ist das nach BORWEIN ein vernünftiger Grund, dem Computer zu trauen und die Vermutung als wahrscheinlich wahr anzunehmen, auch ohne einen Beweis. Eine mathematische Theorie kann also sehr wohl auf einer nicht formal bewiesenen Behauptung aufbauen, wenn eine Computerberechnung, also unsere Erfahrung, diese stützt. Außerdem glaubt BORWEIN, dass das mathematisches Experiment eine Behauptungen widerlegen oder belegen kann. Dass Experimente widerlegen können ist klar: Findet der Computer ein Gegenbeispiel, ist daran nichts auszusetzen und die Behauptung kann somit nicht gelten. Des Weiteren gibt es bereits Computerbeweise, zum Beispiel für den Vierfarbensatz und die Keplersche Vermutung. Der zweite Beweis ist allerdings schon so komplex, dass es er kaum richtig angesehen worden ist [BD10]. BORWEIN selbst stellt ein kleines, elegantes Beispiel dar, wie eine Computerberechnung, also ein mathematisches Experiment, eine Behauptung belegen kann.

Angenommen in einer Behauptung ist ein ganzzahliger Parameter p gesucht. Der Computer kann berechnen, dass $2{,}5 < p < 3{,}1$ ist, dann ist das für Borwein ein Beweis dafür, dass $p = 3$ (vgl. [BD10]).

Von der Aussage „eine Rechnung ist kein Beweis“ (laut Rainer Nagel) scheint Borwein nichts zu halten. Eine Berechnung eines Computers kann in der Experimentellen Mathematik sehr wohl zu einem Beweis beitragen. Jedoch ist der Beweis nicht Borweins einzige Motivation. Es ist schön, wenn man für eine entdeckte Behauptung einen eleganten Beweis findet. Falls er aber nicht so elegant ist, wie zum Beispiel Hales Computerbeweis, ist das auch kein Beinbruch. Borwein selbst ist da pragmatisch. Er will der Mathematik nicht die Bedeutung des Beweises nehmen, er schwächt diese nur ab, in dem er die Bedeutung des mathematischen Experiments stärkt. Der Beweis bleibt die legitime Motivation eines Mathematikers, aber nicht die einzige.

11.4 Reflexionen

Der Artikel hat in Kürze gezeigt, dass experimentelle Mathematik eine durchaus ernstzunehmende und legitime Methode sei kann, Mathematik zu betreiben. Der Erfolg gibt der Methode Recht. Sie hat, kann und wird mathematische Probleme lösen und das ist eines der primären Ziele der Mathematik. Der Computer wird zukünftig immer mehr Einfluss auf die Mathematik erhalten. Das ist unabwendbar und vernünftig. Dennoch sollte meiner Meinung nach, der Umgang mit dem Computer, das Suchen nach Behauptungen und das Erforschen von Zusammenhängen nicht auf Kosten des sauber formal geführten Beweises gehen. Anders als Borwein glaube ich sehr wohl, dass die Mathematik einem ästhetischen Kriterium unterliegt. Auch Gotfrey Hardy meint: „Schönheit ist das erste Kriterium der Mathematik; es gibt keinen Platz in dieser Welt für hässliche Mathematik“.

So bin ich der Meinung, dass der Sinn der Mathematik darin besteht, eine Aussage so klar, so kurz und so formal wie möglich zu beweisen. Mir selbst liegen Computerbeweise fern, die alles andere als schön und verständlich sind. Ist ein schön geführter Beweis nicht immer auch eine Zeichen dafür, was ein menschliches Gehirn leisten kann? Und ist es nicht schön, wenn ein anderer Mathematiker den Beweis liest, versteht, für sich neue Erkenntnis gewinnt und diese mit seinen eigenen Ideen erweitert? Ich glaube, dass Beweise, die ohne Computer geführt werden, auch in Zukunft die Verständlicheren bleiben werden?

Stellen Sie sich zum Abschluss folgendes Gedankenexperiment vor: Letzte Woche ist ein Beweis der Riemannschen Vermutung veröffentlicht worden, von einem bisher unbekannten Mathematiker. Dieser verwendet im Beweis komplett neue mathematische Werkzeuge, eine eigene Notation und viele eigens bewiesene Sätze. Der Beweis ist eine Sensation. Die besten Mathematiker der Welt schauen sich den Beweis an und versuchen ihn zu verstehen, studieren ihn Jahre. Immer wieder finden sie Fehler in dem Beweis, aber diese sind behebbar – durch den Verfasser selbst oder durch einen anderen Mathematiker. Sie kommen irgendwann zu dem Schluss, dass der Beweis eigentlich richtig sein müsste. Wem glauben Sie mehr, einem Computer, der die Riemannsche Vermutung für Hunderttausende von Fällen verifiziert hat oder dem anscheinend richtigen, formal geführten Beweis?

Literaturverzeichnis

[BB04] BORWEIN, JONATHAN M. und DAVID BAILEY: *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*. AK Peters Natick, MA, 2004.

[BBC+07] BAILEY, DAVID H., JONATHAN BORWEIN, NEIL CALKIN, ROLAND GIRGENSOHN, RUSSELL LUKE und VICTOR MOLL: *Experimental Mathematics in Action*, Band 174. AK Peters Wellesley, 2007.

[BBG04] BORWEIN, JONATHAN, DAVID BAILEY und ROLAND GIRGENSOHN: *Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery*. CRC Press, 2004.

[BD10] BORWEIN, JONATHAN und KEITH DEVLIN: *Experimentelle Mathematik: Eine beispielorientierte Einführung*. Springer, 2010.

[BS11] BORWEIN, JONATHAN und MATTHEW P. SKERRITT: *An Introduction to Modern Mathematical Computing: With MapleTM*. Springer Science & Business Media, 2011.

[MTB16] MONAGHAN, JOHN, LUC TROUCHE und JONATHAN BORWEIN: *Tools and Mathematics*, Band 110. Springer, 2016.

Die Mathematik in der Künstlichen Intelligenz

Arwed Steuer



12.1 Künstliche Intelligenz

Von Künstlicher Intelligenz (KI) spricht man stets im Zusammenhang mit einem autonom agierenden Computerprogramm, einem *Agenten*, welcher vorgegebene Ziele verfolgt. Dieser Agent wird als *rational* bezeichnet, wenn er sich so verhält, dass das beste zu erwartende Ergebnis erzielt wird. Vollständige Rationalität, also perfektes zielgerichtetes Handeln ist nahezu unmöglich, da man meist in Unkenntnis über die Zukunft ist. Intelligenz ist die Fähigkeit eines Agenten, gute Ergebnisse zu erzielen.

Solche Agenten können z.B. Programme sein, welche Autos steuern. Tesla hat bereits 2014 angefangen, autonom fahrende Autos zu entwickeln. Diese konnten zunächst nur ohne Hilfe einparken, aber schon Ende 2017 will Tesla vollautonome Fahrzeuge ausliefern. Das Ziel des Unterfangens ist es, den Straßenverkehr sicherer zu machen, in dem der Mensch als Fehlerquelle umgangen wird.

Ein weiteres, sehr typisches Anwendungsgebiet von Agenten sind Spiele wie Schach, Dame oder Go. Entsprechende Programme beherrschen diese Spiele inzwischen besser als alle Menschen. So wurde 1997 der amtierende Schachweltmeister GARRI KASPAROW von *Deep Blue*, einem Programm von IBM, geschlagen. Das Spiel Dame wurde 2007 komplett gelöst, d.h. es kann keinem Menschen gelingen, gegen den Computer zu gewinnen. Schlussendlich bewies der Computer seine Überlegenheit im Spiel Go im Jahre 2016 als LEE SEDOL, der amtierende Go-Weltmeister, dem Computerprogramm *AlphaGo* unterlag.

Abseits von Straße und Brettspielen findet KI insbesondere im Internet Anwendungen, da die dort anfallenden Datenmengen für keinen Menschen zu überblicken sind. So setzt beispielsweise Google bei dem Spamfilter ihres E-Mail Dienstes auf KI und kann daher rund 99.9% aller Spammails herausfiltern (Stand 2015). Auch andere Internetriesen wie Baidu und Facebook nutzen KI, um etwa die Sprach- und Gesichtserkennung ihrer Programme zu verbessern. Wenn jetzt alle Telefonate und Überwachungskameras so gut nach Mustern durchsucht werden können wie bei Googles Spamfilter, so ist es ein leichtes, die komplette Bevölkerung perfekt zu überwachen.

Doch wie hat das alles seinen Anfang genommen? Zuerst begannen Computerwissenschaftler*innen den Programmen logisches Schließen und syntaktische Manipulation in kleinen Modellwelten, sogenannten Mikrowelten, beizubringen. Damals (1952–1969) wurden Probleme durch einen Suchmechanismus gelöst, der elementare Schritte verknüpfte, um eine Lösung zu erhalten. Die Hoffnung war, dass, wenn das Programm mit einer sehr einfachen Welt klar käme, dann könnten mit mehr Rechenleistung wesentlich kompliziertere Probleme gelöst werden. Leider skalierte die Fähigkeit der Agenten nicht mit der steigenden Rechenleistung.

Daher wurde dieser Ansatz verworfen, und die Forschung konzentrierte sich in den nächsten 10 Jahren auf Wissensbasierte Systeme, die von Expert*innen mit Detailwissen gefüttert wurden. Mit diesem Wissen ausgestattet konnte der Agent dann unterschiedliche, aber sehr spezielle Probleme analysieren und lösen. Ein gutes Beispiel für ein solches Expertensystem ist das Programm *Dendral*, welches aus dem Massenspektrum eines Moleküls seine Strukturformel berechnen kann. Das Problem dieses Ansatzes war die Beschränkung auf ein sehr spezifisches Problem, über das bereits sehr viel bekannt sein muss.

Details und Weiteres zur Geschichte der Künstlichen Intelligenz finden sich in [NR04].

12.2 Maschinelles Lernen

Der Durchbruch der Künstlichen Intelligenz kam mit der Idee, dem Programm nicht mehr die Fähigkeiten von Wissenschaftler*innen beibringen zu wollen, sondern

lediglich die Fähigkeiten eines Kindes, bzw. *die* Fähigkeit eines Kindes: Lernen. So entstand der Bereich des *maschinellen Lernens*.



Stellen wir uns einmal vor, wir sind beauftragt worden, eine schmackhafte Ananas auf dem Markt zu besorgen. Wir haben aber keinerlei Ahnung von Ananas, finden aber im Internet dazu eine Liste, in der verschiedene Ananas-Erfahrungen eingetragen wurden. So wurde stets vermerkt, welche Farbe und welche Konsistenz die Ananas hatte und ob sie schmackhaft war oder nicht. Also müssen wir uns eine Regel ableiten, wie wir von Farbe und Konsistenz, also Eigenschaften, welche wir vor dem Verzehr oder Kauf prüfen können, auf die Schmackhaftigkeit der Ananas schließen können.

Dazu wollen wir uns den Methoden des maschinellen Lernens bedienen. Betrachten wir den Agenten, den wir erschaffen wollen. Dieser erhält als Eingabe eine Menge an Vektoren X, die eine Ananas repräsentieren und aus den beiden Werten Farbe und Konsistenz bestehen. Nun soll jedem dieser Vektoren, also jeder Ananas, eine Bezeichnung, also ob sie schmackhaft ist, zugeordnet werden. Die Menge der möglichen Bezeichnungen sei Y, die in unserem Fall zwei Elemente besitzt. Damit der Agent schmackhaft von nicht schmackhaft unterscheidet, geben wir ihm eine Menge von Beispielen, die *Trainingsmenge*. Sie ist eine Familie $S := ((x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m))$ aus Paaren aus $X \times Y$. Also unsere Liste aus bereits probierten Ananas mit dem Vermerk, welche wie geschmeckt hat. Daraus entwickelt der Agent eine *Hypothese*, also eine Abbildung $h : X \to Y$, die jeder Ananas ihre Schmackhaftigkeit zuordnet.

Werfen wir einen genaueren Blick auf die Welt, in der der Agent sein Dasein fristet. Sie besteht aus einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{D}$ auf X, einer korrekten Zuordnung $f : X \to Y$ und einer Trainingsmenge S, welche generiert wird durch zufälliges Ziehen von $x \in X$ (Ananas) und $f(x)$ (probieren).

Betrachten wir eine für den Agenten intuitive Herangehensweise an das Problem. Dieser will ein möglichst gutes Ergebnis erzielen, also möglichst viele Ananas richtig einordnen. Daraus ergibt sich der *Fehler der Hypothese*, definiert als

$$L_{\mathcal{D},f}(h) := \mathcal{D}(\{x\colon\ h(x) \neq f(x)\}),$$

also die Wahrscheinlichkeit, die Schmackhaftigkeit einer Ananas falsch vorhergesagt zu haben. Dieser soll minimiert werden. Dazu testet er seine Hypothese auf der Trainingsmenge, die ihm zur Verfügung steht, und erhält den *Trainingsfehler*,

$$L_S(h) := \frac{\#\{1 \leq i \leq m\colon\ h(x_i) \neq y_i\}}{m}.$$

Das Finden einer Hypothese h, bei der $L_S(h)$ minimal wird, nennt man *Empirische Risikominimierung*.

Jetzt stellt sich die Frage, wie der Agent auf die vermessene Idee kommen kann, eine Hypothese aufzustellen, welche nicht einmal der Menge an Information, die er bereits hat, gerecht werden kann. Betrachten wir eine naive Hypothese, wie

beispielsweise

$$h_S(x) := \begin{cases} y_i & \text{falls } 1 \leq i \leq m \text{ existiert mit } x_i = x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es werden also alle nicht bereits probierten Ananas als ungenießbar bezeichnet. Diese Hypothese erfüllt zwar $L_S(h_S) = 0$, aber der Fehler der Hypothese ist dennoch $L_D(h_S) = \frac{1}{2}$ unter der Annahme, dass nur die Hälfte aller Ananas schmackhaft ist und es unendlich viele Ananas gibt. Eine Hypothese, die sehr gut auf der Testmenge, aber sehr schlecht auf der Gesamtmenge ist, nennen wir *überangepasst*.

Um eine solche Überanpassung zu vermeiden, erlauben wir dem Agenten, nur bestimme Hypothesen zu betrachten. Diese Menge nennen wir *Hypothesenraum* $\mathcal{H} \subset \{h : X \to Y\}$. Jetzt sucht also der Agent in diesem Hypothesenraum nach einer Hypothese mit einem möglichst geringen Trainingsfehler. Diesen Hypothesenraum wählen wir auf Grund unseres Wissens über die Realität. In unserem Ananasbeispiel, in dem wir jede Ananas als Vektor im $\mathbb{R}^2$ darstellen, ist anzunehmen, dass alle schmackhaften Ananas in einem Intervall $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ sind. Denn unserem Weltverständnis nach ergibt es wenig Sinn, dass eine gelb-grüne Ananas und eine gelb-orange Ananas schmackhaft sind, aber eine gelbe Ananas nicht schmackhaft bei gleicher Konsistenz ist. Unser Weltverständnis ist allerdings höchst vage, unpräzise und von unserem Gehirn verzerrt. Daher nennen wir eine solche Einschränkung des Algorithmus *induktive Verzerrung* und versuchen sie, ebenso wie den Trainingsfehler, möglichst gering zu halten.

Wählen wir den Hypothesenraum so, dass es ein $h^* \in \mathcal{H}$ gibt, sodass $L_{(\mathcal{D},f)}(h^*) = 0$, dann heißt $\mathcal{H}$ realisierbar. Dann definieren wir den *Vertrauensparameter* $1 - \delta$, wobei δ die Wahrscheinlichkeit einer nichtrepräsentativen Testmenge ist. Weiterhin nennen wir ε den maximalen, gerade noch erträglichen Fehler, wobei $L_{D,f}(h) \leq \varepsilon$ dann als Erfolg gilt.

Dann lässt sich mit Hilfe der Stochastik beweisen: Sei H endlich und realisierbar, $\delta \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$, S unsere Trainingsmenge und es sei

$$\#S \geq \frac{\log(\frac{\#H}{\delta})}{\varepsilon}.$$

Dann gilt $L_{D,f}(h_S) \leq \varepsilon$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \delta$, wobei h_S für die Hypothese steht, die wir per empirischer Risikominimierung aus S erhalten.

Haben wir also einen guten Hypothesenraum, so wissen wir, wieviele Ananas wir probieren müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \delta$ eine Hypothese zu erhalten, welche $1 - \varepsilon$ aller Ananas richtig zuordnet.

Der Beweis, sowie mehr zum Ananasbeispiel und eine vollständige Einführung bietet [SSBD14].

12.3 Philosophie und Ethik

Wir haben gesehen, dass Computerprogramme immer besser in Fähigkeiten werden, die wir lange als typisch menschlich betrachtet haben. So stellt sich die Frage,

wie ähnlich uns Maschinen werden können, oder: Können Maschinen denken? Zur Beantwortung haben Computerwissenschaftler*innen und Philosoph*innen zwei Hypothesen aufgestellt. Zuerst die *Schwache KI-Hypothese*, die besagt, dass Maschinen agieren können, als ob sie intelligent wären. Dann die *Starke KI-Hypothese*, welche lautet: Maschinen denken wirklich. Während die erste These allgemein von Programmierer*innen angenommen wird, so wird die zweite von Philosoph*innen stärker debattiert.

Beschäftigen wir uns zuerst mit einem Test, der die schwache KI-Hypothese belegen soll. Bereits Alan Turing überlegte sich ein Testverfahren, welches daraus besteht, ein Computerprogramm eine 5-minütige schriftliche Unterhaltung mit einem Menschen führen zu lassen. Kann das Programm den Menschen in mindestens 30% der Fälle täuschen, so hat das Programm bestanden, und die schwache KI-Hypothese gilt. In den letzten Jahren haben schon zahlreiche Chatbots leichtgläubige Nutzer*innen in diversen Chatrooms und Datingwebsites oder Apps genug getäuscht, um ihnen ihre Kreditkarteninformation oder ähnliche Details zu entlocken. Daher, und unter dem Gesichtspunkt autonom steuernder Autos, kann man von der Schwachen KI-Hypothese überzeugt sein.

Bewegen wir uns also zur starken KI-Hypothese. Dabei müssen wir zuerst feststellen, dass wir keinen direkten Beweis für den internen mentalen Zustand unserer Mitmenschen haben. Dazu sagte Alan Turing [NR04, 1182]: „Anstatt ständig über diesen Aspekt zu streiten, ist es üblich, die höfliche Übereinkunft zu wählen, dass jedermann denkt." Aber ganz so lapidar können wir über diesen Aspekt nicht hinwegschreiten. So gibt es auch Widersacher*innen der starken KI-Hypothese, die das Denken als menschliches Alleinstellungsmerkmal verteidigen wollen. John Searle argumentierte [NR04, 1183]: „Niemand nimmt an, die Computersimulation eines Sturms mache uns alle nass [. . .] warum in aller Welt sollte jemand wirklich annehmen, eine Computersimulation mentaler Prozesse hätte wirklich mentale Prozesse erzeugt." Ob aber ein Taschenrechner, den wir zur Addition bedienen, diese nur simuliert oder tatsächlich ausführt, das muss jeder für sich entscheiden.

Um der Sache auf den Grund zu kommen, stellen wir uns folgende Situation vor: Das Ein- und Ausgabe-Verhalten aller Neuronen, sowie ihre Verbindungen sind verstanden. Es ist möglich, elektronische Bauteile zu produzieren, welche sich exakt wie Neuronen verhalten und einzelne Neuronen lassen sich austauschen, ohne die Arbeit des Gehirns zu unterbrechen. Jetzt ersetzen wir alle Neuronen im Kopf einer Person durch diese Bauteile und beobachten Verhaltensänderungen, von denen es keine geben dürfte, da jedes Neuron wie zuvor arbeitet. John Searle sagte dann voraus, dass die bewusste Erfahrung des Probanden schrumpft, aber das extern beobachtbare Verhalten gleich bleibt [NR04, 1186]. Er kann also auch nichts über diese Erfahrungsreduktion den Versuchsleiter*innen mitteilen.

Das lässt folgende Schlussfolgerung aus dem Gehirnprothesenexperiment zu. Entweder arbeiten die kausalen Mechanismen des Bewusstseins, die in Gehirnen diese Art von Ausgaben erzeugen, auch noch in der elektronischen Form, die deshalb bewusst ist. Oder die bewussten mentalen Ereignisse im Gehirn haben keine kausale Verbindung zum Verhalten, und sie fehlen im elektronischen Gehirn, das deshalb nicht bewusst ist.

Das Zweite würde also bedeuten, dass es vollkommen egal ist, ob ein Wesen

Bewusstsein hat, weil es keinerlei Auswirkungen auf die Realität, beziehungsweise sein Verhalten hat. Da aber der allgemeinen Auffassung nach das Bewusstsein, zumindest der Menschen, durchaus signifikant für unser Handeln ist, lässt sich eigentlich nur schließen, dass eine Maschine, die dem Menschen identisch nachgebaut ist, genauso bewusst ist wie der Mensch an sich.

Für viele Menschen mag es beunruhigend klingen, dieses menschliche Alleinstellungsmerkmal aufzugeben. Daher sollten wir uns fragen, welche Chancen und Risiken bewusste Maschinen mit sich bringen. Beschäftigen wir uns zuerst mit den Risiken, die eine allgemeine Künstliche Intelligenz, also ein nicht spezialisiertes Programm, das alles kann, birgt. Wenn ein Computer wesentlich intelligenter ist als alle Menschen, sollten wir dafür sorgen, dass er uns freundlich gesonnen ist. Wie das gelingen soll, steht allerdings noch in den Sternen, zumal wir nicht einmal wissen, wie wir die Mächtigen, Reichen und durchaus Intelligenten unserer Gesellschaft dazu bringen, der Menschheit gegenüber freundlich gesonnen zu sein und nicht unsere allgemeinen Ressourcen in einem Konsumrausch zu verbraten.

Aber zuforderst müssen wir klären, was passiert, wenn die Kluft zwischen produzierten und benötigten Gütern noch weiter wächst. Schon jetzt produzieren wir genug Nahrung für alle Menschen auf diesem Planeten, dennoch ist Hunger ein riesiges Problem. Wenn durch die durch Maschinen gesteigerte Effizienz in der Produktion auf immer mehr Arbeiter*innen verzichtet werden kann, dann werden diese Arbeitslosen kein Geld mehr haben, um die im Überfluss produzierten Güter zu kaufen. Schon jetzt zeigt sich, dass unser aktuelles Marktsystem die Verteilungsfrage nur sehr unzureichend löst. Dieses Problem wird sich in Zukunft weiter zuspitzen. Daher fordere ich, dass wir unser Verhältnis zu Arbeit und Konsum ändern müssen. Wenn wir wollen, dass alle Menschen glücklich werden können, dann dürfen wir nicht zulassen, dass einige wenige die Arbeitskraft vieler ausbeuten zum Zwecke der privaten Machtvergrößerung. Dieser Planet und unser aller Leben gehört uns, und wir dürfen den öffentlichen Diskurs und die Frage, wie wir leben wollen, nicht denen wenigen überlassen, welche sich nur um sich kümmern. Mischt euch ein und kämpft für ein besseres Leben für uns alle!

Die Zitate und den Überblick über den Streit um die Starke KI-Hypothese findet sich in [NR04].

Literaturverzeichnis

[NR04] NORVIG, PETER und STUART RUSSELL: *Künstliche Intelligenz - ein moderner Ansatz*. Pearson Studium, München, 2. Auflage, 2004.

[SSBD14] SHALEV-SHWARTZ, SHAI und SHAI BEN-DAVID: *Understanding Machine Learning - From Theory to Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Auflage, 2014.

Ist mathematische Wahrheit zeitbedingt?

Henrik Valett, Wiete Keller



13.1 Einleitung

Dem Leitgedanken „Begegnungen von Mathematik und Philosophie“ des Romseminars 2017 folgend, setzten wir uns mit der Frage nach der Zeitabhängigkeit von mathematischer Wahrheit auseinander. Vor der Thematisierung dieser Frage sollte man zunächst Überlegungen darüber anstellen, was man selbst unter mathematischer Wahrheit versteht. Dabei kann man sich im Allgemeinen zwischen den beiden folgenden Grundüberlegungen positionieren. Bei der abstrakteren Überlegung betrachtet man Mathematik als ein von Menschen unabhängiges Konstrukt, welches während der zeitlichen Entwicklung nach und nach entdeckt wird. Demgegenüber steht die Vorstellung, dass Mathematiker mittels ihrer Forschungen mathematische

Wahrheit entwickeln und diese beweisen. Durch diese unterschiedlichen Betrachtungsansätze gestaltet sich die Beantwortung von philosophischen Fragen weniger eindeutig, als es bei mathematischen Problemen üblicherweise der Fall ist. Sich ein von der realen Welt separiertes zeitabhängiges Konstrukt vorzustellen ist nicht einfach, deshalb beschränkten wir uns bei unserem Seminar auf unterschiedliche Standpunkte zum mathematischen Wissen im Laufe der Geschichte. Durch diese Betrachtung zeigten wir an exemplarischen Ereignissen und Entwicklungen eine mögliche Zeitabhängigkeit auf.

13.2 Wandel 18./19. Jahrhundert

Der Einstieg für unser Seminar war ein sehr interessanter Essay der Historikerin JUDITH GRABINER mit dem Titel „Is mathematical truth time-dependent?“ In ihrem Artikel untersucht sie den Wandel der Analysis vom 18. ins 19. Jahrhundert im geschichtlich historischen Kontext. In diesem Wandel sieht die Historikerin eine wissenschaftliche Revolution, welche in der Mathematik oft seltener und weniger spürbar auftreten, als in anderen empirischen Wissenschaften. In diesen mathematischen Revolutionen wird mathematisches Wissen nicht negiert, sondern nur stark abgeändert. Binnen einiger Jahrzehnte verschob sich der Fokus der Mathematiker und sie veränderten viele ihrer vorherigen Beweistechniken. Die Ergebnisse von CAUCHY, L'HÔPITAL und weiteren Mathematikern des 18. Jahrhunderts kennen wir bis heute und sie sind auch heute noch essentiell für unsere mathematischen Grundlagen. Jedoch kommt GRABINER in ihrem Essay zu dem Schluss, dass viele dieser Ergebnisse unentdeckt geblieben wären, wenn diese Mathematiker mit der Genauigkeit der heutigen Beweistechniken hätten arbeiten müssen. Ein Beispiel dafür gibt der hier dargestellte Beweis von EULER zur Reihenentwicklung des Cosinus.

$$(\cos(z) + \mathrm{i} \cdot \sin(z))^n = \cos(nz) + \mathrm{i} \cdot \sin(nz) \tag{13.1}$$

$$\begin{aligned}\cos(nz) = (\cos(z))^n - \frac{n(N-1)}{2!}(\cos(z))^{n-2}(\sin(z))^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(\cos(z))^{n-4}(\sin(z))^4 - \ldots\end{aligned} \tag{13.2}$$

$$\cos(z) = 1,\ \sin(z) = z,\ n(n-1) = n^2,\ n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4, \text{ etc.} \tag{13.3}$$

$$\cos(nz) = 1 - \frac{n^2z^2}{2!} + \frac{n^4z^4}{4!} - \ldots \tag{13.4}$$

$$\cos(\nu) = 1 - \frac{\nu^2}{2!} + \frac{\nu^4}{4!} - \ldots \tag{13.5}$$

Die Annahmen, welche im 3. Schritt getroffen werden, dürfte man heutzutage nicht ohne Begründung treffen und die Schlussfolgerung, dass nz reellwertig ist, weil n gegen unendlich strebt und z gegen 0, wäre nach heutigen Maßstäben in Studium und Forschung der Mathematik nicht mehr ausreichend. Insgesamt lag der Schwerpunkt der Mathematik im 18. Jahrhundert sehr auf der Anwendung von Ergebnissen. Beweise wurden oft ungenau betrieben, weil die Analysis zu dieser Zeit in erster

Linie ein Instrument zur Ergebnisfindung war. Natürlich gab es auch zu dieser Zeit theoretische Forschung, die jedoch die Ausnahme war.

Im 19. Jahrhundert kam es zur Reflexion der im 18. Jahrhundert dokumentierten Erkenntnisse. Es wurde versucht, Ergebnisse zusammenzufassen und diese in mathematische Genauigkeit zu überführen. Im Laufe dieses Prozesses entstanden neue mathematische Verfahren, durch welche viele Techniken zur Approximation für Existenzbeweise genutzt werden konnten.

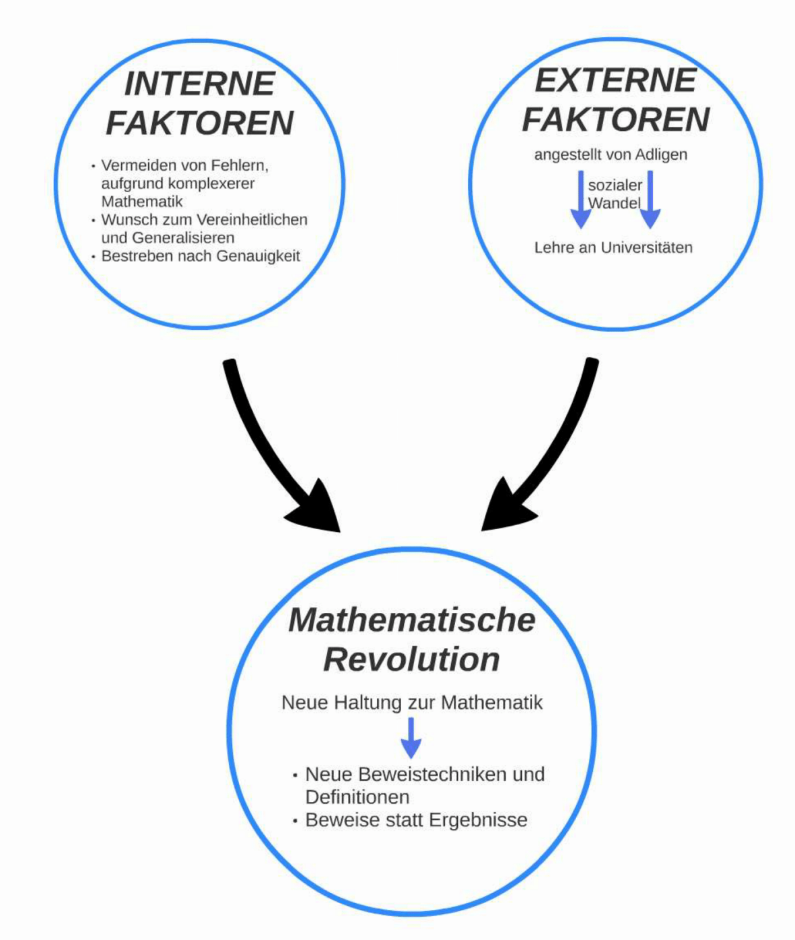


Abbildung 13.1: Gründe für den Wandel

Die Grafik zeigt die Faktoren, die den Umschwung beeinflussten. Auf der einen Seite gibt es die internen Faktoren, welche durch die Zunahme des mathematischen Wissens selbst bedingt sind. Beispiele für interne Faktoren sind das Streben nach Genauigkeit sowie das Generalisieren der Ergebnisse. Zudem wurde die Analysis zum Ende des 18. Jahrhundert deutlich komplexer und die Mathematiker konnten Fehler nicht mehr nur durch ihre Intuition verhindern. Es musste eine gemeinsame Handlungsbasis geschaffen werden.

Auf der anderen Seite gab es externe Faktoren, wie zum Beispiel der soziale Wandel. Die meisten Mathematiker fanden ihre Anstellung zu dieser Zeit an Universitäten. Teil ihrer Tätigkeit wurde dort auch die Vermittlung von mathematischen Wissens. Man benötigte klare Strukturen, da kaum jemand Mathematik lernen konnte, wenn

die Begründung für ein Verfahren durch die experimentelle Anwendung gegeben wurde. Es wurde hinterfragt und reflektiert, warum etwas funktionierte. Das Resultat war eine neue Haltung zur Mathematik, bei der Beweise immer mehr an Bedeutung gewonnen.

Die Vorgehensweise von JUDITH GRABINER empfanden wir als sehr sinnvoll aber uns reichte die Analyse des kurzen geschichtlichen Abschnitts nicht aus. In unserem Seminar beleuchteten wir deshalb eingeschränkt auf die Entwicklung der Analysis im europäischen Raum noch weitere Epochen. Dabei sind uns einige weitere große und wichtige Umbrüche aufgefallen, welche wir in unserem Seminar darstellten.

13.3 Umbrüche in der Geschichte der Mathematik

Antike

Beginnen wollten wir in der Antike, da griechische Gelehrte zu dieser Zeit die Mathematik aus Ägypten und Mesopotamien nach Europa brachten. Diese Mathematik war eine reine Aufgabenkultur, die sich aus geometrischen Konstruktionen und dem Rechnen mit konkreten Zahlenbeispielen aufbaute. Ein Umbruch dieser Zeit war die Entdeckung sogenannter nicht-kommensurabeler Größen durch Gelehrte, die den Pythagoreern angehörten. Diese Anhänger des Gelehrten PYTHAGORAS hatten über Jahre Arithmetisierung des mathematischen Wissens betrieben. Die Entdeckung von nicht-kommensurablen Größen erschwerte dieses vorgehen, da es noch keine sinnvolle Definition für nicht-kommensurablen Größen gab. Die griechische Lösung war die Trennung von diskreten und kontinuierlichen Größen. In der folgenden Zeit legten sie ihren Fokus zurück auf die Abhandlung von geometrischen Problemen, wie zum Beispiel der Schwerpunktberechnung von Flächen, die wie sehr dünne Körper behandelt wurden. Mit der Eroberung der Römer kam die theoretische Forschung zum Stillstand und die Anwendung für Bauprojekte rückte in den Fokus.

Mittelalter

Europa wurde auch in der folgenden Zeit durch territoriale Konflikte geprägt. Das mathematische Wissen wanderte durch die Hände vieler Gelehrter vieler Völker. In Europa ging dabei ziemlich viel Wissen verloren, und zwar in solchem Ausmaß, dass zu Beginn des Mittelalters nur wenige Gelehrte die Forschungen der Griechen kannten. Erst durch die Rückeroberung der iberischen Halbinsel bewirkte eine Umkehr, weil nun Aufzeichnungen der Griechen, Araber und Inder in arabischer Sprache sichergestellt und ins Lateinische übersetzt werden konnten. Nicht nur das verlorene sondern auch neues mathematisches Wissen stand nun Europa zur Verfügung.

Mit der Gründung der ersten Universitäten im Laufe des Mittelalter konnten sich die mathematischen Wissenschaften freier entfalten. Der Klerus hatte keinen Einfluss mehr auf die Ausbildung der weltlichen Gelehrten, die zuvor ebenfalls nur eine Bildung durch die Kirche erfahren hatten. Der Fokus blieb trotz dieser Entwicklung weiterhin auf der anwendungsorientierten Mathematik. Die wenigen geführten Beweise waren noch sehr wortreich in Form von Fließtexten formuliert,

wodurch sie uns heutzutage sehr umständlich erscheinen. Dennoch wurde in dieser Epoche eine wichtige Basis durch die Übersetzung der Antiken Schriften geleistet.

Renaissance

In der Renaissance orientierte sich der mathematische Fortschritt wie in vielen anderen Wissenschaften am antiken Vorbild. Die Schwerpunktberechnung von Flächen der Antike erlangte neue Popularität in Form von Schwerpunktberechnung verschiedener Körper. Die Geometrie rückte wieder in den Fokus vieler Forscher und auch die Beweise wurden wieder sehr geometrisch geführt. Die wichtigste Errungenschaft für die Mathematik war jedoch keine mathematische Entdeckung, sondern die Entwicklung des Buchdruckes, durch den Wissen leichter zugänglich gemacht werden konnte.

Goldenes Zeitalter

Im Goldenen Zeitalter wurden Lösungen für mathematische Aufgabenstellungen in verbaler Sprache weiterentwickelt. Der Mathematiker John Wallis, zu seiner Zeit einer der führenden Mathematiker in Oxford, hat folgende Aufgabe gestellt und gelöst.

> *Ist eine Folge von Größen in arithmetischer Proportion gegeben (oder eine Folge natürlicher Zahlen), startend von irgendeinem Punkt oder 0, also wie 0,1,2,3,4, etc., finde das Verhältnis ihrer Summe zur Summe mit der gleichen Anzahl von Summanden jeweils gleich der größten Zahl.* [Ste04, S. 13]

In heutiger Notation lautet die Aufgabe, die Quotienten

$$\frac{0+1+2+3+\cdots+n}{n+n+n+n+\cdots+n}$$

in Abhängigkeit von n zu berechnen. Wallis löst seine Aufgabe mittels Induktion, diese sah dann so aus:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2+3+4+5+6}{6+6+6+6+6+6+6}=\frac{1}{2}$$

> *Und auf diese Weise, wie weit wir auch immer fortschreiten, wird das Resultat immer 1/2 sein.* [Ste04, S. 14]

Die durchgeführte Induktion hat jedoch noch nicht viel mit der uns heute bekannten formalen vollständigen Induktion gemeinsam. Dies zeigt den Wandel in der Mathematik. Wallis „Gegenspieler“ in Cambridge war Isaac Barrow, der erste geometrische Überlegungen zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechung formuliert hat. Diese Grundlagen hatten großen Einfluss auf weitere Arbeiten im Bereich der Analysis. Mit Newton und Leibniz wurde dann Analysis, wie wir sie heute kennen, entwickelt.

20. Jahrhundert

Da JUDITH GRABINER uns bereits eine detaillierte Analyse aus dem 18. und 19. Jahrhundert liefert, gingen wir im Anschluss direkt zur Entwicklung im 20. Jahrhundert über. Dort konnten sich neue Fachbereiche wie die numerische Mathematik durch den technologischen Fortschrit entwickeln. Eine weitere Folge des technologischen Wettrüstens, der „Sputnikschock", sorgte für eine große Bildungsinitiative zu Gunsten des Mathematik- und Physikunterrichtes, welche in den 1960er/70er Jahren zu einer Schulreform führte. Man versuchte, den Mathematikunterricht auf ein abstrakteres und höheres Niveau zu heben. Die Reform scheiterte allerdings am Widerstand der Bevölkerung und man kehrte wenige Jahre später zum alten System zurück. Der Höhepunkt der Abstraktion im Schulunterricht wurde erreicht. So wurde eine Hinwendung zur angewandten Mathematik, welche immer noch anhält, eingeleitet. Die Mathematik wird zunehmend für die Analyse von globalen Problemen wie Finanzkrisen und Klimaproblemen in Dienst genommen.

Zukünftige Umbrüche

Nachdem wir weitere mathematische Revolutionen der Geschichte darstellten, betrachteten wir zum Abschluss die Frage nach der zukünftigen Entwicklung der Mathematik.

Wir haben in vielen Epochen mathematische Revolutionen feststellen können, bei denen sich die Haltung zur Mathematik geändert hat und bisherige Erkenntnisse neu bewertet wurden. Wir müssen davon ausgehen, dass solche Umbrüche immer wieder stattfinden könnten und unsere heutigen Methoden für nachfolgende Generationen von Mathematikern womöglich nicht mehr die von ihnen verwendeten Notationen und Vorgehensweisen sind.

Wir wissen nicht, wann die nächste Revolution stattfinden wird oder in welche Richtungen die Entwicklungen gehen werden. Eine Zunahme der Bedeutung angewandter Mathematik wäre möglich, denn schon heutzutage werden vermehrt computerbasierte Beweise eingesetzt, welche wie die Analysis im 18. Jahrhundert als Instrument für neue Ergebnisgewinnung genutzt werden. Gleichzeitig wäre auch eine theoretische Revolution möglich, falls der Beweis einer Vermutung gefunden wird, und sich so neue Erkenntnisse für mehrere Bereiche der Mathematik ergeben wurden. SHIN'ICHI MOCHIZUKI könnte womöglich mit seinen Bücher, in welchen er auf eine bisher nicht übliche Art Mathematik betreibt und die seiner Meinung nach den Beweis für die ABC Vermutung enthalten eine solche Revolution einleiten.

Wie sollten wir, als Mathematiker nun mit diesem Wissen Mathematik betreiben? Bezüglich dieser Frage rät JUDITH GRABINER, dass man sich immer seiner Fehler und Möglichkeiten der Gegenwart bewusst sein sollte, um einen fundamentalen Fortschritt erzielen zu können.

Literaturverzeichnis

[Edw79] Edwards, C. H. Jr.: *The Historical Development of the Calculus*. Springer, 1979.

[Gra74] Grabiner, Judith V.: *Is Mathematical Truth Time-Dependent?* American Mathematical Monthly, 1974.

[Kle12] Kleiner, Israel: *Excursions in the History of Mathematics*. Birkhäuser, 2012.

[Pic13] Pickover, Clifford A.: *Das Mathebuch*. Librero, 2013.

[Son16] Sonar, Thomas: *3000 Jahre Analysis*. Springer, 2016.

[Ste04] Stedall, Jacqueline A.: *The arithmetic of infinitesimals: John Wallis 1656*. Springer, 2004.