Willkommen zur Vorlesung Statistik

Thema dieser Vorlesung: Varianzanalyse

Prof. Dr. Wolfgang Ludwig-Mayerhofer

Universität Siegen – Philosophische Fakultät, Seminar für Sozialwissenschaften

Die Varianzanalyse

- Fragestellung und Grundidee
- Ein Beispiel
- Das Zusammenhangsmaß η^2
- Der F-Test
- Abschließendes

Varianzanalyse

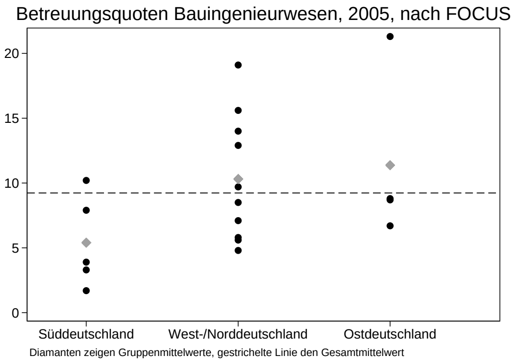
In der Kreuztabellenanalyse haben wir ein Merkmal mit (relativ) wenigen Ausprägungen durch ein anderes Merkmal (ebenfalls mit wenigen Ausprägungen) zu „erklären“ versucht.

Zu diesem Zweck haben wir die bedingten Anteilswerte verglichen – z. B. den Anteil der Hauptschüler unter der Bedingung, dass man aus einer Arbeiterfamilie stammt, mit dem Anteil der Hauptschüler unter der Bedingung, dass man aus einer Angestelltenfamilie stammt.

Ist die abhängige Variable (das Merkmal, das erklärt werden soll) metrisch, die unabhängige Variable dagegen nominalskaliert (oder ordinalskaliert mit wenigen Gruppen), so werden statt dessen die bedingten Mittelwerte, die Gruppenmittelwerte, verglichen.

Veranschaulichung

Daten zu Universitäten in drei deutschen Regionen (siehe Datenblatt erste Woche, hier aber anderes Fach):



Achtung – Daten dienen nur der Illustration, Gültigkeit ist fraglich!

Die Grundidee der Varianzanalyse verbal

Die Unterschiedlichkeit (Varianz) der Datenwerte kann in zwei Teile „zerlegt“ werden:

- Die Unterschiedlichkeit, die auf die Gruppenzugehörigkeit zurückgeht, ausgedrückt in den Abweichungen der Gruppenmittelwerte $\bar{y}_i$ vom Gesamtmittelwert $\bar{y}$.
- Die Unterschiedlichkeit, die nicht auf die Gruppenzugehörigkeit zurückgeht, ausgedrückt in den Abweichungen der individuellen Messwerte vom jeweiligen Gruppenmittelwert.

Varianzanalyse – die Grundidee formal

- Gegeben sind i, i = 1...r Gruppen
- In jeder Gruppe werden Daten von j, j = 1...m Personen erhoben (d. h., pro Gruppe gleich viele Personen – wichtige Vereinfachung, die bei experimentellen Studien oft befolgt wird).
- Die Summe aller quadrierten Abweichungen vom Mittelwert („Quadratsumme“, QS) lässt sich zerlegen in

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}-\bar{y})^2 = m\sum_{i=1}^{r}(\bar{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$$

oder: $QS_{\text{total}} = QS_{\text{zwischen}} + QS_{\text{innerhalb}}$

Varianzanalyse: ein Beispiel

Eine Miniversion der Daten könnte so aussehen:

	Süd	W/N	Ost
	4	11	18
	7	14	19
	7	20	26
Mittelwerte	6	15	21

Mittelwert über alle ($\bar{y}$): 14

Beispiel, Schritt I

Die gesamte Quadratsumme (QS_{total}) muss nicht unbedingt berechnet werden, doch kann dies zur Kontrolle zweckmäßig sein:

Süd	West/Nord	Ost
$(4-14)^2 = 100$	$(11-14)^2 = 9$	$(18-14)^2 = 16$
$(7-14)^2 = 49$	$(14-14)^2 = 0$	$(19-14)^2 = 25$
$(7-14)^2 = 49$	$(20-14)^2 = 36$	$(26-14)^2 = 144$

$QS_{\text{total}} = 428$

Beispiel, Schritt II

Abweichungen der Einzelwerte vom Gruppenmittelwert:

Süd	West/Nord	Ost
$(4-6)^2 = 4$	$(11-15)^2 = 16$	$(18-21)^2 = 9$
$(7-6)^2 = 1$	$(14-15)^2 = 1$	$(19-21)^2 = 4$
$(7-6)^2 = 1$	$(20-15)^2 = 25$	$(26-21)^2 = 25$

$QS_{\text{innerhalb}} = 86$

Beispiel, Schritt III

Abweichungen der Gruppenmittelwerte vom Gesamtmittelwert:

Süd	West/Nord	Ost
$(6-14)^2 = 64$	$(15-14)^2 = 1$	$(21-14)^2 = 49$
$(6-14)^2 = 64$	$(15-14)^2 = 1$	$(21-14)^2 = 49$
$(6-14)^2 = 64$	$(15-14)^2 = 1$	$(21-14)^2 = 49$

$QS_{\text{zwischen}} = 342$

Zusammenfassung der Quadratsummen

	QS
Total	428
Zwischen	342
Innerhalb	86

Das Zusammenhangsmaß η^2

Das Verhältnis der durch die Gruppenzugehörigkeit bedingten Abweichungen vom Mittelwert (QS_{zwischen}) zur Gesamtheit der Abweichungen ist ein Maß für die Stärke des Einflusses der Gruppenzugehörigkeit:

$$\eta^2 \text{ (Eta-Quadrat)} = \frac{\mathrm{QS}_{\text{zwischen}}}{\mathrm{QS}_{\text{total}}}$$

η^2 kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Im vorliegenden Fall beträgt der Wert $342/428 = 0,799$ (gibt es in echten Studien selten; die „echten" Daten in der Graphik zu Beginn der Vorlesung ergeben ein η^2 von $0,23$).

η^2 als PRE-Maß

PRE: Proportional Reduction of Error

„Fehler“ hier: Die Differenz zwischen dem (auf Grundlage unseres Modells) geschätzten Wert und dem wahren Wert.

- Kennen wir die Gruppenzugehörigkeit nicht, ist bester Schätzwert der Gesamtmittelwert (Schwerpunkteigenschaft des arithmetischen Mittels). Der Fehler (E_1) ist dann QS_{total}.
- Kennen wir die Gruppenzugehörigkeit, ist der beste Schätzwert der Gruppenmittelwert. Der Fehler (E_2) ist dann $QS_{\text{innerhalb}}$.

η^2 als PRE-Maß

Die „Reduzierung“ des Fehlers, d. h., der Unterschied zwischen den beiden Fehlern ($E_1 - E_2$), muss in Beziehung gesetzt werden zum Ausgangsfehler (E_1).

Allgemein werden PRE-Maße also nach folgender Formel berechnet:

$$\mathrm{PRE-Maß} = \frac{E_1 - E_2}{E_1}$$

Im Falle von η^2 heißt das:

$$\eta^2 \quad = \frac{\mathrm{QS}_{\mathrm{total}} - \mathrm{QS}_{\mathrm{innerhalb}}}{\mathrm{QS}_{\mathrm{total}}} = \frac{\mathrm{QS}_{\mathrm{zwischen}}}{\mathrm{QS}_{\mathrm{total}}}$$

Inferenzstatistik I

Zur Prüfung, ob sich die Gruppen überzufällig unterscheiden, werden nicht die Quadratsummen, sondern die Varianzen zueinander in Beziehung gesetzt. Diese heißen hier auch „mittlere Quadratsummen“ (MQS).

$$\text{MQS}_{\text{zwischen}} = \frac{\text{QS}_{\text{zwischen}}}{r-1} = \frac{m \sum\limits_{i=1}^{r} (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{r-1}$$

$$\text{MQS}_{\text{innerhalb}} = \frac{\text{QS}_{\text{innerhalb}}}{n-r} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1}^{m} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n-r}$$

Inferenzstatistik II

Die Größe

$$F = \frac{\text{MQS}_{\text{zwischen}}}{\text{MQS}_{\text{innerhalb}}}$$

folgt einer F-Verteilung mit r-1 und n-r Freiheitsgraden. Sie prüft, ob sich irgendwelche Gruppenmittelwerte voneinander unterscheiden, also

$\text{H}_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = \mu$

$\text{H}_1: \quad \mu_i \neq \mu \quad$ für mindestens ein i

Inferenzstatistik im Beispiel

	QS	df	MQS
Total	428	8	
Zwischen	342	2	171,00
Innerhalb	86	6	14,33

Kritischer Wert bei 2 und 6 df, $\alpha = 0,05$: 5,143.

Teststatistik F hier: $171/14,33 = 11,93 > 5,143$.

Die Nullhypothese wird also abgelehnt.

Alternativen und Anwendungsvoraussetzungen

- Liegen nur zwei Gruppen vor, wird oft der t-Test für die Inferenzstatistik verwendet; die Varianzanalyse kommt jedoch zu den gleichen Schlussfolgerungen.
- Die Anwendbarkeit der Varianzanalyse (ebenso wie des t-Tests) hängt von einigen Voraussetzungen ab, vor allem: gleiche Varianzen in den Gruppen und Normalverteilung der abhängigen Variablen. Weichen die Daten stark von diesen Annahmen ab (vor allem bei kleinen oder sehr unterschiedlich großen Gruppen), müssen alternative („verteilungsfreie“) Verfahren verwendet werden.

Letzte Worte zur Varianzanalyse

- Der F-Test ist nur ein globaler Test („es gibt irgendwelche Unterschiede"). Zum Testen spezifischer Hypothesen gibt es weitere Prüfverfahren.
- Mit der Varianzanalyse können auch Einflüsse mehrerer Gruppierungsvariablen analysiert werden (z.B. zwei Therapien bei zwei verschiedenen Krankheitsformen).
- Es gibt auch Verfahren für abhängige Stichproben, z. B. Messwiederholungen.