Rechnungen zur SoFi-Box

Im Folgenden finden Sie die Herleitung und Berechnung zum Abschnitt „Die SoFi-Box – symbolisch" aus dem Artikel „Die SoFi-Box – Ein Modellexperiment zum fächerverbindenden Unterricht von Mathematik und Astronomie" erschienen in Heft 164 der Zeitschrift „Astronomie+Raumfahrt".

Falls Sie Anregungen oder Hinweise zum Artikel oder zur dargestellten Rechnung haben freuen wir uns über Ihre Nachricht an stoffels@mathematik.uni-siegen.de.

Viel Spaß beim Experimentieren mit und Nachdenken über die SoFi-Box!

Eduard Krause, Gero Stoffels & Ingo Witzke

Modell der SoFi-Box in der geometrischen Optik

Für ein Modell der geometrischen Optik der SoFi-Box benötigt man folgende Größen

Maße der Modellsonne	
r_S	Radius der Modellsonne/Halber Abstand beider LEDs
Maße der Modellerde	
d_{ES}	Abstand Modellerde-Modellsonne
$b_{SoFi-Box}$	Breite der SoFi-Box
$h_{SoFi-Box}$	Höhe der Sofi-Box
$d_{L_{12}}$	Abstand Beobachtungsloch 1 und 2
$d_{L_{23}}$	Abstand Beobachtungsloch 2 und 3
Maße des Modellmondes	
r_M	Radius Modellmond
d_{MS}	Abstand Modellmond-Modellsonne

Entsprechend des ikonischen Modells in GeoGebra, soll der Mittelpunkt der Modellsonne (im Folgenden „Sonne") im Ursprung liegen, sowie der Mittelpunkt des Modellmondes (im Folgenden „Mond") und der Sonne auf einer Geraden (in unserem Modell die $y-$ Achse) senkrecht zum Teil der Ebene, der die Modellerde (im Folgenden „Erde") darstellt.
Mithilfe der oben genannten Maße lässt sich nun die SoFi-Box als geometrisch-optisches Modell koordinatisieren. Man geht wie folgt vor.
Die SoFi-Box lässt in der vorgestellten Bauweise zwei Modelle der Sonne zu. Zum einen ein vereinfachtes Modell in dem die Sonne eine Entsprechung in einem LED-Panel (im Versuch mit 20 LEDS) hat und zum anderen eine noch wesentlich einfachere Version in der die Sonne nur durch zwei LEDs repräsentiert wird. Letztere Vereinfachung betrachten wir im Rahmen dieser mathematisch-symbolischen Auseinandersetzung.
Die Leuchtdioden D_1, D_2 werden als Punktquellen im physikalischen Modell gedeutet. Nach der im Modell angegeben Koordinatisierung ergeben sich dann die Koordinaten der Punktlichtquellen als

$$D_1 = \begin{pmatrix} r_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} -r_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Mittelpunkts des Mondes sind gegeben durch

$$M_M = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{MS} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unser Mond wird als Kugel (Sphäre) im $\mathbb{R}^3$ aufgefasst mit Mittelpunkt M_M und Radius r_M.

Die Erde wird durch die Rückwand der SoFi-Box repräsentiert. Entsprechend der Maße und der bereits vorgenommen Koordinatisierung ergibt sich eine Teilebene:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_{SoFi-Box} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{SoFi-Box} \end{pmatrix}; r, s \in [-1,1] \subset \mathbb{R}$$

Die drei Positionen der Beobachtungslöcher ergeben sich aus unserem geometrisch-optischen Modell und den Maßen:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} -d_{L_{12}} \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} -(d_{L_{12}} + d_{L_{23}}) \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Berechnung des Berührpunkts für die Tangenten am Kreis im euklidischen Raum (3D)</u>

Zur Berechnung des Berührpunktes sind nur die Maße, und damit die Koordinatisierung, des Mondes und der Sonne notwendig. Hierbei werden nur Kenntnisse der elementaren Geometrie, aber auch Grundkenntnisse der linearen Algebra, die allerdings nicht über den üblichen Stoff der Sekundarstufe II hinausgehen, verwendet.
Aus dem ikonischen Modell der SoFi-Box ist bekannt, dass zur Beantwortung der Frage

> *Welchen Spielraum hat man, um einen vorgegebenen Modellmond in der SoFi-Box so zu verschieben, dass im ersten Beobachtungsloch eine vollständige Bedeckung, im zweiten Beobachtungsloch eine teilweise Bedeckung und im dritten Beobachtungsloch keine Bedeckung zu beobachten ist?*

eine Betrachtung des Problems in der Ebene, in der D_1, D_2, M_M, L_1, L_2 und L_3 liegen ausreicht. Entsprechend unserer Koordinatisierung ist dies die x-y-Ebene, was leicht daran ablesbar ist, dass die z-Koordinaten der soeben genannten Punkte gleich 0 ist. So ergibt sich leicht durch Weglassen der z-Koordinate ein 2D-Vektor.

Aus der physikalischen Theorie der geometrischen Optik ist bekannt, dass ein Lichtstrahl ausgehend von D_1 nur dann am Mond vorbei geht, wenn er nicht auf die Oberfläche des Mondes trifft, sofern ein nicht transparenter Modellmond verwendet wird. Wird das Problem nun innerhalb der x-y-Ebene betrachtet ergibt der Schnitt dieser Ebene mit dem Mond einen Kreis mit Radius r_M. Ein Schatten fällt also in den Bereich, der von beiden Tangenten durch die Punkte D_1, D_2 am Mond eingeschlossen ist zusammen mit den Tangenten. Eine Tangente hat schließlich nur einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis, was entsprechend der Theorie bedeutet, dass der Lichtstrahl, der tangential zumm Mond ist nicht auf die Erde fällt.

Die Tangenten, die in unserem Modell Strahlen sind, werden bestimmt indem die Berührpunkte X_t auf dem Kreis, der den Mond darstellt, berechnet werden.
Aus der elementaren Geometrie ist bekannt, dass ein Berührpunkt eines Kreises und seiner Tangente dadurch bestimmt ist, dass in diesem Punkt zwischen Tangente und Radius (hier als Strecke gedeutet) ein rechter Winkel besteht [I]. Und da der Berührpunkt zudem auf dem Kreis liegen soll muss für diesen Punkt zusätzlich gelten, dass der Abstand vom Berührpunkt zum Kreismittelpunkt der Radius ist.
In unserem geometrisch-optischen Modell kann man diese Bedingungen folgendermaßen darstellen:

$$\overrightarrow{D_1X_t} \cdot \overrightarrow{M_MX_t} = 0 \text{ [I]}$$

$$|\overrightarrow{M_MX_t}| = r_M \text{ [II]}$$

Die Projektion vom 3D in ein 2D Modell erfolgt durch Weglassung der z-Koordinate der Vektoren, bspw. ergibt sich aus $X_T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ im 2D-Modell $X_t = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Nach Einsetzen ergibt sich entsprechend:

$$\overrightarrow{D_1X_t} \cdot \overrightarrow{M_MX_t} = \begin{pmatrix} x - r_s \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y - d_{MS} \end{pmatrix} = x^2 - r_s x + y^2 - d_{MS} y = 0 \text{ [I]}$$

Die zweite Gleichung lässt sich direkt quadrieren, natürlich müssen die Lösungen dann am Modell geprüft werden:

$$\left(|\overrightarrow{M_MX_t}|\right)^2 = \begin{pmatrix} x \\ y - d_{MS} \end{pmatrix}^2 = x^2 + y^2 - 2d_{MS}y + d_{MS}^2 = r_M^2 \text{ [II]}$$

Subtraktion der I. von der II. Gleichung ergibt:

$$\text{II} - \text{I}: r_S x - d_{MS} y + d_{MS}^2 = r_M^2$$

Diese Gleichung kann nun umgestellt werden, r_S ist in diesem Sachzusammenhang größer 0:

$$x = \frac{d_{MS}}{r_S} y + \frac{r_M^2 - d_{MS}^2}{r_S} \text{ [*]}$$

Setzt man dies nun in Gleichung II ein erhält man eine quadratische Gleichung in y:

$$\left(\frac{d_{MS}}{r_S} y + \frac{r_M^2 - d_{MS}^2}{r_S}\right)^2 + y^2 - 2d_{MS}y + d_{MS}^2 = r_M^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d_{MS}^2}{r_S^2} + 1\right) y^2 + 2 \cdot \left(\left(\frac{d_{MS}}{r_S}\right)\left(\frac{r_M^2 - d_{MS}^2}{r_S}\right) - r_{MS}\right) y + \frac{(r_M^2 - d_{MS}^2)^2 + d_{MS}^2\, r_S^2}{r_S^2} = r_M^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{d_{MS}^2 + r_S^2}{r_S^2} y^2 + 2 \cdot \frac{d_{MS} r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS} r_S^2}{r_S^2} y + \frac{(r_M^2 - d_{MS}^2)^2 + (d_{MS}^2 - r_M^2)\, r_S^2}{r_S^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y \cdot \frac{d_{MS} r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS} r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2} + \frac{(r_M^2 - d_{MS}^2)^2 + (d_{MS}^2 - r_M^2)\, r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2} = 0$$

Bevor man die p-q-Formel anwenden kann muss sollte zunächst geprüft werden ob die Diskriminante $D \geq 0$ ist. Hierbei kann wie oben davon ausgegangen werden, dass alle Konstanten pos. reelle Maßzahlen sind.

$$D = \left(\frac{d_{MS} r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS} r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2}\right)^2 - \frac{(r_M^2 - d_{MS}^2)^2 + (d_{MS}^2 - r_M^2)\, r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2}$$

$$= \left(\frac{d_{MS} r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS} r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2}\right)^2 - \frac{((r_M^2 - d_{MS}^2)^2 + (d_{MS}^2 - r_M^2)\, r_S^2\,) \cdot (d_{MS}^2 + r_S^2)}{(d_{MS}^2 + r_S^2)^2}$$

Der Nenner ist immer größer 0, ansonsten läge die Diode innerhalb des Modellmondes, was im Kontext der SoFi-Box keinen Sinn ergibt. Also reicht es aus den Zähler zu betrachten:

$$\left(d_{MS}r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS}r_S^2\right)^2 - \left(\left(r_M^2 - d_{MS}^2\right)^2 + \left(d_{MS}^2 - r_M^2\right) r_S^2\right) \cdot \left(d_{MS}^2 + r_S^2\right)$$
$$= d_{MS}^2 \cdot \left(r_M^2 - d_{MS}^2 - r_S^2\right)^2 - \left(d_{MS}^2 + r_S^2\right) \cdot \left(r_M^4 - 2r_M^2 d_{MS}^2 + d_{MS}^4 + d_{MS}^2 r_S^2 - r_M^2 r_S^2\right)$$
$$= d_{MS}^2 r_M^4 + d_{MS}^6 + d_{MS}^2 r_S^4 - 2d_{MS}^4 r_M^2 + 2d_{MS}^4 r_S^2 - 2d_{MS}^2 r_M^2 r_S^2 - d_{MS}^2 r_M^4 + 2r_M^2 d_{MS}^4 - d_{MS}^6 - d_{MS}^4 r_S^2$$
$$+ d_{MS}^2 r_M^2 r_S^2 - r_M^4 r_S^2 + 2r_M^2 d_{MS}^2 r_S^2 - d_{MS}^4 r_S^2 - d_{MS}^2 r_S^4 + r_M^2 r_S^4$$
$$= r_M^2 r_S^2 d_{MS}^2 - r_M^4 r_S^2 + r_M^2 r_S^4 = r_M^2 r_S^2 \left(d_{MS}^2 - r_M^2 + r_S^2\right)$$

Nach Umformung ist zu erkennen, dass die Diskriminante genau dann größer 0 ist, wenn der Radius des Mondes nicht größer ist als die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen entsprechend dem Abstand Mond-Sonne und dem Radius der Sonne. Insbesondere müsste dann der Radius größer sein als der Abstand vom Mond zur Sonne. Dies ist in der SoFi-Box nicht möglich, da dann der Mond bis hinter das LED-Panel reichen müsste.

Mit dem Wissen, dass sich sinnvolle Lösungen ergeben kann nun bspw. die p-q-Formel verwendet werden. Daraus ergeben sich zwei Lösungen für y:

$$y_1 = -\frac{d_{MS}r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS}r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2} + \sqrt{\left(\frac{d_{MS}r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS}r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2}\right)^2 - \frac{\left(r_M^2 - d_{MS}^2\right)^2 + \left(d_{MS}^2 - r_M^2\right) r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2}}$$
$$y_2 = -\frac{d_{MS}r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS}r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2} - \sqrt{\left(\frac{d_{MS}r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS}r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2}\right)^2 - \frac{\left(r_M^2 - d_{MS}^2\right)^2 + \left(d_{MS}^2 - r_M^2\right) r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2}}$$

Es ergeben sich, wie bereits diskutiert im Falle der SoFi-Box, für die als reales Objekt immer die Ungleichung $d_{MS}^2 + r_S^2 > r_M^2$ gilt, immer zwei Lösungen. Die x-Werte ergeben sich nach Einsetzen von y_1, y_2 in [*]. Dies ist hier nicht dargestellt. Zusammen ergeben sich die gesuchten Berührpunkte durch:

$$X_{T_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^2, \text{bzw.} X_{T_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^3, \text{wobei } X_{T_1} \text{ in der } x_1 - x_2 - \text{Ebene liegt.}$$
$$X_{T_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^2, \text{bzw.} X_{T_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^3, \text{wobei } X_{T_2} \text{ in der } x_1 - x_2 - \text{Ebene liegt.}$$

Die Lichtstrahlen, die Tangential zum Mond sind und in der $x - y$ –Ebene liegen ergeben sich zu:

$$l_{D_1 X_{T_1}}: \vec{x} = D_1 + t \cdot \left(X_{T_1} - D_1\right); t \in \mathbb{R}_0^+$$
$$l_{D_1 X_{T_2}}: \vec{x} = D_1 + s \cdot \left(X_{T_2} - D_1\right); s \in \mathbb{R}_0^+$$

Analog lassen sich nun auch die entsprechenden Lichtstrahlen, die von Diode D_2 ausgehen bestimmen. Einsetzen der Koordinate D_2 in Gleichung [$*$] ergibt:

$$-x = \frac{d_{MS}}{r_S} y + \frac{r_M^2 - d_{MS}^2}{r_S} \quad [*']$$

Der Unterschied zur Gleichung [$*$] ist demzufolge das Minuszeichen vor dem x in der obiger Gleichung. Also gilt für die Berührpunkte, ausgehend von den Lichtstrahlen aus D_2:

$$X'_{T_1} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^2, \text{bzw.} X'_{T_1} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^3, \text{wobei } X'_{T_1} \text{ in der } x - y - \text{Ebene liegt.}$$

$$X'_{T_2} = \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{im } \mathbb{R}^2, \text{bzw.} X'_{T_2} = \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{im } \mathbb{R}^3, \text{wobei } X'_{T_2} \text{ dann in der } x-y- \text{Ebene liegt.}$$

Die Lichtstrahlen, die Tangential zum Mond sind und in der $x-y-$Ebene liegen ergeben sich nun zu:

$$l_{D_2X'_{T_1}}: \vec{x} = D_2 + t' \cdot (X_{T_2} - D_2); t' \in \mathbb{R}_0^+$$
$$l_{D_2X'_{T_2}}: \vec{x} = D_2 + s' \cdot (X'_{T_2} - D_2); s' \in \mathbb{R}_0^+$$

<u>Berechnung der Schattenbereiche bezüglich der Beobachtungslöcher auf der Modellerde</u>

Um nun die eigentliche Frage bzgl. der Schattenbereiche in denen die Beobachtungslöcher liegen zu klären ist es notwendig die Schnittpunkte der Lichtstrahlen mit der Teilebene zu bestimmen. Dies gestaltet sich relativ einfach, da es sich dabei um die Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS) handelt, bei dem ein Parameter bestimmt werden soll.

Der Schnittpunkt von $l_{D_1X_{T_1}}$und E ergibt sich, indem folgendes LGS gelöst wird:

$$\begin{pmatrix} x_{SP_1} \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix} = D_1 + s \cdot (X_{T_1} - D_1); s \in \mathbb{R}_0^+$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{SP_1} \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} x_1 - r_S \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}_0^+$$

Der Parameter s ergibt sich aus der zweiten Gleichung zu

$$s = \frac{d_{ES}}{y_1}$$

$$s = -\frac{d_{ES}}{\frac{d_{MS}r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS}r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2} - \sqrt{\left(\frac{d_{MS}r_M^2 - d_{MS}^3 - d_{MS}r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2}\right)^2 - \frac{(r_M^2 - d_{MS}^2)^2 + (d_{MS}^2 - r_M^2)\, r_S^2}{d_{MS}^2 + r_S^2}}} \; [**]$$

Dieser kann in die obere Gleichung eingesetzt werden umso auch den Wert für x_{SP} zu erhalten. Entsprechend können die übrigen drei Lichtstrahlen $l_{D_1X_{T_2}}, l_{D_2X'_{T_1}}, l_{D_2X'_{T_2}}$ bestimmt werden. Es ergeben sich so insgesamt vier $x-$Koordinaten der Schnittpunkte $x_{SP_1}, x_{SP_2}, x'_{SP_1}, x'_{SP_2}$. Die Schattenräume sind mit diesem Ergebnis und den Koordinaten der Erde folgendermaßen gegeben:

$$\sigma_{D_1} \text{Schattenraum von Diode } D_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_{SP_1} \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} x_{SP_2} - x_{SP_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; k \in [0,1]$$
$$\sigma_{D_2} \text{Schattenraum von Diode } D_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} x'_{SP_1} \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} x'_{SP_2} - x'_{SP_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; k \in [0,1]$$

Wenn man nun die Schattenräume mithilfe der bekannten Mengenoperationen verknüpft erhält man natürlicherweise die entsprechenden Bereiche des Kern und Halbschattens:

Der Bereich des Kernschattens ist gegeben durch: $\sigma_{D_1} \cap \sigma_{D_2}$

Der Bereich des Halbschattens ist gegeben durch: $(\sigma_{D_1} \cup \sigma_{D_2})/(\sigma_{D_1} \cap \sigma_{D_2})$

Der von beiden Dioden beleuchtete Bereich ist gegeben durch: $(\sigma_{D_1} \cup \sigma_{D_2})^c$

Nun kann anhand der Koordinaten der Beobachtungslöcher geprüft werden ob und in welchem Schattenraum diese liegen. Im Folgenden soll dies an einem Beispiel gezeigt werden.

<u>Beispielrechnung mithilfe der Daten des Prototyps der SoFi-Box</u>

Eine Übersicht der gemessenen Maße ist in folgender Tabelle gegeben, wobei $d_{MS} \in [r_M, d_{ES} - r_M]$ der Parameter sein soll, von dem später die Bereiche der Schatten abhängen.

Maße der Modellsonne	
r_S	2,0 cm
Maße der Modellerde	
d_{ES}	31,4 cm
$b_{SoFi-Box}$	27,0 cm
$h_{SoFi-Box}$	16,5 cm
$d_{L_{12}}$	3,0 cm
$d_{L_{23}}$	5,0 cm
Maße des Modellmondes	
r_M	3 cm
d_{MS}	Abstand Modellmond-Modellsonne (Parameter)

Die Koordinaten der Beobachtungslöcher ergeben sich anhand dieser Maße (Die Einheiten werden hier zur besseren Übersichtlichkeit weg gelassen. Es handelt sich bei allen Angaben um cm, bzw. cm^2) zu:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 31{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 31{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} -(3+5) \\ 31{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 31{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Position der Dioden ergeben sich entsprechend der Maße zu:

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Der Schnittpunkt von $l_{D_1 X_{T_1}}$ und E ergibt sich, aus der Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{pmatrix} x_{SP_1} \\ 31{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} x_1 - r_S \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}_0^+$$

Für den Parameter s ergibt sich aus obiger Gleichung:

$$s = \frac{31{,}4}{y_1}$$

$$s = -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} - \sqrt{\left(\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4}\right)^2 - \frac{(9 - d_{MS}^2)^2 + (d_{MS}^2 - 9)4}{d_{MS}^2 + 4}}}$$

$$= -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} - \sqrt{\left(\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4}\right)^2 - \frac{81 - 18d_{MS}^2 + d_{MS}^4 + 4d_{MS}^2 - 36}{d_{MS}^2 + 4}}}$$

$$= -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} - \sqrt{\left(\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4}\right)^2 - \frac{d_{MS}^4 - 14d_{MS}^2 + 45}{d_{MS}^2 + 4}}}$$

$$= -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} - \sqrt{\frac{25d_{MS}^2 - 10d_{MS}^4 + d_{MS}^6 - d_{MS}^6 + 14d_{MS}^4 - 45d_{MS}^2 - 4d_{MS}^4 + 56d_{MS}^2 - 180}{(d_{MS}^2 + 4)^2}}}$$

$$= -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} - \sqrt{\frac{36d_{MS}^2 - 180}{(d_{MS}^2 + 4)^2}}} = -\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}$$

Aus Gleichung [$*$] ist bekannt, dass

$$x_1 = \frac{d_{MS}}{2} y_1 + \frac{9 - d_{MS}^2}{2} \; [*]$$

Dieser Wert kann nun in das Gleichungssystem für die Schnittpunkte eingesetzt werden. Es ergibt sich so ein Wert für x_{SP_1}.

$$x_{SP_1} = 2 + \frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}}{2} y_1 + \frac{9 - d_{MS}^2}{2} - 2\right)$$

$$x_{SP_1} = 2 + \frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}}{2} \cdot \frac{d_{MS}^2 + 4}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} + \frac{9 - d_{MS}^2}{2} - 2\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}^3 + 4d_{MS}}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} + 9 - d_{MS}^2 - 4\right)\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}^3 + 4d_{MS}}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} + 5 - d_{MS}^2\right)\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}^3 + 4d_{MS} + 25d_{MS} - 5d_{MS}^3 - 30\sqrt{d_{MS}^2 - 5} - 5d_{MS}^3 + d_{MS}^4 + 6d_{MS}^2\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}\right)\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}^4 - 9d_{MS}^3 + 29d_{MS} + (6d_{MS}^2 - 30)\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}\right)\right)$$

$$= 2 + \frac{31{,}4}{2}\left(\frac{d_{MS}^6 - 9d_{MS}^5 + 29d_{MS}^3 + \left(6d_{MS}^4 - 30d_{MS}^2\right)\sqrt{d_{MS}^2 - 5} + 4d_{MS}^4 - 36d_{MS}^3 + 116d_{MS} + (24d_{MS}^2 - 120)\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{\left(5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}\right)^2}\right)$$

$$= 2 + \frac{31{,}4}{2}\left(\frac{d_{MS}^6 - 9d_{MS}^5 + 4d_{MS}^4 - 7d_{MS}^3 + 116d_{MS} + (6d_{MS}^4 - 6d_{MS}^2 - 120)\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{\left(5d_{MS} - d_{MS}^3 - 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{15{,}7 \cdot \left(d_{MS}^6 - 9\,d_{MS}^5 + 4\,d_{MS}^4 - 7\,d_{MS}^3 + \sqrt{d_{MS}^2 - 5}\;\;(6\,d_{MS}^4 - 6\,d_{MS}^2 - 120) + 116\,d_{MS}\right)}{\left(-d_{MS}^3 - 6\,\sqrt{d_{MS}^2 - 5} + 5\,d_{MS}\right)^2} + 2$$

Entsprechendes Vorgehen bei den übrigen drei Lichtstrahlen $l_{D_1X_{T_2}}, l_{D_2X'_{T_1}}, l_{D_2X'_{T_2}}$ ergibt insgesamt vier x −Koordinaten der Schnittpunkte $x_{SP_1}, x_{SP_2}, x'_{SP_1}, x'_{SP_2}$.

Der Schnittpunkt von $l_{D_1X_{T_2}}$ und E ergibt sich, indem folgendes LGS gelöst wird:

$$\begin{pmatrix} x'_{SP_1} \\ 31{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s' \cdot \begin{pmatrix} x_1 - r_S \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}; s' \in \mathbb{R}_0^+$$

Für den Parameter s' ergibt sich aus der obigen Gleichung:

$$s = \frac{31{,}4}{y_2}$$

$$s = -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} + \sqrt{\left(\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4}\right)^2 - \frac{(9 - d_{MS}^2)^2 + (d_{MS}^2 - 9)4}{d_{MS}^2 + 4}}}$$

$$= -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} + \sqrt{\left(\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4}\right)^2 - \frac{81 - 18d_{MS}^2 + d_{MS}^4 + 4d_{MS}^2 - 36}{d_{MS}^2 + 4}}}$$

$$= -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} + \sqrt{\left(\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4}\right)^2 - \frac{d_{MS}^4 - 14d_{MS}^2 + 45}{d_{MS}^2 + 4}}}$$

$$= -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} + \sqrt{\frac{25d_{MS}^2 - 10d_{MS}^4 + d_{MS}^6 - d_{MS}^6 + 14d_{MS}^4 - 45d_{MS}^2 - 4d_{MS}^4 + 56d_{MS}^2 - 180}{(d_{MS}^2 + 4)^2}}}$$

$$= -\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS} - d_{MS}^3}{d_{MS}^2 + 4} + \sqrt{\frac{36d_{MS}^2 - 180}{(d_{MS}^2 + 4)^2}}} = -\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}$$

Aus Gleichung [∗] ist bekannt:

$$x_2 = \frac{d_{MS}}{2} y_2 + \frac{9 - d_{MS}^2}{2} \; [*]$$

Dieser Wert kann in das Gleichungssystem für die Schnittpunkte eingesetzt werden. Es ergibt sich so der Wert für x_{SP_2}.

$$x_{SP_2} = 2 + \frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot (\frac{d_{MS}}{2} y_2 + \frac{9 - d_{MS}^2}{2} - 2)$$

$$x_{SP_1} = 2 + \frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}}{2} \cdot \frac{d_{MS}^2 + 4}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} + \frac{9 - d_{MS}^2}{2} - 2 \right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}^3 + 4d_{MS}}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} + 9 - d_{MS}^2 - 4 \right)\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}^3 + 4d_{MS}}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} + 5 - d_{MS}^2 \right)\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}^3 + 4d_{MS} + 25d_{MS} - 5d_{MS}^3 + 30\sqrt{d_{MS}^2 - 5} - 5d_{MS}^3 + d_{MS}^4 - 6d_{MS}^2\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \right)\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}^4 - 9d_{MS}^3 + 29d_{MS} - (6d_{MS}^2 - 30)\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \right)\right)$$

$$= 2 + \frac{31{,}4}{2}\left(\frac{d_{MS}^6 - 9d_{MS}^5 + 29d_{MS}^3 - (6d_{MS}^4 - 30d_{MS}^2)\sqrt{d_{MS}^2 - 5} + 4d_{MS}^4 - 36d_{MS}^3 + 116d_{MS} - (24d_{MS}^2 - 120)\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{\left(5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}\right)^2} \right)$$

$$= 2 + \frac{31{,}4}{2}\left(\frac{d_{MS}^6 - 9d_{MS}^5 + 4d_{MS}^4 - 7d_{MS}^3 + 116d_{MS} - (6d_{MS}^4 - 6d_{MS}^2 - 120)\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{\left(5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}\right)^2} \right)$$

$$= \frac{15{,}7 \cdot \left(d_{MS}^6 - 9\, d_{MS}^5 + 4\, d_{MS}^4 - 7\, d_{MS}^3 - \sqrt{d_{MS}^2 - 5}\;\; (6\, d_{MS}^4 - 6\, d_{MS}^2 - 120) + 116\, d_{MS} \right)}{\left(-d_{MS}^3 + 6\,\sqrt{d_{MS}^2 - 5} + 5\, d_{MS} \right)^2} + 2$$

Der Schnittpunkt von $l_{D_2 X'_{T_1}}$ und E ergibt sich, indem folgendes LGS gelöst wird:

$$\begin{pmatrix} x_{SP_1} \\ 31{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} x_2 - r_S \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}_0^+$$

Für den Parameter s ergibt sich aus obiger Gleichung:

$$s = \frac{31{,}4}{y_2}$$

$$s=-\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS}-d_{MS}^3}{d_{MS}^2+4}+\sqrt{\left(\frac{5d_{MS}-d_{MS}^3}{d_{MS}^2+4}\right)^2-\frac{(9-d_{MS}^2)^2+(d_{MS}^2-9)4}{d_{MS}^2+4}}}$$

$$=-\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS}-d_{MS}^3}{d_{MS}^2+4}+\sqrt{\left(\frac{5d_{MS}-d_{MS}^3}{d_{MS}^2+4}\right)^2-\frac{81-18d_{MS}^2+d_{MS}^4+4d_{MS}^2-36}{d_{MS}^2+4}}}$$

$$=-\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS}-d_{MS}^3}{d_{MS}^2+4}+\sqrt{\left(\frac{5d_{MS}-d_{MS}^3}{d_{MS}^2+4}\right)^2-\frac{d_{MS}^4-14d_{MS}^2+45}{d_{MS}^2+4}}}$$

$$=-\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS}-d_{MS}^3}{d_{MS}^2+4}+\sqrt{\frac{25d_{MS}^2-10d_{MS}^4+d_{MS}^6-d_{MS}^6+14d_{MS}^4-45d_{MS}^2-4d_{MS}^4+56d_{MS}^2-180}{(d_{MS}^2+4)^2}}}$$

$$=-\frac{31{,}4}{\frac{5d_{MS}-d_{MS}^3}{d_{MS}^2+4}+\sqrt{\frac{36d_{MS}^2-180}{(d_{MS}^2+4)^2}}}=-\frac{31{,}4\cdot(d_{MS}^2+4)}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}$$

Aus der Gleichung [∗] ist bekannt:

$$x_2=\frac{d_{MS}}{2}y_2+\frac{9-d_{MS}^2}{2}\ [*]$$

Dieser Wert kann in das Gleichungssystem für die Schnittpunkte eingesetzt werden und es ergibt den Wert für x_{SP_2}.

$$x_{SP_2}=2+\frac{31{,}4\cdot(d_{MS}^2+4)}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}\cdot(\frac{d_{MS}}{2}y_2+\frac{9-d_{MS}^2}{2}-2)$$

$$x_{SP_1}=2+\frac{31{,}4\cdot(d_{MS}^2+4)}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}\cdot\left(\frac{d_{MS}}{2}\cdot\frac{d_{MS}^2+4}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}+\frac{9-d_{MS}^2}{2}-2\right)$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4\cdot(d_{MS}^2+4)}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}\cdot\left(\frac{d_{MS}^3+4d_{MS}}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}+9-d_{MS}^2-4\right)\right)$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4\cdot(d_{MS}^2+4)}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}\cdot\left(\frac{d_{MS}^3+4d_{MS}}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}+5-d_{MS}^2\right)\right)$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4\cdot(d_{MS}^2+4)}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}\cdot\left(\frac{d_{MS}^3+4d_{MS}+25d_{MS}-5d_{MS}^3+30\sqrt{d_{MS}^2-5}-5d_{MS}^3+d_{MS}^4-6d_{MS}^2\sqrt{d_{MS}^2-5}}{5d_{MS}-d_{MS}^3+6\sqrt{d_{MS}^2-5}}\right)\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{31{,}4 \cdot (d_{MS}^2 + 4)}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}} \cdot \left(\frac{d_{MS}^4 - 9d_{MS}^3 + 29d_{MS} - (6d_{MS}^2 - 30)\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}\right)\right)$$

$$= 2 + \frac{31{,}4}{2}\left(\frac{d_{MS}^6 - 9d_{MS}^5 + 29d_{MS}^3 - \left(6d_{MS}^4 - 30d_{MS}^2\right)\sqrt{d_{MS}^2 - 5} + 4d_{MS}^4 - 36d_{MS}^3 + 116d_{MS} - (24d_{MS}^2 - 120)\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{\left(5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}\right)^2}\right)$$

$$= 2 + \frac{31{,}4}{2}\left(\frac{d_{MS}^6 - 9d_{MS}^5 + 4d_{MS}^4 - 7d_{MS}^3 + 116d_{MS} - (6d_{MS}^4 - 6d_{MS}^2 - 120)\sqrt{d_{MS}^2 - 5}}{\left(5d_{MS} - d_{MS}^3 + 6\sqrt{d_{MS}^2 - 5}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{15{,}7 \cdot \left(d_{MS}^6 - 9\,d_{MS}^5 + 4\,d_{MS}^4 - 7\,d_{MS}^3 - \sqrt{d_{MS}^2 - 5}\;\;(6\,d_{MS}^4 - 6\,d_{MS}^2 - 120) + 116\,d_{MS}\right)}{\left(-d_{MS}^3 + 6\,\sqrt{d_{MS}^2 - 5} + 5\,d_{MS}\right)^2} + 2$$

Die Schattenräume sind mit diesen Ergebnissen und den Koordinaten der Erde folgendermaßen gegeben:

$$\sigma_{D_1}\text{Schattenraum von Diode } D_1\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_{SP_1} \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} x_{SP_2} - x_{SP_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; k \in [0,1]$$

$$\sigma_{D_2}\text{Schattenraum von Diode } D_2\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x'_{SP_1} \\ d_{ES} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} x'_{SP_2} - x'_{SP_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; k \in [0,1]$$

Wenn die Schattenräume mithilfe der bekannten Mengenoperationen verknüpft werden ergeb sich auf ganz natürliche Weise die entsprechenden Bereiche des Kern und Halbschattens:

Der Bereich des Kernschattens ist gegeben durch: $\sigma_{D_1} \cap \sigma_{D_2}$

Der Bereich des Halbschattens ist gegeben durch: $(\sigma_{D_1} \cup \sigma_{D_2})/(\sigma_{D_1} \cap \sigma_{D_2})$

Der von beiden Dioden beleuchtete Bereich ist gegeben durch: $\left(\sigma_{D_1} \cup \sigma_{D_2}\right)^c$

Nun kann anhand der Koordinaten der Beobachtungslöcher geprüft werden, ob und welchem Schattenraum diese liegen.