Fächerverbindender Unterricht – Mathematik und Physik

Thema der Unterrichtsstunde:
Gedämpfter Schwingkreis –Erstellung der zugehörigen Differentialgleichung und Prüfen eines vorgegebenen Lösungsansatzes

Studierende: Nüßgen, Max et al. (SoSe 2015)

Lernziele:

Hauptlernziel:

Schülerinnen und Schüler können anhand des gedämpften Schwingkreises die zugehörige Differentialgleichung aufstellen und einen vorgegebenen Lösungsansatz auf Richtigkeit prüfen.

Teillernziele:

- Schülerinnen und Schüler nutzen ihr physikalisches Vorwissen um die Differentialgleichung des gedämpften Schwingkreises aufzustellen.
- Schülerinnen und Schüler stellen Hypothesen zu einer möglichen Lösung der Differentialgleichung auf.
- Schülerinnen und Schüler werden sicherer im Umgang mit mathematischen Termumformungsschritten, indem sie in Kleingruppen diskutieren.
- Schülerinnen und Schüler erweitern und festigen ihre Präsentationskompetenz, indem sie die Lösungsschritte der Differentialgleichung ihren Mitschülern vorstellen.
- Die SuS sollen den Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen und der Bedeutung für die Bauteile des gedämpften Schwingkreises herstellen können.

Geplanter Stundenverlauf:

Nr./ Zeit [min]	Funktion der einzelnen Phasen	Sachaspekte	SF, Hm	Medien	Didaktisches Kommentar
1. 5 min	Einstieg	Vorstellung der Lehrenden und des Themas. Durchführung des Experiments.	LV, LB	Schon aufgebauter gedämpfter Schwingkreis, Beamer, PC	Die SuS sollen durch die Durchführung des Experiments für die Unterrichtsstunde motiviert werden.
2. 5 min	Erarbeitungsphase	Aufstellung der DGL des gSK über Wiederholung der Funktionsweise der einzelnen elektronischen Bauteile.	gUG, KU	Tafel	An der Tafel werden die Formeln der jeweiligen Bauteile des gSK wiederholt. Es erfolgt zusammen mit den SuS die Aufstellung der DGL. Zudem sollte die DGL kurz charakterisiert werden. Die SuS übertragen das Tafelbild in ihr Heft.

3. 5 min	Sammlung von Hypothesen	Anhand des Funktionsgraphen sollen SuS eine mögliche Funktionsgleichung erkennen oder erraten. Anschließend wird die richtige Lösung von der Lehrperson angeschrieben und erläutert.	gUG, KU	PC, Beamer, Tafel	Anhand ihres mathematischen Vorwissens sollen die SuS erkennen, dass die Lösung der DGL eine Kombination aus einer abfallenden e-Funktion und einer Sinus-Funktion ist.
4. 25 min	Erarbeitungsphase/ Überprüfung der Hypothese	Den SuS wird ein Arbeitsblatt ausgehändigt, mit dem die Lösungsschritte der DGL nachvollzogen werden sollen. Auf einer Klarsichtfolie werden die Termumformungsschritte stichpunktartig von den SuS festgehalten.	GA	AB, vorgedruckte Folie	Zur übersichtlichen Visualisierung wird den SuS ein AB mit vorgegebenen Termumformungen ausgehändigt. Die SuS sollen sich in Kleingruppen beraten, welche mathematischen Umformungen durchgeführt wurden. Diese Überlegungen sollen detailliert und schriftlich beispielhaft von zwei Gruppen auf einer Folie festgehalten werden. Dies dient der Visualisierung beim Vortragen der Ergebnisse.
5. 10 min	Präsentation	Zunächst stellt eine Gruppe seine Ergebnisse auf der Folie am OHP der Klasse vor. Sollte eine andere Gruppe andere Überlegungen zum Lösungsweg haben, darf sie diese ebenfalls vorstellen oder die erste Lösung ergänzen.	SP, KU	OHP	Die Ergebnisse von zunächst einer Gruppe werden im Klassengespräch am OHP vorgestellt. Die vorgestellte Lösung soll noch nicht ins Heft übertragen werden. Falsche Antworten werden besprochen und richtig gestellt (mit einem Rotstift auf der Folie korrigiert). Weitere Lösungen können, je nach verbleibender Zeit vorgestellt werden.
6. 5 min	Sicherung	Die SuS übertragen die richtige Lösung auf ihr AB.	EA	AB	SuS übertragen in dieser Phase die richtige Lösung auf ihre AB, um eine fachsprachliche, detaillierte Begründung in ihren Heften zu haben. Das AB soll abgeheftet oder eingeklebt werden. Sollte nur noch wenig Zeit übrig sein wird das Ausfüllen des ABs als Hausaufgabe aufgegeben.
7. 5 min	Analyse/Sicherung	Die Lösungen für die Dämpfung und die Kreisfrequenz werden in Bezug auf den gSK analysiert.	KU, gUG	Tafel	In dieser Phase soll der Bezug der mathematischen Formeln auf den gSK verdeutlicht werden.

					Dazu werden Merksätze an der Tafel festgehalten und in die Hefte der SuS übertragen. Sollte noch Zeit vorhanden sein kann im gSK ein weiterer Widerstand eingebaut werden, um den Zusammenhang zwischen Widerstand und Dämpfung zu verdeutlichen. Alternativ kann die Induktivität der Spule berechnet werden, indem der Ohm'sche Widerstand des Systems gemessen wird und die von Cassy bestimmte Dämpfung genutzt wird.

Legende:

- SF - Sozialform
- Hm - Handlungsmuster
- LV - Lehrerversuch
- LB - Lehrerbeitrag
- KU - Klassenunterricht
- DGL - Differentialgleichung
- gSK - gedämpfter Schwingkreis
- SuS - Schülerinnen und Schüler
- gUG - gelenktes Unterrichtsgespräch
- SP - Schülerpräsentation
- AB - Arbeitsblatt
- GA - Gruppenarbeit

Hausaufgaben:

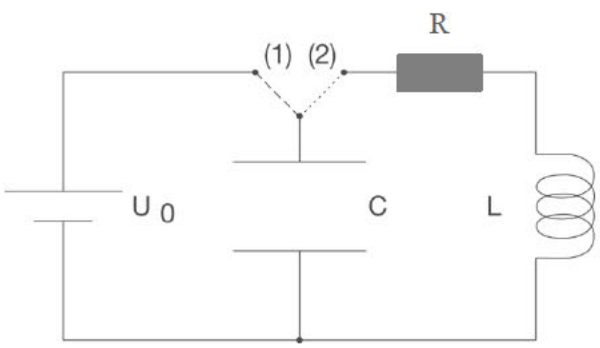
Für $0 = 100 * \dot{Q} + 0{,}004 * \ddot{Q} + \frac{Q}{10^{-6}}$

Soll die Dämpfung k und die (Kreis-)Frequenz ω bzw. f bestimmt werden.

<u>Tafelbild:</u>

1)

(Schon Vorbereitet)
Namen hinschreiben!!!



Ohmsches Gesetz: $\mathbf{U_R(t) = R * I(t)}$
Induktionsgesetz: $\mathbf{U_L(t) = L * \dot{I}(t)}$
Kondensatorgesetz: $\mathbf{U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}}$

In der Reihenschaltung gilt die Maschenregel:

$$\mathbf{U(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t)}$$
$$\mathbf{U(t) = 0}$$

Mit

$$\mathbf{I(t) = Q(\dot{t}) \text{ und } I(\dot{t}) = \ddot{Q}(t)}$$

folgt

$$\mathbf{0 = R * I(t) + L * \dot{I}(t) + \frac{Q(t)}{C}}$$

$$\mathbf{0 = \boxed{R * \dot{Q}(t) + L * Q(\ddot{t}) + \frac{Q(t)}{C}}}$$

homogen, linear, 2. Ordnung

Ist die Differentialgleichung des gedämpften Schwingkreises

2)

Die Lösung der DGL des gedämpften Schwingkreises lautet:

$$\boxed{Q(t) = \hat{Q} * e^{-\delta t} * sin(\omega t)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\delta = \frac{R}{2L}}}$$

Für einen größeren Widerstand folgt eine größere Dämpfung

$$\boxed{\boldsymbol{\omega = \sqrt{-\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}}}$$

Arbeitsblatt zur Lösung der Differentialgleichung des gedämpften Schwingkreises

Trage möglichst detailliert die jeweiligen Rechenoperationen in die leerstehenden Felder ein. Es ist hilfreich, einige Schritte ausführlich nachzurechnen.

Differentialgleichung: $0 = \boldsymbol{L \cdot \ddot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} + R \cdot \dot{Q}(t)}$

Lösungsansatz:

1) $$\boldsymbol{Q(t) = \hat{Q} \cdot e^{-kt} \cdot sin(\omega t)}$$

2) $$\boldsymbol{\dot{Q}(t) = \hat{Q} \cdot e^{-kt} \cdot (-k \cdot sin(\omega t) + \omega \cdot cos(\omega t))}$$

Von 1) zu 2): ______________________________

3) $$\boldsymbol{\ddot{Q}(t) = \hat{Q} \cdot e^{-kt}(k^2 \cdot sin(\omega t) - 2\omega k \cdot cos(\omega t) - \omega^2 \cdot sin(\omega t))}$$

Von 2) zu 3) ______________________________

4) $$\boldsymbol{L \cdot \hat{Q} e^{-kt} \cdot \left(k^2 \cdot sin(\omega t) - 2\omega k \cdot cos(\omega t) - \omega^2 \cdot sin(\omega t)\right) + \frac{\hat{Q}}{C} \cdot e^{-kt} \cdot sin(\omega t)}$$

$$\boldsymbol{+ R \cdot \hat{Q} \cdot e^{-kt}\left(-k \cdot sin(\omega t) + \omega \cdot cos(\omega t)\right) = 0}$$

Von 3) zu 4) ______________________________

____

5) $$\boldsymbol{\left(L \cdot k^2 - L \cdot \omega^2 - R \cdot k + \frac{1}{C}\right) \cdot sin(\omega t) + (R\omega - 2L\omega k) \cdot cos(\omega t) = 0}$$

Von 4) zu 5) ______________________________

6) $$\boldsymbol{R\omega - 2L\omega k = 0 \Rightarrow 2Lk - R = 0 \qquad \Rightarrow k = \frac{R}{2L}}$$

Von 5) zu 6) ______________________________

7) $$\boldsymbol{L \cdot k^2 - L \cdot \omega^2 - R \cdot k + \frac{1}{C} = 0 \quad \Rightarrow \omega^2 = k^2 - \frac{R}{L} \cdot k + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$\boldsymbol{\omega = \pm\sqrt{-\frac{R^2}{4 \cdot L^2} + \frac{1}{L \cdot C}} \qquad \Rightarrow \omega = \sqrt{-\frac{R^2}{4 \cdot L^2} + \frac{1}{L \cdot C}}}$$

Von 6) zu 7) ______________________________

____

____